

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

ANNÉE 1817.

TABLE

DES MÉMOIRES CONTENUS DANS CE VOLUME,

Qui est le second *de la Collection des Mémoires de l'Académie des sciences*, *depuis l'ordonnance du* 21 *mars* 1816.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANNÉE 1817.

TOME II.



A PARIS,

Chez FIRMIN DIDOT, Imprimeur du Roi et de l'Institut, et Libraire pour les Mathématiques, rue Jacob, n° 24.

M. DCCC. XIX.



HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANALYSE

Des Travaux de l'Académie royale des Sciences, pendant l'année 1817.

PARTIE MATHÉMATIQUE,

PAR M. LE CHER DELAMBRE, SECRÉTAIRE-PERPÉTUEL.

Deuxième Supplément à la théorie mathématique des probabilités, ou application du calcul des probabilités aux opérations géodésiques par M. le marquis DE LAPLACE.

« DANS les questions d'astronomie, chaque observation fournit une équation de condition pour corriger les élémens; lorsque ces équations sont très-multipliées, on a des formules qui donnent à-la-fois les corrections les plus avantageuses, et la probabilité que les erreurs, après ces corrections, seront contenues dans les limites assignées, quelle

16

que soit d'ailleurs la loi de probabilité des erreurs de chaque observation. Mais cette loi est inconnue, et elle introduit dans les formules une indéterminée qui ne permettrait pas de les exprimer en nombres, si l'on ne parvenait pas à l'éliminer. »

Les moyens employés ailleurs pour cette élimination ne s'offrant pas dans la question présente, il fallait en chercher d'autres, et l'auteur les a trouvés dans ce qu'on appelle communément l'erreur des triangles, c'est-à-dire la quantité dont les trois angles observés d'un même triangle diffèrent de la somme toujours connue des trois angles sphériques. La somme des quarrés de ces erreurs remplace la somme des quarrés des restes des équations de condition ordinaires. De cette manière on peut déterminer numériquement la probabilité que l'erreur du résultat final d'une longue suite d'opérations géodésiques n'excède pas une quantité donnée. Cette méthode trouvera une application utile et curieuse dans la partie de notre méridienne qui s'étend depuis la base de Perpignan jusqu'à l'île de Formentéra.

On sait que le projet de Méchain avait été de vérifier cette partie par une base qu'il comptait mesurer sur les bords de l'Albuféra dans le royaume de Valence. Déja il en avait reconnu l'emplacement, fixé les termes, et même fait une mesure provisoire. Les circonstances politiques ayant fait naître des obstacles insurmontables à l'exécution de ce projet, l'exactitude de cette partie repose en entier sur la précision avec laquelle les angles ont été mesurés. Ce qui doit rassurer, c'est l'accord remarquable de la base de Perpignan avec celle de Melun, malgré le grand nombre de triangles qui a fait la jonction de ces deux bases, dont la distance

est de plus de 330,000 toises, ou de plus de 643,000 mètres; c'est l'accord non moins satisfaisant de la base de Melun avec les deux bases d'Honslow-Heath et de Romney-Marsh, mesurées en Angleterre par le major-général Roy. L'arc entier de Greenwich à Formentéra présente un total de plus de 1400 mille mètres ; la partie septentrionale, qui est d'environ un million de mètres, est appuyée sur quatre bases mesurées avec le plus grand soin.

Il est resté 400 mille mètres, dont on s'est vu forcé d'abandonner la vérification ; mais remarquons encore que pour cette partie, dont le dernier triangle offrait une difficulté particulière, on a fait construire des instrumens, ou plus soignés encore, ou de plus grande dimension; et que presque tous les angles ont été mesurés sur des signaux composés de réverbères paraboliques, et que si, par l'effet des circonstances, nous sommes plus dépendans de la bonté des angles, ces angles au moins ont été observés avec des attentions et des ressources particulières. Les astronomes ont fait tout ce qui était humainement possible ; personne autant qu'eux n'est intéressé à connaître jusqu'à quel point ils ont pu réussir. Ils seront les premiers sans doute à chercher dans les nouvelles formules, quelle sera la probabilité que leurs erreurs involontaires sont du moins renfermées dans des limites dont il est permis d'être satisfait.

Quand une base de vérification réellement mesurée s'écarte peu de ce qu'a donné le calcul fait sur une première base, il y a tout lieu de croire que la chaîne des triangles est exacte, à-fort-peu-près, ainsi que la valeur du grand arc qui en résulte. On corrige ensuite cette valeur en modifiant les angles des triangles de manière que les bases calculées s'accordent

avec les bases mesurées; ce qui peut s'exécuter d'une infinité de manières. *Celles que l'on a jusqu'à-présent employées sont fondées sur des considérations vagues et incertaines.*

Il ne sera pas inutile, en cette occasion, de rappeler ce qu'on a fait en ce genre. Dans la méridienne de 1740, la Caille ayant à faire disparaître des erreurs qu'il ne pouvait laisser subsister, a imaginé de corriger les triangles en retranchant 5″ de l'un des angles, pour les ajouter à l'angle opposé; les triangles présentaient souvent des erreurs de 15, 20, et jusqu'à 30″; on était bien loin alors de pouvoir répondre des quantités dont il se permettait de disposer. On ne savait précisément où se trouvaient les erreurs, ni à quoi chacune en particulier pouvait monter. Mais il était évident qu'il y avait des erreurs, et qu'elles altéraient l'accord des bases. Ce qu'on pouvait faire de plus simple, et de plus probable, était de réduire la somme des corrections à un *minimum,* et de les distribuer uniformément le long de l'arc. Mais, vu la grandeur de ces corrections, il faut avouer que *c'étaient là des considérations vagues et incertaines.* Dans notre opération, l'erreur à corriger n'était que de quelques pouces; et la commission des savans de différentes nations, assemblée à Paris, crut que, sans rien corriger, il suffirait de calculer la partie septentrionale sur la base de Melun, et la partie méridionale sur la base de Perpignan. Il en résultait seulement que le côté du triangle, qui était précisément au milieu de l'arc, et faisait la jonction des deux parties, avait ainsi deux valeurs un peu différentes, et que les azimuts des objets voisins n'étaient pas rigoureusement les mêmes dans les deux calculs. Pour faire disparaître ces irrégularités, tout-à-fait sans conséquence, l'auteur de la *Base*

du systéme métrique a cru qu'on lui permettrait de faire à ses angles des corrections absolument insensibles, mais uniformément distribuées depuis Melun jusqu'à Perpignan. Ces corrections n'ont jamais été que d'un dixième de seconde, dont on sait bien qu'il est impossible de répondre. Ces corrections faites aux angles, une autre correction très-légère, faite à l'une des bases, et dont il a démontré la légitimité, jointes à quelques autres qu'il s'est permises d'après une conviction intime, n'ont abouti cependant qu'à diminuer d'une seule toise l'arc total qui est de 551,584 entre Dunkerque et Barcelone. Cette double manière d'arriver au même résultat, par deux calculs entièrement différens, peut nous autoriser à nous croire entièrement affranchis de la loi des erreurs, puisqu'elles se sont trouvées si petites ou si heureusement compensées.

Supposons, pour un moment, qu'on n'eût mesuré en France que la seule base de Perpignan, on aurait eu quelques pouces de moins sur les côtés des triangles qui avoisinent Paris; l'incertitude eût été un peu plus grande aux environs de Dunkerque. Supposons encore que nous n'eussions pas la vérification des bases anglaises, nous aurions eu un mètre plus court d'un cinquante-millième à-peu-près; nous aurions moins de certitude, mais l'erreur ne serait pas beaucoup plus grande en effet. On peut espérer que la seconde base, sans même parler des deux bases anglaises, aura réduit l'erreur à moitié; une troisième base, en Espagne, aurait réduit l'erreur au tiers. Mais qu'elle soit d'un cent-millième, ou d'un cent-cinquante-millième sur la longueur du mètre, c'est une différence qui n'est pas d'une importance bien grande pour les usages réels.

On savait depuis long-temps que les triangles, mesurés à la surface de la terre, sont nécessairement sphériques, et que la somme des trois angles doit surpasser 180° d'une quantité qui peut varier de deux à quatre secondes ; l'erreur des observations se combinait avec l'excès sphérique qui pouvait en paraître augmenté ou diminué ; mais, sans parler même d'aucune distinction, on répartissait la différence totale sur les trois angles qu'on réduisait à 180° ; ce qui était les corriger chacun, tout-à-la-fois, du tiers de l'excès sphérique, et du tiers des erreurs proprement dites. M. Legendre a prouvé, qu'en corrigeant chaque angle du tiers de l'excès sphérique, on pouvait, sans erreur sensible, considérer le triangle comme rectiligne. Nous-mêmes, en examinant avec soin tous les effets des négligences qu'on se permettait autrefois, nous avions en particulier cherché l'erreur qui pouvait résulter du triangle sphérique calculé comme rectiligne. Nous avions trouvé que les deux erreurs de la supposition se compensaient nécessairement, et nous avions été menés par une route toute différente, au théorême curieux que M. Legendre avait donné d'abord sans démonstration : ainsi le parti qu'on avait adopté par nécessité et faute de mieux, s'est trouvé le même qu'on suit aujourd'hui avec toute confiance, parce que l'exactitude en est démontrée. Quant à l'erreur propre des observations, on n'a jamais eu d'autre règle générale que de la répartir par portions égales sur les trois angles : ainsi l'on se conformait encore, ou par instinct, ou par nécessité, à ce que M. de Laplace démontre aujourd'hui être la seule méthode à suivre, parce qu'elle est la plus probable. C'est déja une remarque importante ; mais l'auteur y ajoute encore l'expression fort simple de la probabilité que l'erreur est com-

prise dans les limites dont il donne également l'expression analytique.

Voilà pour ce qui concerne un arc du méridien. L'auteur suppose ensuite que l'arc mesuré, l'a été dans une direction perpendiculaire au méridien. On distribuera de la même manière l'excès sphérique et l'erreur propre des angles. On aura donc des corrections analogues pour les côtés et pour l'arc entier. Ici la théorie se complique un peu, parce que, outre la vérification de la seconde base, on en trouve une autre dans l'azimut du dernier côté qu'on observe directement, et que l'on compare à celui qui se déduit du premier côté, par une suite de calculs dans lesquels entrent nécessairement tous les angles observés le long de l'arc pour la formation des triangles. Les corrections qu'on obtient reposent pareillement sur une analyse de laquelle on a éliminé la loi de possibilité des erreurs, on connaît de même les limites dans lesquelles la probabilité est renfermée.

On peut remarquer que, dans les opérations géodésiques, l'analyse n'a guère fait que confirmer et légitimer ce que le simple bon sens avait indiqué. Nous pourrions citer d'autres circonstances où l'on a eu le même bonheur. Cependant il peut se trouver aussi des occasions où le simple aperçu conduirait à un principe faux et qui pourrait égarer. Ainsi, dans la question du pendule, on avait été tenté de croire que si le tranchant du couteau, au lieu d'être une ligne presque mathématique, était un petit cylindre, dont le rayon ne fût pas absolument insensible, il fallait ajouter ce rayon à la longueur mesurée, au lieu que l'analyse a montré qu'il fallait le retrancher. En conséquence, dans un petit écrit que M. de Laplace a inséré à la suite du Mémoire précédent, il a re-

tranché *deux millièmes de millimètre* (un peu moins qu'un millième de ligne) du résultat de Borda pour la mesure du pendule; ce qui suppose huit millièmes de millimètre pour le rayon du couteau.

D'après cette correction très-légère, faite au nombre de Borda, et par une nouvelle discussion de toutes les observations du pendule, M. Mathieu a trouvé l'expression suivante, pour la longueur du pendule des secondes sexagésimales, à une latitude quelconque :

$$0^{m},990787 + 0^{m},0053982 \; \textit{sin.}^2 \; \textit{latitude.}$$

Sur un nouveau moyen de régler la durée des oscillations des pendules, par M. DE PRONY.

Ce moyen est fondé sur la variation qu'éprouve le *moment d'inertie* d'un corps, lorsque ce corps, ou une partie de sa masse, change de position par rapport à l'axe auquel on rapporte ce moment. L'auteur expose d'abord la théorie mathématique et les formules usuelles, que nous sommes obligés de supprimer. Il en fait ensuite l'application en adaptant au pendule une tige métallique d'un petit diamètre, placée au-dessus de l'axe de suspension, dans le prolongement de la perpendiculaire menée du centre de gravité sur cet axe. Une autre verge, aussi très-mince, croise à angles droits la première, autour de laquelle elle peut tourner à frottement doux ; aux extrémités de cette seconde verge, et à distances égales de la première, sont deux petits globes de platine, qui, tournant avec la verge à laquelle ils sont fixés, retardent ou accélèrent les vibrations, suivant qu'on les éloigne ou qu'on les approche du plan passant par l'axe

de suspension, et par le centre de gravité du pendule. Le retard atteint son *maximum,* lorsque la verge qui porte les deux globes est à angles droits sur le plan dont on vient de parler.

Sur les principes de l'auteur, M. Bréguet a construit une pendule à demi-secondes, dont les premiers essais ont été très-satisfaisans. Les globes de platine ont environ 4 millimètres de rayon. Dans la position initiale, leurs distances à l'axe du pendule et à l'axe de suspension, sont respectivement de 34 et de 36 millimètres ; et un mouvement de $\frac{1}{4}$ de circonférence, à partir de la position primitive, produit un retard d'environ 10″ en vingt-quatre heures. Ainsi, en réglant préalablement la pendule dans la position initiale, de manière qu'elle avance d'un nombre de secondes entre 0 et 10″, on est assuré de pouvoir la régler exactement en faisant décrire au système des globes un angle plus petit que l'angle droit. Ce mouvement angulaire est produit avec une extrême facilité, sans que la pendule s'arrête ; ce qui est un grand avantage. L'auteur promet de rendre compte des expériences. Pour les formules, voyez *Connaissance des temps, de* 1820, *p.* 402 *et suiv.*

On trouvera dans le même volume les recherches de M. Burckhardt sur la planète *Uranus,* et les anciennes observations dont nous avons parlé dans le dernier volume des Mémoires de la Classe des sciences mathématiques de l'Institut royal ; l'auteur y joint la note des petites équations qui existent dans la théorie de Jupiter.

La somme des termes du 6e ordre monte à près de 15″ en sept termes de signes différens, et dont le plus fort n'est pas de 5″.

Celle des termes du 5ᵉ ordre ne va guère qu'à 2″, et aucun ne monte à 0″,75.

Celle des termes du 4ᵉ ordre ne va guère qu'à 7″, dont le plus fort n'est pas de 3″.

Les termes du 3ᵉ ordre sont plus nombreux, et forment une somme de 11″ environ, mais de signes différens, et dont aucun n'est de 3″.

Les termes du 2ᵉ ordre sont au nombre de 4; la somme ne passe guère 1″, et le plus fort ne va pas à 0″,6.

M. Burckhardt donne encore quelques remarques sur plusieurs étoiles; remarques qu'il a faites à l'occasion d'un grand travail sur les étoiles perdues, dont il dresse un catalogue qui l'occupe depuis plusieurs années.

Nous extrairons avec la même briéveté quelques Mémoires d'astronomie lus à l'Académie.

Probléme de Képler.

Les calculateurs géomètres aiment peu les méthodes indirectes. Pour les satisfaire, nous avions donné deux méthodes différentes, pour trouver l'anomalie vraie par l'anomalie moyenne. Ces formules ne pouvaient être qu'approximatives, mais elles étaient toujours plus que suffisantes pour toutes les planètes connues. M. Robertson a cherché des séries qui pussent convenir à toutes les comètes. Il s'était arrêté aux quatrièmes puissances de la variable; ce qui pouvait suffire, en effet, dans quelques circonstances assez rares. Mais, dans le plus grand nombre des cas, l'erreur devenait très-sensible. Nous avons voulu voir si, en conduisant cette sorte de série jusqu'à la neuvième puissance, on ne pour-

rait pas donner au calcul direct l'exactitude requise, quelle que fût l'excentricité de la comète. Cette épreuve nous a fait reconnaître deux inconvéniens qu'il était aisé de prévoir. Le premier est le nombre incommode des termes à conserver, d'où résulte une longueur excessive dans le calcul, et, ce qui est pis encore, l'insuffisance de la série qui, malgré les cinquante-deux termes dont elle est composée, se trouve encore trop incomplète, en sorte que l'on est obligé d'en rectifier le résultat par une formule différentielle. Ce remède pouvait s'appliquer à la série de M. Robertson comme à la nôtre, quoique avec un peu plus de travail et un peu moins de sûreté; ce qui nous a conduits à examiner cette autre question : *Les formules directes d'approximation sont-elles nécessaires, sont-elles même utiles?* Nous croyons pouvoir assurer que non. Des exemples nombreux et très-concluans nous ont prouvé que la formule si connue de Képler,

Anomalie moyenne = anom. excent. + excentricité sin. anom. excent.,

mène toujours à la véritable valeur par sept ou huit essais de la plus grande facilité, puisqu'ils n'emploient que des logarithmes constans et des logarithmes peu différens, qui se trouvent presqu'à la même page. Les premiers essais font arriver rapidement à deux limites entre lesquelles est renfermée l'inconnue; dès-lors toute incertitude cesse, on n'a plus qu'à resserrer de plus en plus ces limites par des suppositions régulièrement espacées, et l'on atteint le but plus tôt et plus sûrement que par aucune série, ou tout moyen subsidiaire quelconque.

Lignes horaires des cadrans antiques.

On n'avait que des idées très-confuses, et même fort inexactes, sur la nature de ces lignes, que tous les gnomonistes anciens ont toujours supposées parfaitement droites. M. Cadell, dans les *Transactions philosophiques* d'Edimbourg, a donné l'équation de ces courbes, et il en a expliqué les principales propriétés; mais son travail, purement théorique, laissait indécises plusieurs questions qui intéressent spécialement la pratique. Son Mémoire nous a donné l'occasion de chercher la raison qui fait que ces lignes ne sont ni aussi simples qu'on l'avait cru généralement, ni aussi bizarres que l'a dit Montucla. Nous avons voulu savoir quelle était l'erreur commise par les anciens, en les supposant parfaitement droites. Il est résulté de ces recherches, qu'à l'exception de quelques cas rares, qui ne s'étaient jamais rencontrés, et dans lesquels ce genre de cadran devient inutile et presque inexécutable, les anciens ont eu raison de faire leurs lignes droites, puisque l'erreur, dans aucun cas, n'atteignait une minute; précision que jamais, et sur-tout dans ces temps anciens, on n'a cherchée dans un cadran solaire; enfin que jamais il n'y avait aucune erreur dans la ligne de midi.

Méthode pour régler une pendule sur le temps vrai, au moyen du cercle répétiteur.

Le cercle de Borda qui procure des avantages si importans et si peu contestés par la répétition des angles, a cependant l'inconvénient réel de ne pouvoir donner directement la

distance apparente d'un astre à aucun instant; jamais on ne peut obtenir qu'une distance double, avec les instans des deux observations. On n'a donc que la somme ou la demi-somme des deux distances. Pour en conclure les distances simples, il faudrait une formule qui servît à calculer la demi-différence, alors on aurait les deux distances inégales avec les instans correspondans marqués par la pendule; chacune de ces distances donnerait ensuite l'angle horaire, et par conséquent la correction de la pendule. Nous avons donné (*Astron. tom* 1er, *p.* 573) une formule qui servirait à calculer cette demi-différence avec toute l'exactitude qu'on peut desirer; mais la formule est composée de trois termes, et s'il fallait l'appliquer à une série de vingt distances, le calcul serait d'une longueur très-incommode : ainsi jamais nous n'avons fait cette application de notre formule, et nous l'indiquons ici pour la première fois. Il est vrai que les deux derniers termes de la formule sont au moins neuf cents fois moindres que le premier, et méritent peu d'être calculés; mais il resterait toujours à résoudre un triangle sphérique pour chaque distance, ce qui serait bien long. Des essais répétés nous avaient convaincus qu'on pouvait, pendant l'intervalle de deux minutes au plus, qui séparent les deux observations, supposer que la distance zénitale, ainsi que la déclinaison, avaient varié proportionnellement au temps; alors au lieu de vingt triangles il n'en restait plus que dix à calculer. Nous nous étions même assurés qu'on pouvait étendre ces suppositions à quatre observations au lieu de deux, et qu'on n'avait ainsi que cinq triangles à calculer.

M. Soldner vient d'élever des doutes sur ces deux assertions; il trouve d'ailleurs l'opération fatigante par sa lon-

gueur, et il nous indique une formule d'après laquelle il suffira de calculer un seul triangle qui aura, pour un de ses côtés, la moyenne entre toutes les distances zénitales observées. On sent que la correction qui en résultera pour la pendule, aura besoin d'être corrigée de l'erreur qui proviendra des secondes différences du mouvement en hauteur. Quant à la déclinaison, il la suppose constante pendant toute la série.

A notre tour, nous n'avons pu repousser quelques doutes sur l'exactitude de la formule et sur l'avantage qu'elle peut avoir du côté de la briéveté.

Cette formule est fondée sur une remarque neuve et curieuse. Par une considération fort adroite, M. Soldner est parvenu à ramener la correction des distances observées dans un vertical quelconque à celles qu'on applique aux distances observées près du méridien; il calcule ses corrections par les mêmes tables, et il multiplie la correction moyenne par une quantité qu'il suppose constante pour toute la série.

Pour vérifier cette nouvelle méthode, nous commençons par refaire en entier la démonstration analytique qui était incomplète; nous nous assurons, par des calculs numériques, que l'on peut, en effet, employer le même coëfficient pour toute la série, et qu'ainsi on ne peut rien reprocher à la méthode en ce qui concerne l'exactitude. Il restait à voir si cette exactitude surpassait celle de la méthode que nous avons constamment employée. Des calculs scrupuleux nous ont prouvé que la précision est exactement la même; qu'une série de vingt distances, corrigée à la manière de M. Soldner, est peut-être un peu moins laborieuse que le calcul des dix triangles, et un peu plus que le calcul de cinq triangles:

que la différence, au reste, est peu de chose, si ce n'est que la formule exige des tables subsidiaires qu'on n'a pas toujours sous la main, sans dispenser de l'usage des tables de sinus, qui suffisent pour la méthode trigonométrique.

On tire encore, de la formule de M. Soldner, ce résultat curieux qu'il était au reste aisé de prévoir. Les corrections des distances croissent comme les quarrés des temps; en conséquence, si l'on risquait des erreurs de 2″ sur la correction de la pendule, en prenant des moyennes entre les vingt distances et les vingt instants marqués par la pendule, on ne doit plus risquer que des erreurs de 0″,02 en les réunissant deux à deux, ce qui rend les intervalles dix fois moindre, et l'erreur cent fois plus petite. C'est, en effet, ce que le calcul numérique a confirmé. Et nous pouvons conclure que, si la formule de M. Soldner n'est pas indispensable; si elle n'a réellement que peu ou point d'avantage sur la méthode trigonométrique, elle l'égale en bonté, et nous procure au moins cet avantage, que nous connaissons mieux l'erreur à laquelle nous nous exposerions en étendant les intervalles, qu'il sera toujours bon de restreindre le plus qu'il sera possible. Il sera donc utile de composer les séries partielles de quatre observations au plus; mais en les restreignant à deux, on n'aura jamais rien à craindre. Les erreurs les plus grandes viendront toujours des observations, celles du calcul seront toujours insensibles.

Mémoire sur les fonctions réciproques, par M. Cauchy.

Mémoire sur la décomposition des Polynomes en facteurs réels du second degré, par le même.

Ces recherches d'analyse pure ne sont guère susceptibles d'extrait, nous sommes obligés de renvoyer aux Mémoires

COMÈTE de 1766.

Cette comète fut observée à Paris pendant cinq jours, du 8 au 13 avril. Alors elle se perdit dans les rayons du soleil : elle reparut le matin après son passage au périhélie ; mais sa position en rendit l'observation impossible. La Nux, correspondant de l'Académie, l'observa à l'île de Bourbon, depuis le 29 avril jusqu'au 13 mai. Pingré, après des calculs immenses, ne put représenter les observations qu'à deux degrés près M. Burckhardt ne fut pas plus heureux lorsqu'il s'occupa de cette comète en 1816; il fut dès-lors persuadé qu'une ellipse pourrait seule satisfaire aux observations. L'embarras était de trouver cette ellipse; car aucune des méthodes d'approximation ne pouvait s'y appliquer, vu la distribution particulière des observations. Cependant, après de nouvelles recherches, M. Burckhardt est arrivé à l'ellipse suivante :

Périhélie, 249° 45′; nœud, 76° 33′; inclinaison, 8° 10′; excentricité, 0.874; demi-axe, 3.1495; révolution, 5^a58936. Passage au périhélie, 26,5367 avril (environ 13^h).

M. Burckhardt nous avertit que cette ellipse n'est qu'une première approximation ; mais les recherches ultérieures exigeront beaucoup de temps, sur-tout si l'on veut constater

l'identité de cette comète avec celle de 1770, c'est donc uniquement pour prendre date que l'auteur a présenté cette note à l'Académie (le 22 décembre 1817). Nous y ajouterons les élémens de la parabole de Pingré.

Périhélie, 242° 17'; nœud, 74° 23'; inclinaison, 11° 8' 4" dist. périhélie, 0.33274.

Passage au périhélie 22 avril 20h 56'.

Pingré fit lui-même des changemens considérables à ces élémens, en sorte que les diverses paraboles n'ont presque rien de commun. L'ellipse de M. Burckhardt a une ressemblance remarquable avec celle de la fameuse comète de 1770. C'est celle du demi-grand axe, et conséquemment du temps de la révolution; le reste est fort différent, sur-tout l'inclinaison et le lien du nœud; mais on soupçonne, en effet, que la comète de 1770 est sujette à de grandes altérations qui même l'ont empêchée de se remontrer, quoiqu'elle ait dû revenir déja plusieurs fois. On ne pourra donc, sans des calculs immenses, parvenir à rendre l'identité probable; et quand on lit dans la cométographie le détail des observations de La Nux, on regrette vivement d'y trouver si peu de précision et si peu de garantie pour des recherches si délicates. Pingré fait remarquer que l'erreur des observations a dû affecter principalement les latitudes, et ce sont les latitudes qui s'écartent le plus des diverses paraboles essayées jusqu'ici. Cependant Pingré convient en finissant que les observations de La Nux ont réellement servi à donner une orbite moins inexacte, quoiqu'il y soupçonne des erreurs assez graves qui tiennent au défaut des instrumens. « Si pourtant « quelqu'un plus heureux ou plus habile pouvait extraire de

« ces observations une théorie plus satisfaisante, j'applaudis « d'avance de bon cœur à son succès. »

Si quelqu'un est en état de réaliser le vœu de Pingré, c'est incontestablement M. Burckhardt, qui a fait ses preuves en ce genre, comme dans toutes les recherches qui exigent une grande sagacité, jointe à une patience extraordinaire.

Mémoire sur la température des habitations et sur le mouvement varié de la chaleur dans les prismes rectangulaires; par M. le baron FOURIER.

On s'est proposé de traiter dans ce Mémoire deux des questions principales de la théorie de la chaleur. L'une offre une application de cette théorie aux usages civils; elle consiste à distinguer les conditions physiques qui déterminent l'échauffement de l'air dans un espace donné, et à exprimer la valeur de la température au moyen des quantités relatives à ces conditions. La seconde question appartient à la théorie analytique de la chaleur. Elle a pour objet de déterminer la température variable de chaque molécule d'un prisme droit à base rectangulaire, placé dans l'air à une température constante. On suppose que la température initiale de chaque point du prisme est connue, et qu'elle est exprimée par une fonction entièrement arbitraire des trois coordonnées de chaque point; il s'agit de déterminer tous les états subséquens du solide, en ayant égard à la distribution de la chaleur dans l'intérieur de la masse, et à la quantité de chaleur que la superficie communique à l'air, soit par le contact, soit par le rayonnement.

La première question, qui concerne la température des espaces clos, intéresse les arts et l'économie publique. Ce

sujet est entièrement nouveau : on n'avait point encore cherché à découvrir les relations qui subsistent entre les dimensions d'une enceinte solide formée d'une substance connue, et l'élévation de la température que doit produire une source constante de chaleur placée dans l'espace que cette enceinte termine. L'auteur se propose d'exposer successivement l'objet et les élémens de chaque question, les principes qui servent à la résoudre, et les résultats de la solution.

Il suppose qu'un espace d'une figure quelconque et d'une assez grande étendue est fermé de toutes parts et rempli d'air atmosphérique. L'enceinte solide qui le termine est homogène; elle a la même épaisseur dans toutes ses parties, et ses dimensions sont assez grandes pour que le rapport de la surface intérieure à la surface extérieure diffère peu de l'unité. L'air extérieur conserve une température fixe et donnée; l'air intérieur est exposé à l'action constante d'un foyer dont on connaît l'intensité. La question consiste à déterminer la température qui doit résulter de cette action d'un foyer invariable indéfiniment prolongée. On ne considère ici que la température moyenne de l'air contenu dans l'espace, sans avoir égard à l'inégale distribution de la chaleur dans cette masse d'air. Il faut se représenter que des causes toujours subsistantes mêlent les différentes parties de cet air intérieur, et en rendent la température uniforme. On fait abstraction de plusieurs conditions accessoires dont aucune ne doit être omise dans les applications; mais il est nécessaire d'examiner, en premier lieu, les résultats des causes principales : c'est le seul moyen de découvrir les lois simples et constantes des phénomènes.

On voit d'abord que la chaleur qui sort à chaque instant

du foyer élève de plus en plus la température de l'air intérieur; qu'elle passe de ce milieu dans la masse dont l'enceinte est formée; qu'elle en augmente progressivement la température, et qu'en même temps une partie de cette chaleur, parvenue jusqu'à la surface extérieure de l'enceinte, se dissipe dans l'air environnant. L'effet qu'on vient de décrire s'opère continuellement; l'air intérieur acquiert une température beaucoup moindre que celle du foyer, mais toujours plus grande que celle de la première surface de l'enceinte. La température des différentes parties de cette enceinte est d'autant moindre, qu'elles sont plus éloignées de la première surface; enfin la seconde surface est plus échauffée que l'air extérieur dont la température est constante. Ainsi la chaleur du foyer est transmise à travers l'espace et l'enceinte qui le termine. Elle passe d'un mouvement continu dans l'air environnant. Si l'on ne considérait qu'un seul point de la masse de l'enceinte, et qu'on y plaçât un thermomètre très-petit, on verrait la température s'élever de plus en plus, et s'approcher insensiblement d'un dernier état qu'elle ne peut jamais outre-passer. Cette valeur finale de la température n'est pas la même pour les différentes parties de l'enceinte; elle est d'autant moindre, que le point est plus éloigné de la surface intérieure.

On voit par-là qu'il y a deux effets distincts à considérer; l'un est l'échauffement progressif de l'air à différentes parties de l'enceinte qui le contient; l'autre est le système final de toutes les températures devenues fixes. C'est l'examen de ce dernier état qui est l'objet spécial de la question. A la vérité les températures ne peuvent jamais atteindre à ces dernières valeurs, car cela n'aurait lieu exactement qu'en sup-

posant le temps infini ; mais la différence devient de plus en plus insensible, comme le prouvent toutes les observations. Il faut seulement remarquer que l'état final a une propriété qui le distingue, et qui sert de fondement au calcul. Elle consiste en ce que cet état peut subsister de lui-même sans aucun changement ; en sorte qu'il se conserverait toujours s'il était d'abord formé. Il en résulte que pour connaître le système final des températures, il suffit de déterminer celles qui ne changeraient point si elles étaient établies, en supposant toujours que le foyer retient une température invariable, et qu'il en est de même de l'air extérieur. Supposons que l'on divise l'enceinte solide en une multitude de couches extrêmement minces, dont chacune est comprise entre deux bases parallèles aux surfaces de l'enceinte ; on considérera séparément l'état de l'une de ces couches. Il résulte des remarques précédentes, qu'il s'écoule continuellement une certaine quantité de chaleur à travers chacune des deux surfaces qui termine cette tranche. La chaleur pénètre dans l'intérieur de la tranche par sa première surface, et dans le même-temps elle sort de ce prisme infiniment petit à travers la surface opposée. Or, il est évidemment nécessaire que ces deux flux de chaleur soient égaux, pour que la température de la tranche ne subisse aucun changement. Cette remarque fait connaître en quoi consiste l'état final des températures devenues fixes, et comment il diffère de l'état variable qui le précède. Le mouvement de la chaleur à travers la masse de l'enceinte devient uniforme lorsqu'il entre dans chacune des tranches parallèles dont cette enceinte est composée, une quantité de chaleur égale à celle qui en sort dans le même temps. Ce flux est donc le même dans toute

la profondeur de l'enceinte, et il est le même à tous les instans. On en connaîtrait la valeur numérique, si l'on pouvait recueillir toute la quantité de la chaleur qui s'écoule pendant l'unité de temps à travers une surface quelconque tracée parallèlement à celles qui terminent l'enceinte. La masse de glace à la température *o*, què cette quantité de chaleur pourrait convertir en eau sans en élever la température, exprimerait la valeur du flux qui pénètre continuellement l'enceinte dans l'état final et invariable. Cette même quantité de chaleur est nécessairement équivalente à celle qui sort pendant le même temps du foyer et passe dans l'air intérieur; elle est égale aussi à la chaleur que cette même masse d'air communique à l'enceinte par la première surface; enfin elle est égale à celle qui sort pendant le même temps de la surface extérieure de l'enceinte et se dissipe dans l'air environnant. Cette quantité de chaleur est, à proprement parler, la dépense de la source.

Les grandeurs connues qui entrent dans ce calcul sont au nombre de huit; savoir : la surface du foyer, sa température permanente, la surface intérieure de l'enceinte, son épaisseur, les coëfficiens qui mesurent la conducibilité extérieure de chacune des deux surfaces, celle du foyer, et la conducibilité propre de la substance dont l'enceinte est formée.

Les trois quantités dont il faut déterminer la valeur sont : la température fixe de l'air intérieur, celle de la première surface de l'enceinte, et celle de la surface extérieure. Il faut y joindre la dépense de la source ou la valeur du flux constant qui pénètre toutes les parties de l'enceinte. On rapporte cette valeur à une seule unité de surface. Les quantités précédentes ont entre elles des relations remarquables qu'il est

facile de découvrir et de démontrer indépendamment de toute hypothèse sur la nature de la chaleur.

La condition principale qui détermine la stabilité du système des températures donne immédiatement trois équations qui contiennent la solution cherchée. Les propositions que l'on en déduit ne sont ni moins simples ni moins rigoureusement démontrées que celles qui forment aujourd'hui les théories statiques ou dynamiques. Il faut seulement considérer que les coëfficiens qui mesurent les qualités spécifiques du solide et des surfaces, pourraient être sujets à quelques variations dépendantes de la température. Si cette nouvelle condition avait lieu, on exprimerait encore, sous la même forme, les propriétés de l'état final, ou celles de l'état variable qui le précède. Ainsi la question est réduite dans tous les cas à une question ordinaire d'analyse, ce qui est le véritable objet de la théorie.

Ici l'auteur indique huit résultats principaux que lui ont fournis ses premières équations. Plusieurs de ces résultats étaient devenus sensibles par l'expérience même. Il est difficile en effet qu'un long usage ne fasse pas connaître des rapports aussi constans. La théorie actuelle les explique, les ramène à un même principe, et en donne la mesure exacte. Au reste, ces remarques sont beaucoup mieux exprimées par les équations elles-mêmes, car il n'y a pas de langage plus distinct et plus clair.

On sait que les corps animés conservent une température sensiblement fixe, qui est en grande partie indépendante de celle du milieu, à moins que les circonstances extérieures ne subissent des changemens considérables. Deux propriétés dont l'effet est opposé concourent à retenir cette tempé-

rature entre des limites assez voisines. Ces corps, dans leur état habituel, sont des foyers d'une chaleur presque constante, de même que les substances enflammées dont la combustion est devenue uniforme. On peut donc, à l'aide des formules, prévoir et régler avec plus d'exactitude l'élévation des températures dans les lieux où l'on réunit un grand nombre d'hommes. Il suffirait d'y observer la hauteur du thermomètre dans des circonstances données, pour déterminer d'avance quel serait le degré de la chaleur acquise, si le nombre d'hommes rassemblés devenait beaucoup plus grand.

On résout par les mêmes principes la question où l'on suppose que le foyer est extérieur, et que la chaleur qui en sort traverse successivement des enceintes diaphanes et pénètrent l'air qu'elles renferment.

Ces résultats fournissent l'explication et la mesure des effets que l'on observe, en exposant aux rayons du solei des thermomètres recouverts par plusieurs enveloppes de verre transparent; expérience remarquable qu'il serait utile de renouveler.

Cette dernière solution a un rapport direct avec les recherches de l'état de l'atmosphère, et sur le décroissement de la chaleur dans les hautes régions de l'air. Elle fait connaître que la première cause de ce phénomène est la transparence de l'air et l'extinction progressive des rayons de chaleur qui accompagnent la lumière solaire. En général, les théorêmes qui concernent l'échauffement des espaces clos, s'étendent à des questions très-variées. On peut y recourir lorsqu'on veut estimer d'avance et régler les températures avec quelque précision, comme dans les serres, les ateliers

ou dans plusieurs établissemens civils, tels que les hôpitaux et les lieux d'assemblée. On pourrait, dans ces diverses applications, avoir égard aux conditions variables omises dans les recherches précédentes, telles que les inégalités de l'enceinte, l'introduction de l'air ; et l'on connaîtrait, avec approximation suffisante, les changemens que ces conditions apportent dans les résultats.

On a remarqué plus haut que les trois coëfficiens spécifiques qui représentent la capacité de chaleur, la conducibilité extérieure et la conducibilité propre, peuvent être sujets à des variations dépendantes de la température. Les expériences les indiquent; mais elles n'en ont point encore donné la mesure précise. Au reste, ces variations sont presque insensibles, si les différences de température sont peu étendues. Cette condition a lieu pour tous les phénomènes naturels qu'embrasse la théorie mathématique de la chaleur. Les variations diurnes et annuelles des températures intérieures de la terre, les impressions les plus diverses de la chaleur rayonnante, les inégalités de température qui occasionnent les grands mouvemens de l'atmosphère et de l'Océan, sont comprises entre des limites assez rapprochées pour que les coëfficiens dont il s'agit aient des valeurs sensiblement constantes.

On a considéré jusqu'ici la partie de la question qu'il importe le plus de résoudre complétement : savoir, l'état durable dans lequel les températures acquises demeurent constantes. La même théorie s'applique à l'examen de l'état variable qui précède, et de celui qui aurait lieu si le foyer étant supprimé ou perdant peu-à-peu sa chaleur, l'enceinte solide et l'air qu'elle contient se refroidissaient progressi-

vement. Les conditions physiques relatives à ces questions sont rigoureusement exprimées par l'analyse de l'auteur. Ainsi toute recherche de ce genre est réduite à une question de mathématiques pures, et dépendra désormais des progrès que doit faire la science du calcul. Les équations se rapportant à l'état permanent sont résolues par les premiers principes de l'algèbre; celles qui expriment l'état précédent ou le refroidissement progressif ne sont pas moins simples, mais elles appartiennent à une autre branche de l'analyse.

L'auteur termine le résumé que nous venons de transcrire par quelques remarques sur les équations différentielles qui expriment le progrès de l'échauffement de l'air dans une enceinte exposée à l'action constante d'un foyer.

Observations sur la vallée d'Égypte et sur l'exhaussement séculaire du sol qui la recouvre; par M. Girard.

Mémoire sur le systême hydraulique de l'Égypte, par M. Girard.

Nouvelles expériences sur le développement des forces polarisantes dans tous les sens des cristaux par la compression, par M. Biot.

Observations sur le systême métrique des peuples anciens les plus connus, appliqué aux distances itinéraires, par M. Latreille.

L'auteur pense, et il paraît assez difficile de lui nier cette supposition, que les premiers peuples s'étaient vus dans la

nécessité d'inventer des mesures bien antérieurement à leurs progrès dans les sciences, et sur-tout avant d'avoir pris la mesure d'un degré de la terre. Il ne doute pas que, parvenus à la civilisation, quelqu'un d'eux n'ait formé avec les premières mesures un corps de système, et son Mémoire est rédigé pour en fournir la preuve. Ce système a dû se composer d'une manière simple, naturelle, convenable en un mot à l'état des lumières, des besoins et de la situation du peuple qui en fut l'auteur.

Toutes les mesures de l'antiquité ont pour premier élément une quantité variable fondée sur une progression arithmétique, dans un ordre décimal ou duodécimal de pas, dont la mesure a pour étalon une longueur divisée le plus souvent en douze ou seize parties, tantôt égale à celle du pied moyen ou de la coudée de l'homme, tantôt plus grande, et composée alors de la longueur de ce pied ou de cette coudée, augmentée d'un certain nombre de ses parties aliquotes.

D'Anville estime la longueur moyenne du pied humain à $9^{p.}\ 0^{l.}$, 8. L'évaluation qui résulte des calculs de M. Latreille ne s'éloigne pas de plus d'une ligne de celle du célèbre géographe; et, pour éviter de petites fractions, il la porte à $9^{p.}\ 1^{l.}$. En lui donnant une demi-ligne de plus, 600 pieds feraient le stade de 76 toises ou de 750 au degré, le pas naturel serait de $22^{p.}\ 10^{l.}$; en ne comptant que 9 pouces, deux fois et demie cette longueur seraient la mesure du pas commun.

Le même géographe porte la coudée à 17 pouces, en supposant la main étendue; on en a formé de plus petites, suivant la partie de la main où elles se terminaient.

Les anciens pieds, et plusieurs de ceux dont on se sert aujourd'hui, semblent dériver les uns de la longueur moyenne du pied de l'homme, et les autres de celle de sa coudée.

Le pied qui sert de base au stade arménien s'identifie avec le pied naturel. Ce pied était divisé en 6 *mates*; le stade vétavan, que d'Anville estime de 750 au degré, paraît avoir été en usage depuis l'Asie orientale jusqu'aux limites occidentales de l'Europe.

L'ancien *li* chinois de 250 au degré n'est que la réunion de trois stades arméniens. Le *li* chinois a reçu successivement diverses augmentations qu'il nous est impossible de bien déterminer; mais il n'en paraît pas moins constant que ces mesures sont établies sur le même principe que les stades des Grecs. Le pied chinois moderne a deux doigts de plus que l'ancien ou 10 au lieu de 8. Le moderne ayant 11$^{p.}$ 9$^{l.}$ 7 de celui de Paris, l'ancien avait environ 9$^{p.}$ 5$^{l.}$ 4.

D'après Pythagore, tous les stades sont composés de 600 pieds ou de 100 pas doubles. Il suffit de connaître la valeur d'un pied pour déterminer celle du stade dont il était le module.

Un pied de 10$^{p.}$ 3^{l} du pied de Paris, employé en Espagne, en Pologne et à Strasbourg, s'assimile au pied naturel augmenté d'environ deux doigts, et porté à 18 au lieu de 16. Il est peut-être la coudée de Samos d'Hérodote; doublé, il forme une coudée de 20$^{p.}$ 6^{l} en usage chez les Hébreux.

Le pied romain, très-rapproché du pied suédois, est de trois seizièmes plus long que le pied naturel.

Quinze parties du pied naturel, divisé en douze doigts,

donnent le pied grec, plus grand d'environ une ligne que le pied anglais.

Notre ancien pied-de-roi ou de Paris n'est que le pied naturel augmenté de ses quatre douzièmes. Des voyageurs ont cru reconnaître l'emploi de ce pied dans les proportions des briques dont se composent quelques monumens présumés babyloniens, maintenant en ruine.

Ajoutez trois seizièmes au pied de $10^{p.}$ $3^{l.}$, vous aurez une mesure presque équivalente au pied *drusien*, qui paraît avoir servi de base au mille lombard et au mille d'Angleterre de $69\frac{1}{2}$ au degré. Trois pieds drusiens forment presque notre mètre. Le pied philétérien de Héron est dans le rapport de six à cinq avec le pied italique.

D'après les calculs de M. Girard, six coudées nilométriques représentent une longueur de treize pieds naturels ayant chacun 9 pouces de long.

Le pied philétérien peut être considéré comme une petite coudée, ayant pour mesure la distance du coude à la naissance du petit doigt. Il forme la base d'un stade qui peut varier de 108 à 109 toises, selon la manière d'apprécier la longueur du pied romain.

D'après tous ces rapprochemens faits avec soin par M. Latreille, il semble qu'on peut admettre que la mesure primitive a par-tout eu pour type le pied moyen de l'homme. Mais on conçoit que l'évaluation moyenne de ce pied a pu varier en différens pays. Ce pied paraissant un peu court, chaque peuple l'aura alongé arbitrairement d'un tiers, d'un quart ou d'un cinquième; d'où il résulte tout naturellement qu'aucun des pieds usuels n'a pu être bien exactement égal à aucun autre, mais que les ecarts n'ont pu être bien considérables.

Les mesures itinéraires anciennes sont de deux sortes : les unes, uniquement formées avec les pieds ou les coudées, sont les stades ; les autres, d'une étendue plus grande, sont composées d'une quantité indéterminée des précédens ; tels sont les schœnes, les parasanges, et les milles.

On distingue plusieurs stades suivant les rapports qu'on leur trouve avec le degré du méridien. Mais si nous voyons tant de vague dans les allongemens arbitraires d'un type assez incertain de sa nature, aurons-nous plus de précision dans l'évaluation du degré ? Si parmi des modernes, qui avaient incontestablement des notions suffisantes de géométrie et l'usage des instrumens propres à mesurer les angles, on remarque des différences telles que celles des degrés de Fernel et de Norwood, celles de Snellius et de Picard, celles de Lemonnier et Lacaille, que penser des mesures exécutées antérieurement à Eratosthène par des peuples à qui nul monument existant, nulle tradition même, n'accordent aucune connaissance positive de géométrie, aucun instrument même grossier ? N'y aurait-il pas beaucoup trop de générosité à accorder, sans la moindre preuve, à ces astronomes ignorés, des connaissances et des instrumens si supérieurs à ceux de Norvood et de Snellius ? Mais suivons M. de Latreille.

L'existence de quelques-uns de ces stades est contestée ; mais il en est deux dont l'emploi chez les anciens est irrécusable ; ce sont ceux de 600 et de 750 au degré. Le premier est l'olympique, et l'autre celui à qui quelques géographes modernes donnent le nom de *pythique*.

Le stade olympique est plus grand de 19 toises que le pythique, et ce même nombre 19 les divise l'un et l'autre

sans fraction. Il est compris cinq fois dans le premier, et quatre dans le second ; la longueur de ce diviseur commun répond à celle que forment 150 pieds naturels ou 60 pas simples. Si nous composons le pas de 6 pieds, le nombre des pas sera réduit à 25 ; multiplié par 4, ce diviseur présente une mesure très-avantageuse par son expression décimale et la quantité de ses sous-diviseurs. Nous aurons 600 pieds naturels et 100 pas géométriques, et le stade de 750 au degré ou de 76 toises. Son nom, son usage général et son module annoncent l'antiquité de son origine. M. Latreille y voit le type des autres stades.

Héron nous dit que le stade égyptien est composé de 6 plèthres. Les Arméniens partageaient leur pied en 6 doigts; le stade alors est de 3600 de ces parties; 3600 doigts font 100 pas naturels; 36 feront un pas, 6 doigts feront $\frac{1}{6}$ de pas, et 1 doigt en fera $\frac{1}{36}$.

La valeur du facteur principal une fois déterminée, il a été facile de former le stade olympique, en ajoutant 150 pas naturels aux 600 pieds du stade pythique, ce qui revenait à augmenter le pied naturel de 27 $\frac{1}{3}$ lignes. Une addition semblable faite au stade olympique le transformera en un stade de 500 au degré ou de 114 toises, qui aura 900 pieds naturels. Ainsi, de ce que 600 stades olympiques ou 500 stades sont la mesure d'un degré du méridien, on n'est pas en droit de conclure qu'on avait connu la valeur de ce degré au moyen d'opérations trigonométriques, puisque la composition de ces stades se déduit naturellement d'un principe général; savoir, une mesure équivalente à 150 pieds naturels ou à 60 pas simples, et ajoutés successivement à elle-même suivant l'étendue du stade.

D'Anville évalue à 2400 toises la longueur du chemin que fait un homme de stature moyenne dans une marche ni trop lente, ni trop accélérée. Cette évaluation paraît un peu forte pour des pays beaucoup plus chauds que le nôtre, tels que ceux où le système métrique paraît avoir pris naissance. L'ancienne lieue gauloise était de 1140 toises; celle des Germains était double. La première suppose une demi-heure de marche, et la seconde une heure entière. L'une et l'autre paraît venir de l'antiquité. Il est vrai que les heures des anciens étaient inégales; mais en Éthiopie, par exemple, la différence était insensible. M. Latreille évalue à 2280 toises la marche ordinaire pendant une heure. Le diviseur 19 répondra à 20″, le stade de 500 vaudra 3 minutes, le stade 500, $2\frac{1}{2}$ minutes; celui de 750 vaudra 2′.

Moyse de Khorène dit que le *stade des stades* avait 43 pas de plus que le stade vétavan. Le premier devait être de 108ᵗ 2ᵖ; c'est le stade de Héron, dont les trente composaient un des schœnes égyptiens, celui de 3250 toises, qui sont l'espace que parcourt en une heure un bon chameau chargé.

La coudée du nilomètre paraît tirer son origine d'une coudée naturelle, augmentée d'un sixième de sa longueur primitive. Si on la partage en 32 doigts, on en déduira la coudée naturelle que d'Anville estime de 17 pouces.

Les grandes mesures itinéraires de l'Inde, de la Perse, la plupart de celles de l'Europe, se décomposent toutes, à peu de chose près, en un certain nombre de quelques-unes de ces stades.

Ainsi, selon l'auteur, le système métrique des anciens, considéré dans ses premiers élémens, est parfaitement simple, très-régulier, et n'exige qu'une application de nos moyens

naturels, et des connaissances arithmétiques. Il paraît avoir été établi à une époque très-ancienne, et avoir passé de l'Orient, peut-être même de l'Égypte, qui dans les premiers temps formait un vaste empire en communication avec l'Inde, en Europe, où il a dû nécessairement subir des modifications.

Dans une note sur les pyramides d'Égypte, M. Latreille admet que les dimensions générales et particulières en pouvaient être coordonnées au système métrique usuel, et qu'en érigeant ces monumens, on s'est proposé de perpétuer la mémoire de l'établissement du système. Mais, en ce cas, ne pourrait-on pas dire que la forme pyramidale était assez mal imaginée, ou que du moins il aurait fallu rendre l'arête égale au côté de la base? Sans cette attention, que peut signifier un monument où rien n'indique quelle est la dimension principale? Placer cette mesure ou cet étalon dans une diagonale, dans un apothême ou dans toute autre ligne qu'on peut concevoir dans la pyramide, n'était-ce pas s'exposer à l'inconvénient de n'être nullement entendu, ou, ce qui revient au même, de l'être de diverses manières toutes également systématiques? « Fiers de leur « antiquité et de leurs lumières, les Égyptiens auraient-ils « fait un mystère aux Grecs et aux Romains qui venaient « s'instruire chez eux, de ces connaissances sur lesquelles « est censé avoir été fondé leur système métrique, et qui « auraient rehaussé leur gloire? Que de tâtonnemens et de « calculs ils eussent épargnés aux géomètres et aux astro- « nomes qui essayaient de déterminer l'étendue de la cir- « conférence de la terre! »

Dans la suite de cette note, l'auteur expose ses conjec-

tures sur l'antiquité des pyramides, et il la termine par l'indication de quelques époques principales de la chronologie égyptienne coordonnée à son système.

Exercices de calcul intégral, sixième partie, par M. LEGENDRE, 1817.

Les trois premières parties avaient paru ensemble en 1811. L'auteur, deux ans après, y joignit un supplément à la première partie, pour compléter une collection à laquelle il ne songeait encore à donner aucune suite. Les travaux récens de plusieurs géomètres sur les intégrales définies, et de nouveaux moyens qu'il imagina pour perfectionner la théorie exposée dans la seconde partie, l'engagèrent à publier successivement une quatrième, une cinquième, et enfin une sixième partie qui complétera un second volume. Le troisième se composera des méthodes pour la *construction des tables elliptiques.* Ce dernier travail a paru en 1816, mais il reste à former une suite de tables par le moyen desquelles on puisse trouver, sans un calcul trop pénible, la valeur de chacune des deux fonctions F et E, correspondantes à des valeurs données du module et de l'amplitude.

La sixième partie que nous annonçons en ce moment, contient plusieurs applications de la théorie des fonctions elliptiques propre à en faire sentir tous les avantages et à faire voir qu'un nouvel algorithme fondé sur cette théorie, peut servir à étendre les applications du calcul intégral, en soumettant à un calcul régulier et uniforme, semblable à celui des fonctions circulaires et logarithmiques, toutes les formules que les géomètres avaient ramenées jusqu'ici à la

rectification des sections coniques, et une infinité d'autres encore plus composées.

Pour mettre ces avantages dans tout leur jour, l'auteur en fait l'application à deux des problèmes les plus intéressans de la mécanique. Le premier est le mouvement de rotation d'un corps solide qui n'est sollicité par aucune force accélératrice; le second est le mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes.

Les solutions de ces problêmes sont connues depuis long-temps, l'auteur les expose d'une manière nouvelle, en se rapprochant, pour la première, de la méthode donnée par d'Alembert, dans le tome IV de ses opuscules, et pour la seconde, des méthodes données par Euler, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1760, et dans le tome XI des nouveaux commentaires de Pétersbourg. Par ces méthodes, comme par celles de tous les autres géomètres, qui ont traité les mêmes questions, on parvient à réduire la solution aux quadratures. C'était un grand pas dans la carrière de la science, et un beau titre de gloire pour ceux qui, les premiers, ont su obtenir ces réductions; mais le développement ultérieur de la solution, l'énumération et la division des différens cas, la réduction des formules au dernier terme de simplicité dont elles sont susceptibles, enfin la possibilité de déterminer, avec tout le degré d'exactitude qu'on peut desirer, la position du corps et toutes les circonstances du mouvement au bout d'un temps quelconque, sont autant de choses que la simple réduction aux quadratures ne donne point, ou ne donne que d'une manière imparfaite, attendu que les formules, qui s'adaptent assez facilement à la première révolution, n'offrent plus rien de

déterminé, lorsqu'il s'agit d'embrasser, dans un même calcul, un temps quelconque et un nombre indéfini de révolutions; à cet égard l'auteur a donné tous les développemens nécessaires pour ne rien laisser à desirer, et pour faire bien sentir tout le parti qu'on peut tirer, en pareil cas, de l'usage des fonctions elliptiques.

Quoique la seconde section, qui traite du mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes, soit fort étendue, on n'a considéré, outre les cas généraux, que quelques-uns des cas particuliers que le problème renferme, lorsque la courbe décrite est située dans un même plan, et l'on n'a indiqué que très-sommairement les points principaux de la solution, lorsque la courbe décrite est à double courbure; d'ailleurs on a supposé que la courbe ne s'étend pas à l'infini, afin de ne considérer que des mouvemens permanens. La matière aurait été susceptible d'une beaucoup plus grande extension; mais, dans le cadre où l'auteur l'a renfermée, il ose croire que les géomètres trouveront quelques résultats dignes de leur attention, peut-être même des vues nouvelles pour traiter le fameux problême des trois corps, dans d'autres hypothèses que celles qui servent de base aux méthodes ordinaires d'approximation. Cette section est terminée par la détermination du mouvement rectiligne d'un corps attiré vers deux centres fixes; problême qui offre encore une belle application de la théorie des fonctions elliptiques.

La troisième section est une continuation des recherches variées dont on a vu des exemples dans les parties précédentes, et dont quelques-unes se rapportent encore à la théorie des fonctions elliptiques.

Dans l'impossibilité où nous sommes de suivre l'auteur

dans les développemens de son analyse, nous avons à regretter de ne pouvoir transcrire nombre de remarques très-curieuses que nous craindrions de rendre peu intelligibles en les séparant des formules qui les ont fournies, nous indiquerons du moins aux astronomes celle de ces remarques qui se rapporte au mouvement de l'axe de la terre. Il est infiniment probable que l'axe de rotation primitif de la terre n'a pas coïncidé exactement avec un axe principal, ou du moins que les deux axes se sont séparés par quelque variation arrivée à la surface ou dans l'intérieur du globe, il est à présumer que des inégalités ont lieu effectivement dans le mouvement de rotation de la terre. Mais comme elles sont très-peu sensibles, ce n'est que par une longue suite d'observations très-délicates qu'on pourrait s'assurer de leur existence. L'auteur fixe les limites entre lesquelles peut varier la distance du zénith au pôle pour un lieu quelconque, et il en conclut que si, par des observations exactes de la hauteur du pôle dégagées de la réfraction, de l'aberration, et des nutations dues aux causes externes, on trouve que cette hauteur n'est pas constante, ce sera une preuve qu'il y a un mouvement naturel dans l'axe terrestre; mouvement dont la cause est dans la terre même, et qui doit être distingué de la nutation causée par l'action de la lune et des planètes. Par-là peut-être on pourrait expliquer la petite différence que des observateurs exacts ont trouvée entre l'obliquité de l'écliptique déduite des solstices d'hiver, et l'obliquité déduite des solstices d'été. En effet, il paraît que le temps d'une demi-révolution de la terre autour de son axe primitif, doit être de 150 à 160 jours, tandis que l'intervalle entre les solstices est de 182 jours environ.

Histoire de l'astronomie ancienne, tirée des ouvrages encore existans, analysés suivant l'ordre des temps, pour déterminer ce que chaque auteur a pu ajouter aux connaissances de ses devanciers; par M. DELAMBRE. *Deux volumes in-4°; madame veuve Courcier,* 1817.

Un examen attentif de toutes les traditions astronomiques disséminées dans les écrits des Grecs et des Latins ; une analyse raisonnée des livres des Chinois et des Indiens, d'après les traductions et les extraits publiés par les missionnaires et par la société de Calcutta ; les renseignemens certains et nouvellement acquis sur les Arabes, les Persans et les Tartares, tout nous prouve qu'il n'y a qu'une seule astronomie, celle des Grecs, imitée par tous les autres peuples avec plus ou moins de succès, selon la mesure de leurs connaissances géométriques. Ces recherches prouvent encore qu'il n'y a jamais eu, dans ces temps anciens, que deux catalogues d'étoiles réellement observées, et qui l'ont été à 1600 ans d'intervalle; celui d'Hipparque et celui du prince tartare Ulugh Beig.

Ainsi, pour connaître l'origine et les progrès de l'astronomie, il faut étudier les écrits des Grecs et ceux de leurs disciples de tout pays et de tout âge, depuis les temps d'Almamoun jusqu'à ceux de Copernic et de Képler. Mais la plupart de ces livres sont rares : à la difficulté de se les procurer se joint celle de les entendre, non-seulement à cause de la différence des langues, mais aussi parce que la langue mathématique a subi de grands changements; que les mé-

thodes et les démonstrations sont différentes; que les expressions les plus familières autrefois sont tombées en désuétude et devenues presque inintelligibles; que, pour une page qui pourrait être utile, on est obligé de dévorer l'ennui de plusieurs volumes. Lire tous ces ouvrages par ordre, est cependant le seul moyen de connaître sûrement la marche de l'esprit humain, de distinguer les véritables inventeurs, et de rendre à chacun ce qui lui peut appartenir. C'est ce qui se trouve exécuté dans l'ouvrage que nous annonçons. Par-tout on a pris ce qui n'avait pas été dit auparavant. On examine les méthodes, on en montre la filiation, on les compare aux nôtres, on les dégage des longueurs qui les rendent obscures, et l'on en donne des équivalens plus commodes. On transcrit tous les faits et toutes les observations qu'il pourrait être important de calculer de nouveau : on pourrait les discuter sans être forcé de recourir aux originaux; mais par-tout on indique avec soin les sources que chaque lecteur aura la faculté de consulter, quand l'objet en vaudra la peine. L'auteur n'embrasse aucun système; il ne cherche que les faits et que la vérité; il ne nie rien absolument; mais il n'admet comme certain que ce dont il a pu trouver la preuve. S'il forme ou rapporte quelque conjecture, il la donne pour ce qu'elle est, en tâchant de la réduire à sa juste valeur.

Des deux volumes qu'il vient de publier, le premier ne renferme que l'histoire de la science astronomique dans l'antiquité, chez les Chaldéens, les Égyptiens, les Grecs, les Chinois et les Indiens. Les extraits sont proportionnés à l'importance et à l'étendue des ouvrages. On s'est arrêté plus long-temps sur Autolycus, Aratus, Aristarque, Hipparque,

Géminus et Cléomède; sur les annales chinoises, Gaubil, et les recherches asiatiques de la société de Calcutta; sur l'arithmétique indienne de Planude, le *Lilawati* et le *Bija ganita*, productions indiennes du douzième siècle. On a recueilli soigneusement tout ce qui concerne l'astronomie dans Hérodote, Diodore, Diogène-Laërce, Euclide, Archimède, Théodose, Ménélaus, Strabon, Cicéron, Sénèque et Pline; dans Censorinus, Macrobe, Simplicius, Sextus-Empiricus, Martianus-Capella, Cassiodore et Bède. On a rapporté les vers d'Homère, d'Hésiode, de Virgile, d'Horace et de Manilius, d'Ovide, de Lucain et de Claudien.

Le premier volume, qui contient toutes ces notices, et d'autres qu'il serait trop long de citer, n'offre encore que des notions éparses. On a réservé pour le second l'extrait des ouvrages de Ptolémée et de son commentateur Théon, qui seuls pouvaient fournir un traité méthodique et complet de l'astronomie des Grecs. Pour en faciliter l'intelligence, on l'a fait précéder d'un Traité de l'arithmétique des Grecs, de leur trigonométrie rectiligne et sphérique, et de leurs tables des cordes qui leur donnaient, par un travail beaucoup plus long, mais avec la même exactitude, tout ce que nous pouvons tirer de nos tables logarithmiques des sinus et des tangentes. Outre l'idée exacte et fondamentale de la réfraction astronomique, l'optique de Ptolémée offre des expériences curieuses sur la réfraction dans l'eau et dans le verre. Son analemme offre la première idée des sinus et des sinus verses substitués depuis aux cordes avec tant d'avantage par Albategnius. On y trouve un traité complet de la gnomonique des Grecs, que Montucla croyait entièrement perdue. Les cadrans d'Athènes [illegible]nt une application bien curieuse et tou-

jours subsistante de cette théorie à laquelle il ne manquait rien que des moyens d'exécution un peu plus expéditifs. Le traité du planisphère, production originale d'Hipparque, donne la théorie complète du genre de projection que nos géographes emploient encore aujourd'hui dans la construction de leurs cartes.

La véritable histoire de la science ne doit pas être la simple énonciation des découvertes les plus frappantes. Pour intéresser les savans, elle doit leur offrir les théorêmes, les démonstrations, les méthodes et les procédés de calcul. C'est ce qu'on ne trouve dans aucune des nombreuses histoires de l'astronomie que nous possédons en diverses langues. C'est l'avantage qu'on a tâché de donner à la nouvelle histoire qui sera en même temps un traité complet de l'astronomie de tous les âges, qui ne supposera que les connaissances les plus élémentaires de la simple géométrie et de l'arithmétique; en sorte que le lecteur, à mesure qu'il avancera, se trouvera par-tout au niveau de la science du temps dont il étudiera l'histoire.

Les deux volumes de l'astronomie ancienne ne contiennent encore que la science des Grecs, sans aucune addition et sans aucun mélange. Le troisième, qui est sous presse, montrera l'astronomie du moyen âge, depuis les astronomes d'Almamoun, jusqu'à Copernic. Nous n'avions qu'une idée très-imparfaite des travaux des Arabes. Les orientalistes, qui ont perdu tant de temps à traduire les livres d'astrologie, ont presque entièrement négligé les astronomes. L'ouvrage d'Alfragan, purement élémentaire, n'est qu'un extrait fort superficiel de Ptolémée. L'introduction aux tables d'Albategnius est le seul ouvrage important qu'on nous eût fait connaître;

et malgré les défauts nombreux de cette traduction, on y voyait clairement que les Arabes, imitateurs trop scrupuleux des Grecs, en avaient conservé les théories générales; qu'ils avaient seulement un peu perfectionné les instrumens, mieux déterminé l'obliquité de l'écliptique, l'excentricité du soleil, son mouvement moyen et la précession des équinoxes. Mais l'introduction des sinus au lieu des cordes avait changé la face de la trigonométrie, et par conséquent tous les calculs astronomiques. Ce premier pas était d'une grande importance : on a cru long-temps que les Arabes n'avaient pas été plus loin, et que les progrès ultérieurs étaient dus aux astronomes européens du seizième siècle. La traduction de quelques chapitres d'Ebn Jounis, par M. Caussin, nous a fait connaître des observations d'éclipses et des conjonctions de planètes du plus grand intérêt pour la détermination des moyens mouvemens : la traduction des dix-neuf autres chapitres du manuscrit de Leyde, par M. Sédillot, et celle de vingt-huit chapitres inconnus qu'il a retrouvés dans un ouvrage d'Ebn Shatir, nous ont montré d'autres progrès dont nous n'avions aucune idée; un grand nombre de pratiques et de règles qui rapprochent la trigonométrie arabe de celle des modernes; l'emploi des tangentes et des sécantes, comme moyen subsidiaire en certains cas plus compliqués, des artifices de calcul, qui n'ont été imaginés en Europe que vers la première moitié du dix-huitième siècle, voilà ce que M. Sédillot nous a donné, d'après ces derniers chapitres d'Ebn Jounis. Ce n'est pas tout. Il existait un almageste d'Aboulewéfa, astronome de Bagdad qui vivait au dixième siècle. Cet ouvrage se trouvait dans plusieurs bibliothèques; Weidler le cite en passant; il paraît que personne n'avait pris la peine

de le lire. On y trouve les formules des tangentes et des sécantes, des tables de tangentes et de cotangentes pour tout le quart du cercle. L'auteur en fait le même usage qu'on en fait aujourd'hui dans les calculs trigonométriques. Il change les formules des triangles; il en bannit ces expressions composées, si incommodes, où se trouvaient à-la-fois le sinus et le cosinus de l'inconnue; il complète la révolution dont l'auteur était incertain. On en faisait, sans aucun fondement, honneur à Régiomontan, qui n'avait jamais été plus loin, ni même aussi loin qu'Ebn Jounis. Cette révolution a été renouvelée progressivement par Purbach, Régiomontan, Reinhold, et Rhéticus, qui l'a enfin complétée. On n'en a joui en Europe que six cents ans après l'invention première. Animé par ce succès inespéré, M. Sédillot étend ses recherches aux astronomes persans et tartares. Il nous apprend que le catalogue d'Ulughbeig est vraiment original, comme celui d'Hipparque, et que toutes les étoiles en ont été réellement déterminées par des observations nouvelles; que tous les autres catalogues ne sont que des copies de Ptolémée qui avait copié Ménélaus, lequel Ménélaus avait tout pris dans Hipparque. Albategnius et Nassireddin, pour déterminer la précession, s'étaient contentés, comme Ménélaus, d'observer deux ou trois étoiles, et avaient pris les autres dans Ptolémée, en faisant aux longitudes la correction commune qui résultait d'un petit nombre de comparaisons. Le catalogue d'Abderahman-suphi était le seul que l'on crût véritablement original. M. Sédillot nous apprend que cet astronome ne s'est occupé que des alignemens et des grandeurs des étoiles, en sorte que son catalogue n'est rien que celui de Ptolémée, avec l'addition d'une constante qui nous est connue, remarque très-curieuse, en

ce qu'elle nous procure une copie authentique du catalogue de Ptolémée, et par conséquent de celui d'Hipparque, et nous permet de rectifier un nombre considérable de fautes de copie, qui nous étaient presque démontrées, sans que nous eussions les moyens de rétablir les véritables leçons. C'est le service que nous rendra le catalogue d'Abderahman, traduit avec soin par M. Sédillot, et collationné sur trois manuscrits.

Montucla n'avait pas balancé d'affirmer que la gnomonique des Arabes était perdue, ainsi que celle des Grecs; et cependant celle des Grecs était en entier dans l'analemme de Ptolémée, avec la première idée et l'emploi des sinus et des sinus verses. L'ouvrage d'Albategnius prouvait déja que, vers l'an 900 de notre ère, les Arabes n'avaient encore fait aucune addition à la théorie de Ptolémée. M. Sédillot, par sa traduction d'Aboul-Hhasan, nous donne un traité complet et très-détaillé de la gnomonique des Arabes. Le fond de la doctrine est toujours le même, mais avec des additions curieuses et importantes. Aboul-Hhasan est le premier qui ait songé à faire des cadrans pour les heures égales ou équinoxiales, qui ont enfin prévalu sur les heures antiques et inégales. Il place sur ses cadrans la projection du pôle, qui est en même temps le centre et un point commun à toutes les heures; ce qui diminue le travail de plus de moitié. Il décrit une multitude de cadrans sur des surfaces planes, cylindriques, coniques, sphériques, soit concaves, soit convexes. Il décrit une espèce de balance horaire et divers cadrans qui donnent les heures par la longueur des ombres. Vitruve nous avait conservé les noms d'une partie de ces inventions; mais ses descriptions étaient tellement équivoques, qu'on en était réduit à conjec-

turer quels pouvaient être les constructions et les usages. Ces doutes sont levés, autant qu'ils pouvaient l'être, par les descriptions exactes d'Aboul-Hhasan, qui d'ailleurs nous indique des pratiques curieuses évidemment dues aux Arabes, et qui n'étaient utiles qu'aux Musulmans.

Le même auteur avait fait un traité des sections coniques, qui ne nous est pas parvenu ; il nous en reste les méthodes curieuses qu'il en avait déduites pour tracer les arcs des signes, en déterminant d'abord l'axe et le paramètre, et par conséquent l'équation de la section conique. Ces méthodes diminuaient déja le travail de moitié, puisque les deux hyperboles opposées sont toujours égales, et qu'on peut toujours calquer l'une sur l'autre, quand une fois on a déterminé les axes et les sommets de ces courbes. L'auteur ne donne pas la démonstration de ses règles; mais nous nous sommes assurés qu'elles sont rigoureusement exactes, et que, par de simples substitutions algébriques d'une règle à la suivante, on arrive à des formules bien autrement expéditives, que nous donnerons avec leurs démonstrations, et qui suffisent pour décrire tous les arcs des signes sans la moindre connaissance des lignes horaires, excepté la méridienne du plan, sur laquelle se trouvent les axes de toutes les courbes.

Voilà ce qui restait enfoui dans les bibliothèques. Il est vrai que, pour profiter de ces richesses, ou du moins pour concevoir l'idée d'exploiter cette mine, il fallait réunir des connaissances mathématiques à celle des langues orientales; mais cette nécessité était plus apparente que réelle. Il est bien clair que le traducteur d'Albategnius n'entendait rien ni à la géométrie, ni à l'astronomie; il écrit très-mal en latin, et l'on peut douter qu'il fût plus habile en arabe; et ce-

pendant sa traduction a été très-utile. Regiomontan et Halley ont pris la peine de la commenter. Les ouvrages mathématiques ont cet avantage : *Quoquo modo scripta prosunt.* Si la traduction est barbare ou inexacte, la lecture en est plus désagréable et plus difficile; mais, avec un peu de travail, on parvient à corriger le traducteur, et les connaissances se répandent. Il est donc à regretter qu'Ebn-Jounis, Aboul-Wéfa, Aboul-Hhasan, et bien d'autres sans doute, n'aient pas même rencontré leur *Plato Tiburtinus,* au temps où les Arabes occupaient encore une partie de l'Espagne. Ces connaissances nous viennent un peu tard, mais elles nous viennent exprimées avec justesse et clarté par un traducteur capable de les apprécier; et si elles perdent une partie de l'utilité réelle qu'elles auraient eue dans le temps pour l'établissement de l'astronomie en Europe, elles rempliront au moins une grande et importante lacune dans l'histoire des sciences mathématiques.

Tables écliptiques des satellites de Jupiter, d'après la théorie de M. le marquis de Laplace et la totalité des observations faites depuis 1662 *jusqu'à l'an* 1802, *et comparées aux observations plus récentes jusqu'à l'an* 1817, *par M.* DELAMBRE. *Madame veuve Courcier.* 1817.

Ces tables sont imprimées déja depuis plusieurs années. Les changemens faits par M. de Laplace à la masse de Saturne et à la théorie de Jupiter, avaient rendu un peu incertaines les corrections que l'auteur avait tirées de ses équations de condition calculées d'après l'ancienne théorie. On

avait bien cherché à déterminer les effets de ces variations de la théorie sur les élémens des nouvelles tables; mais on pouvait être inquiet de savoir à quel point, après les diverses corrections, elles s'accorderaient avec les phénomènes. Les anciennes tables pouvaient servir jusqu'en 1820; on avait le temps nécessaire pour refaire tous les calculs et les comparer à toutes les observations tant anciennes que postérieures au temps de l'impression, et dont le nombre passe six mille. C'est ce qui a fait ajourner la publication.

L'auteur, dans un discours préliminaire, expose, avec tous les détails nécessaires, la construction et l'usage des tables nouvelles; il en rapporte les erreurs moyennes; il s'applique à donner les renseignemens nécessaires à tous ceux qui seraient tentés de reprendre en entier cette théorie, ou simplement, de continuer les tables qui paraissent aujourd'hui, et qu'on n'a point étendues au-delà de 1840, à cause de la nécessité où l'on est de calculer pour dix jours de chaque année les inégalités du mouvement de Jupiter, qu'il faut ensuite convertir en temps de chacun des satellites.

Ces tables, comme les précédentes, sont calculées en temps moyen; on a rejeté à la fin la table de l'équation du temps, dont il vaut mieux ne faire aucun usage. Dès 1792, l'auteur avait invité tous les astronomes à faire en temps moyen toutes leurs annonces et à publier de même toutes leurs observations. Cet usage commence à se répandre; mais il n'est pas encore universel. Les principales éphémérides l'ont enfin adopté. On a senti qu'une équation de plus, sur-tout si, comme celle du temps, elle est tantôt additive et tantôt soustractive, est une chance de plus pour multiplier des erreurs qui peuvent avoir les inconvéniens les plus graves. Nous n'en

citerons qu'un exemple, et nous le prendrons dans la nouvelle livraison du voyage de M. de Humboldt qui en avait déja fait mention dans la partie astronomique de son voyage.

« Malgré la route fatigante de dix-neuf heures, que nous « avions faite à pied, nous résolûmes d'observer les trois « éclipses de satellites qui devaient avoir lieu consécutive- « ment; je veillai la nuit entière, et cependant je ne vis au- « cune de ces éclipses. J'ai recherché la cause : les occul- « tations étaient calculées en temps moyen, et (par une suite « d'une longue habitude) l'introduction disait qu'elles étaient « en temps vrai. Dans d'autres occasions, pour donner l'an- « nonce en temps vrai, on avait cherché l'équation du temps, « et l'on s'y était trompé de signe. »

On voit combien il est important que l'on convienne d'adopter une même règle, un usage général dont on ne s'écarte jamais. Le choix ne saurait être douteux.

Une autre invitation, que l'auteur adresse à tous les astronomes qui calculent des éphémérides, est celle de ne commencer jamais les calculs d'une nouvelle année sans en avoir soigneusement vérifié les époques, dont les erreurs s'étendraient nécessairement sur les calculs de l'année entière. Les mouvemens annuels consignés dans l'introduction réduisent cette vérification à une simple addition pour chacune des époques. Une autre vérification bien facile encore s'obtiendrait en comparant les intervalles entre les éclipses d'un même satellite pendant les derniers jours de l'année qui finit et les premiers de celle qui commence : les différences ne sont communément que d'un très-petit nombre de secondes. Pour avoir négligé des attentions qui coûtent si peu, on a donné des annonces en erreur de plusieurs minutes, qui ont

fait penser à quelques astronomes que les tables avaient perdu subitement l'exactitude qu'on leur avait reconnue pendant une longue suite d'années. Ces erreurs tenaient à une faute sur l'un des argumens; faute qui avait été reconnue et rectifiée dans l'édition anglaise des premières tables.

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS A L'ACADÉMIE PAR SES CORRESPONDANS ET PAR LES SAVANS ÉTRANGERS.

Méthode nouvelle pour quarrer les courbes et intégrer, entre des limites données, toute fonction différentielle d'une seule variable, par M. Bérard, *principal du Collége de Briançon. Commissaires MM.* Poinsot, *et* Ampère, *rapporteur.*

La conclusion du rapport est qu'il serait à desirer que ce Memoire fût publié, et qu'on fît connaître une méthode qui est susceptible d'applications utiles dans les ouvrages élémentaires.

Méthode nouvelle pour faciliter le calcul des intérêts composés, par M. Mangold. *Commissaires MM.* Ampère, *et* Cauchy, *rapporteur.*

La conclusion est que la publication des tables de M. Mangold pourrait être utile, puisque, en donnant les moyens de simplifier les opérations de ce genre, elles tendent à améliorer le sort des débiteurs.

Planétaires de M. Jambon. *Commissaires MM.* Arago *et* Burckhardt.

Les commissaires pensent que les efforts de M. Jambon méritent des éloges, et que ses planétaires offrent tout ce qu'on peut desirer dans les instrumens de cette espèce. Ils auraient même proposé à l'Académie de leur accorder son approbation, s'ils n'avaient craint qu'on n'en tirât la conséquence que l'Académie approuvait en général l'usage des machines et des modèles dans la pratique de l'enseignement.

Mémoire sur les routes suivies par la lumière dans les phénomènes de la réflexion, par M. Dupin, *correspondant. Commissaires MM.* Ampère, Arago, *et* Cauchy, *rapporteur.*

Dans ce Mémoire, M. Dupin s'attache à découvrir, par des méthodes purement géométriques, les relations qui existent entre les directions des rayons lumineux incidens et réfléchis : il commence par établir le principe suivant :

« Lorsqu'un faisceau de rayons lumineux est réfléchi par une surface quelconque, si les rayons incidens sont tous normaux à une surface unique, ils conservent cette même propriété après un nombre quelconque de réflexions. »

Malus avait démontré une partie de ce théorême, M. Dupin en démontre la totalité; il dit qu'on peut attribuer à une erreur de calcul la restriction que Malus y avait apportée. Le rapporteur a vérifié le calcul de Malus, et n'y a trouvé qu'une erreur de signe, qui doit être une faute d'impression. Le calcul est donc exact; et si Malus n'a pas reconnu le prin-

cipe découvert par M. Dupin, c'est qu'il a omis de faire usage d'une des conditions du problème.

L'auteur du Mémoire discute les propriétés des surfaces qu'il nomme *cyclides*, c'est-à-dire, qui n'ont que des cercles pour lignes de courbure. Toute surface de ce genre peut être engendrée de deux manières, par une surface variable de rayon qui se meut en demeurant constamment tangente à trois sphères fixes, et qui, dans ce mouvement, parcourt un espace dont l'enveloppe est la surface même. Il en résulte qu'une surface cyclide étant donnée, on peut toujours trouver deux systêmes de sphères qui touchent cette surface suivant des cercles. Ces cercles seront les lignes de courbure de la surface. Les centres des sphères de l'un des systêmes se trouveront sur une ellipse; les centres des sphères de l'autre systême se trouveront sur une hyperbole. Cette ellipse et cette hyperbole sont respectivement situées dans deux plans perpendiculaires, et tellement disposées, que les foyers de l'une sont les sommets de l'autre, et réciproquement. C'est encore une observation faite par l'auteur, que si, d'un point pris sur l'ellipse, on mène aux divers points de l'hyperbole des rayons vecteurs, ils formeront un cône droit à base circulaire, et varieront tous en longueur de même quantité, lorsqu'on passera d'un point de l'ellipse à l'autre. C'est en ce sens qu'on peut dire que les différens points de l'ellipse sont autant de foyers de l'hyperbole; et, dans un sens analogue, on doit dire aussi que les différens points de l'hyperbole sont autant de foyers de l'ellipse. Cette propriété des courbes du second degré semble très-intéressante, et il ne paraît pas qu'on l'eût encore observée.

Le rapporteur a été curieux de savoir à quel degré mon-

terait l'équation d'une surface cyclide. Il a trouvé que cette équation était du quatrième degré, et il indique la construction qui peut y conduire.

Après avoir démontré les propriétés des surfaces cyclides, l'auteur en fait l'application à la théorie des surfaces du second degré; il en fait découler plusieurs conséquences curieuses, et une confirmation du principe qu'il avait établi en commençant; il discute les diverses particularités que peut offrir la réflexion d'un faisceau de rayons lumineux autour d'un point donné de la surface d'un miroir de forme quelconque, suivant que la courbe qu'il nomme indicatrice du miroir est une ellipse ou une hyperbole. Enfin il donne le moyen de déterminer, soit par l'analyse, soit par la géométrie, les deux directions suivant lesquelles les rayons réfléchis se rencontrent deux à deux.

Les commissaires pensent que ce nouveau Mémoire de M. Dupin est très-digne de l'approbation de l'Académie, et qu'il mérite d'être inséré dans le recueil des savans étrangers.

Balancier hydraulique de M. Dartigues. *Commissaires MM.* de Prony, Biot, *et* Girard, *rapporteur.*

Après une description de la nouvelle machine, trop longue pour être rapportée ici, et le récit des expériences auxquelles elle a été soumise, les commissaires en font la comparaison avec celle que Joly de Dijon présenta à l'Académie en 1680, avec celle d'Amy approuvée, en 1745, sur le rapport de Bouguer; enfin, avec celle de M. Sarjeant de White-haven, auquel la société pour l'encouragement des arts, accorda

une médaille d'argent en 1801. Leur conclusion est que M. Dartigues, auquel les circonstances permettent de faire exécuter, pour ses usines, le *balancier hydraulique* dont il a conçu l'idée, doit être encouragé à poursuivre ce genre de recherches; que son balancier hydraulique est un perfectionnement de tous ceux qu'on a construits jusqu'à-présent sur les mêmes principes, et qu'il mérite l'approbation de l'Académie.

M. Armand de Maizières, ancien professeur de mathématiques au lycée de Versailles, a conçu l'idée d'une machine pour faire monter l'eau, en pratiquant dans le massif d'une côte qui s'éleverait perpendiculairement sur le bord d'une mer sujette au flux et au reflux, une cavité horizontale cylindrique dans laquelle pourrait glisser de dehors en dedans et du dedans au dehors une espèce de piston. Ce piston, submergé lorsque les vagues s'éleveraient au-dessus de l'orifice du cylindre, serait poussé en dedans par le choc de la vague, et, lors de leur abaissement, il serait ramené par un contre-poids dans sa position primitive. L'air enfermé entre le piston et le fond de la cavité se trouverait, par le mouvement de cette espèce d'obturateur, alternativement comprimé et ramené à la pression ordinaire de l'atmosphère; de sorte qu'en érigeant verticalement, à la partie postérieure du cylindre horizontal, un tuyau de dimensions déterminées qui serait toujours rempli d'eau, l'action de l'air comprimé sur la surface de cette colonne d'eau la ferait jaillir au-dessus de l'orifice supérieur du tuyau qui la contient.

M. de Maizières a cherché à évaluer l'action dynamique du moteur d'après la hauteur, l'amplitude et la durée des ondes;

à déterminer les circonstances du mouvement de l'air comprimé dans le cylindre et celles du mouvement de l'eau dans le tuyau ascendant. Ce calcul présente de grandes difficultés et demanderait à être fondé sur des expériences positives, qui n'ont pu être faites; mais on devra du moins à l'auteur d'avoir appelé le premier sur ce sujet l'attention des mécaniciens. Avantageusement connu depuis long-temps dans la carrière de l'enseignement mathématique, il a donné dans son Mémoire une preuve du zèle avec lequel il se livre à des recherches utiles, et, sous ce rapport, les commissaires ont trouvé qu'il méritait les encouragemens de l'Académie.

Alidographe, instrument dont l'objet est de faciliter l'opération graphique de la levée des plans, et de donner à cette opération le plus haut degré d'exactitude; par M. Saint-Far, *ingénieur en chef des Ponts-et-Chaussées. Commisssaires MM.* Delambre, *et* Girard, *rapporteur.*

Les commissaires, adoptant les conclusions du rapport fait à l'Institut en 1800, ont dit que les additions faites par M. Saint-Far à son instrument, depuis cette époque, lui ont donné un nouveau degré de précision, et le rendent plus propre que les planchettes ordinaires à lever avec exactitude les plans topographiques et de détail; mais, en même temps, ils ont témoigné la crainte que le prix auquel cet instrument s'élevera, lorsqu'on voudra lui donner le degré de précision que l'auteur est parvenu à donner au modèle qu'il a mis sous les yeux de l'Académie, n'en restreigne nécessairement les

usages. L'auteur annonce que le prix n'aura rien d'effrayant pour aucun de ceux qui auront occasion de se servir de son instrument.

Hydrobascule de M. Capron. *Commissaires MM.* de Prony, Girard, *et* Cauchy, *rapporteur.*

Le but de l'auteur, dans la construction de cette machine, a été d'éviter la perte d'eau qu'occasionne le passage des bateaux par les écluses des canaux. Il y parvient en doublant le sas d'une écluse, et en plaçant dans la moitié de ce sas un flotteur que l'on fait monter et descendre à l'aide d'un levier et d'un treuil, et qui, déplaçant de cette manière un volume d'eau plus ou moins considérable, élève ou abaisse l'eau du sas au niveau du bief supérieur ou inférieur. Ce flotteur, dont la capacité renferme une certaine quantité d'eau, est tenu en équilibre, à peu de chose près, sur l'arête supérieure de l'un des bajoyers, par le moyen d'un bassin attenant au flotteur, et dans lequel cette eau se déverse à mesure que le flotteur s'élève. Les commissaires rappellent à ce sujet, que, le 17 août 1807, M. de Bétancourt a présenté à l'Institut un projet d'écluse à flotteur, et que le même projet avait été conçu, à-peu-près dans le même temps, en Angleterre, par M. Huddleston; que ce dernier, dont la patente est du 30 septembre 1800, a sur M. de Bétancourt l'avantage de l'avoir publié le premier. Ils font remarquer aussi que, dès le mois de janvier 1805, M. Capron avait présenté sa machine à l'Institut, dans un temps où l'on ne connaissait encore, en France, ni le travail de l'ingénieur espagnol, ni celui de l'ingénieur anglais. M. Capron a fait voir aux com-

missaires un modèle dont la manœuvre s'effectue d'une manière satisfaisante. Ils pensent toutefois que le projet n'est applicable qu'à des canaux de petites dimensions, et que, restreint à cet usage, il mérite les éloges de l'Académie.

Moyen pour arrêter les incendies dans les salles de spectacle, par M. Tréchard. *Commissaires MM.* de Prony, *et* Girard, *rapporteur.*

Les commissaires ont pensé qu'il manquait au Mémoire de M. Tréchard des détails de construction qui les auraient mis à portée de donner un avis motivé. Le projet, tel qu'il est présenté, se réduit au simple exposé de quelques idées; mais ces idées ont la sûreté publique pour objet, et par cela seul, le travail de M. Tréchard leur a paru mériter d'être encouragé.

Théorie du tracé des routes dans les déblais et remblais, par M. Ch. Dupin, *correspondant. Commissaires MM.* de Prony, *et* Girard, *rapporteur.*

Ce Mémoire fait suite aux *Développemens de Géométrie* du même auteur. C'est en géomètre principalement qu'il a traité les différens cas que présente le problême général : malheureusement, il arrive le plus souvent que les circonstances déterminent les routes à suivre de manière à ôter à la géométrie tout moyen de s'emparer de la question. Des recherches purement géométriques sur de semblables objets n'en doivent pas moins être encouragées. Elles ont le grand avantage d'éclairer la marche de la pratique; et, montrant

la perfection absolue comme une limite à laquelle il serait à desirer que l'on pût atteindre, elles servent du moins à prévenir de trop grands écarts.

Placé depuis long-temps au nombre des élèves les plus distingués d'une célèbre école, M. Dupin réunit aux connaissances le zèle et l'activité nécessaires pour concourir rapidement aux progrès des sciences qu'il cultive. En considérant son nouveau travail comme une suite d'*exercices de Géométrie* du même ordre que ceux qu'il a déja publiés, les commissaires pensent que cette suite mérite également l'approbation de l'Académie.

Rapport sur les papiers laissés par M. Lagrange, et mis en 1815 *à la disposition de l'Académie.*

Le gouvernement, sur la proposition du ministre de l'intérieur, acquit les papiers laissés par M. Lagrange, pour les transmettre à cette classe qui nous a chargés de les examiner, de les mettre en ordre, et de faire choix de ceux qui seraient en état d'être livrés à l'impression. Dans sa première séance, tenue le 5 juin 1815, la commission arrêta que le chef du secrétariat releverait les titres de tous ces papiers, qu'il en formerait une liste, que les pages en seraient comptées, et qu'ils seraient paraphés par tous les membres; ce qui fut exécuté dans les séances suivantes, où l'on eut soin de prendre les précautions nécessaires pour assurer la conservation de ces papiers. Il a été décidé ensuite que tous seraient successivement examinés par chacun des membres; et, pour procéder à cette revue, ils se partageaient à chaque séance un certain nombre de pièces enregistrées dans le

procès-verbal sous le nom de celui à qui elles étaient remises, et qui en rendait compte dans les séances suivantes, très-souvent par écrit.

Persuadés que le respect dû à la mémoire de M. Lagrange ne permettait pas qu'on livrât à l'impression des écrits trop inférieurs à ceux qui avaient paru de son vivant, les commissaires ont apporté la plus grande sévérité dans leur examen, et n'ont trouvé en état de paraître que des pièces assez peu importantes par leur objet, et en trop petit nombre pour composer un volume. Mais, afin de recueillir de nouvelles lumières sur ce sujet, ils ont prié leur confrère M. Maurice, qui avait été dans une liaison particulière avec M. Lagrange, de vouloir bien examiner aussi ce choix de pièces. Il a pensé, comme eux, que les plus considérables seraient bien placées dans les additions à la Connaissance des temps et dans les Mémoires de l'Académie. Deux notes très-courtes, dont le sujet indiquait clairement la place, ont été imprimées; la première, concernant la détermination de l'orbite des comètes, a été mise à la fin du IIe volume de la Mécanique analytique (2e édition), et l'autre, contenant la rectification d'un passage de la seconde édition du Traité de la résolution des équations numériques, vient d'être ajouté à la fin de cet ouvrage.

Le reste des papiers de M. Lagrange ne se compose que de manuscrits, de mémoires déja imprimés, d'essais auxquels l'auteur n'a pas cru devoir s'arrêter, et même souvent de calculs sans discours, dont il n'a pas toujours été possible de deviner le sujet, ou enfin de notes que faisait M. Lagrange sur ses lectures : car, ce qui est bien remarquable, et doit servir d'exemple aux jeunes géomètres, cet homme consommé

ne négligeait aucune production mathématique tant soit peu importante, et l'étudiait la plume à la main, afin de s'en mieux rendre compte.

On savait que M. Lagrange avait entrepris autrefois un travail considérable sur le mouvement des projectiles dans les milieux résistans et sur la force de la poudre, et on a trouvé en effet des matériaux assez nombreux sur ce sujet, mais incomplets, détachés, et demandant une entière rédaction. M. de Prony a été chargé d'en tirer les résultats les plus remarquables, et sur lesquels il fera un rapport particulier.

Cependant, si dans tous les papiers de M. Lagrange il s'en est trouvé si peu qui fussent susceptibles de publication, leur ensemble ne sera pas sans intérêt pour celui qui voudra connaître le progrès des idées de cet illustre géomètre dans quelques-unes de ses recherches : joints aux manuscrits des ouvrages qui font époque, tels que la mécanique analytique, ces papiers forment une collection que l'Académie doit être flattée de posséder comme l'héritage d'un membre dont le nom a décoré sa liste pendant plus de quarante ans, et qui devint, pour ainsi dire, une richesse nationale quand il se fixa parmi nous.

La commission pense donc que ceux de ses papiers qui ne sont pas destinés à l'impression, composés en grande partie de feuilles détachées, doivent, après avoir été classés avec soin, être reliés en volumes, afin qu'on puisse les consulter au besoin sans altérer leur ordre ou nuire à leur conservation, et qu'alors le dépôt en soit fait à la bibliothèque pour notre usage et celui des savans étrangers qui voudraient en prendre connaissance.

Avec les écrits de M. Lagrange, étaient aussi quelques mé-

moires d'Euler, mais déja imprimés ou refondus dans ses ouvrages, quelques-unes de ses lettres, et toutes celles que M. Lagrange avait reçues de d'Alembert, qui renferment quelques particularités curieuses, mais où les mêmes sujets reviennent trop souvent et ont trop perdu de leur importance pour qu'on puisse les publier autrement que par extraits. Ce ne pourrait être alors que dans quelque écrit concernant l'histoire des mathématiques, ou l'histoire littéraire du dix-huitième siècle, et là figurerait bien le discours très-concis et très-modeste prononcé par M. Lagrange à l'académie de Berlin, lorsqu'il y fut admis.

Rapport sur la proposition de fonder un prix annuel de Statistique.

Un des membres de l'Académie a communiqué la proposition faite par un anonyme, d'établir à ses frais un prix annuel destiné aux recherches statistiques. Le sujet de ces recherches serait indiqué dans un programme public. L'Académie prendrait connaissance des ouvrages imprimés ou manuscrits qui lui seraient adressés chaque année, et dans lesquels une ou plusieurs des questions énoncées au programme auraient été traitées. Elle décernerait à celui de ces ouvrages qui lui paraîtrait contenir les résultats les plus utiles, une médaille équivalente à la somme d'environ 500 fr., revenu annuel du capital qui est offert. L'examen de cette proposition a été renvoyé à une commission qui présente le rapport suivant:

La statistique, cultivée et enseignée publiquement dans plusieurs états du nord de l'Europe, a fait pendant le der-

nier siècle des progrès remarquables. Cette science emprunte ses élémens des branches les plus diverses de nos connaissances; son objet est très-étendu; il consiste sur-tout à recueillir et à exposer avec ordre les faits qui intéressent immédiatement l'économie publique. Le desir d'encourager une étude aussi utile, et de la ramener autant qu'il est possible à des principes constans, ne peut qu'être approuvé et partagé par l'Académie des Sciences. Les connaissances de ce genre ont été regardées comme importantes et même comme nécessaires par tous les gouvernemens éclairés. Elles prirent en France plus d'essor, à l'époque même où l'Académie des Sciences fut fondée; c'est-à-dire sous le ministère de Colbert, dont le nom associé à tant de monumens utiles rappelle les progrès des sciences, le développement de tous les arts, et un accroissement prodigieux de la fortune publique.

Il est évident qu'il y a plusieurs institutions civiles dont on ne peut prévoir ou reconnaître l'influence qu'en consultant des Mémoires statistiques rédigés avec soin, qui contiennent un grand nombre de faits positifs, et déterminent les élémens principaux de la population, de la force de l'état, de ses richesses agricoles ou commerciales.

Ces mêmes ouvrages, qui ne sont autre chose que des collections méthodiques de faits nombreux et variés, servent encore à apprécier les avantages qu'on peut attendre des inventions dans les arts physiques. Ainsi la machine nouvelle qui a été présentée récemment à l'Académie pour le sérançage du lin et du chanvre, exciterait l'attention, sous le seul rapport mécanique, par la manière ingénieuse dont elle est composée; mais combien elle acquiert plus de prix, et combien

il paraît desirable qu'on en puisse propager la connaissance et l'emploi, lorsqu'on connaît l'immense produit de cette branche de l'industrie française!

On pourrait encore rappeler les procédés nouveaux qui, vers le commencement de ce siècle, ont perfectionné si rapidement l'art de la distillation dans nos départemens méridionaux. On sait que la découverte de ces procédés est due à des recherches théoriques; mais on ne se forme une idée exacte de l'importance d'une telle application, qu'après avoir évalué les avantages que l'on retire de ce commerce. Il serait inutile de multiplier ces citations. On ne peut douter qu'il n'y ait une relation continuelle entre les études qui ont pour objet de découvrir ou de fixer les principes des sciences, et les ouvrages qui font connaître l'état de la société civile.

En offrant d'établir à perpétuité un prix qui serait décerné par l'Académie, le fondateur a eu le dessein de donner à des travaux extrêmement variés une direction commune. Rien ne lui a paru plus propre à ramener cette science au but vraiment utile qu'elle doit se proposer, et à la prémunir contre l'esprit de dissertation et de conjectures, que l'influence durable de ceux à qui leurs occupations habituelles montrent chaque jour tout le prix des connaissances positives.

On a découvert en effet, par des observations réitérées, quelques principes constans qui peuvent servir dans un grand nombre de cas à comparer entre eux, et même à vérifier les résultats des recherches statistiques. On peut aussi déterminer exactement le nombre des observations nécessaires pour procurer un degré suffisant de certitude. Tous les faits

ne sont pas également importans, et plusieurs ont une dépendance mutuelle. Les résultats si divers des établissemens de la société ont, pour ainsi dire, comme les objets naturels, des caractères propres qu'il est nécessaire de discerner et d'observer assidûment. On doit donc s'efforcer d'appeler l'attention sur ces élémens principaux, et ne point porter à l'excès l'énumération des faits particuliers; étude infructueuse de détails minutieux et innombrables qu'il est inutile de connaître, qu'il est impossible de recueillir.

Parmi les recherches statistiques il y en a plusieurs que le gouvernement seul peut ordonner; il y en a aussi de fort importantes qui peuvent être entreprises par les particuliers. Ceux qui se consacrent avec persévérance à une étude aussi précieuse trouveront les autorités publiques disposées à favoriser leurs travaux. Quant à l'Académie, tous ses vœux sont remplis dès qu'on lui offre de nouveaux moyens d'encourager des travaux utiles. Elle aura toujours pour premier objet de seconder les vues du gouvernement, en se conformant au plan général qu'il aura tracé.

Les motifs que l'on vient d'énoncer ont déterminé votre commission à opiner unanimement pour que la donation fût acceptée. Cette proposition lui paraît le fruit d'une pensée judicieuse et libérale, qui peut recevoir par la suite les plus heureuses applications. Les actions honorables que le sentiment du bien public inspire, ont le propre d'être doublement utiles. Elles le sont par l'avantage immédiat qu'elles procurent; elles le sont aussi par l'influence et l'autorité de l'exemple. Ces germes précieux, que le temps conserve et développe croissent peu-à-peu pour la gloire et la prospérité des nations.

La seule question que l'on ait dû examiner dans ce rapport, est celle qui concerne la fondation du prix proposé. Quant à la rédaction du programme, elle deviendra l'objet d'un travail spécial, après que la donation aura été acceptée. Dans ce cas, l'Académie nommerait une commission chargée de lui soumettre un projet conforme aux intentions du fondateur.

L'Académie, comme tous les établissemens publics, ne peut acquérir, aliéner, transiger ou accepter qu'après avoir obtenu du gouvernement une autorisation expresse. Si l'autorisation est accordée, elle s'étendra nécessairement à l'objet spécial de la donation. On sera donc assuré que la proposition a été jugée utile et propre à seconder les desseins de l'administration publique.

Il sera procédé immédiatement après au placement du capital qui a été offert. L'auteur du Mémoire couronné recevra une médaille d'or équivalente au revenu annuel de cette somme; il verra dans ce gage authentique du suffrage de l'Académie l'intention d'honorer les services rendus aux sciences. C'est ce dernier motif qui donne toute sa valeur à la récompense décernée.

Les conclusions que la commission propose sont : 1° que l'Académie témoignera à S. E. le ministre de l'intérieur, qu'elle a l'intention d'accepter la somme qui lui est proposée; qu'en conséquence, elle sollicite de sa majesté d'employer cette somme à l'acquisition d'une rente perpétuelle sur l'état pour la fondation d'un prix annuel de statistique;

2° Que l'Académie s'empresse d'offrir au fondateur ses justes remerciemens; qu'elle regrette qu'il veuille dérober

son nom à la reconnaissance publique, et qu'elle s'efforcera de remplir les vues respectables qui l'ont animé;

3° Qu'il sera délibéré ultérieurement sur la rédaction et publication d'un programme qui fera connaître en détail l'objet et les conditions du concours.

Rapport de la Commission chargée de proposer un Programme pour le concours du prix de Statistique, séance du 5 *janvier* 1818.

Il a été donné connaissance à l'Académie, dans sa séance du 1[er] septembre 1817, d'une proposition qui avait pour objet de fonder un prix annuel de statistique. Une commission a été chargée d'examiner cette proposition, et l'Académie, sur le rapport qui lui en a été fait dans sa séance du 8 septembre suivant, a pris une délibération pour témoigner au gouvernement son intention d'accepter la somme qui était offerte, et de l'employer en rente perpétuelle sur l'état pour la fondation du prix proposé.

Cette délibération a été adressée à S. E. le ministre de l'intérieur, et l'Académie a reçu l'ordonnance royale qui autorise l'acceptation et l'emploi de la somme proposée.

L'art. III de cette ordonnance porte : *Le programme du concours sera rédigé et publié par l'Académie, et le jugement sera prononcé par elle dans la forme déterminée pour les prix de la même nature déja précédemment institués.*

En conséquence, l'Académie a nommé une commission chargée de présenter un projet de programme.

Si les principes que l'on doit suivre dans les recherches statistiques étaient fixés depuis long-temps; si la science qui

dirige ces recherches était enseignée publiquement en France comme elle l'est dans plusieurs états du nord de l'Europe, l'Académie se bornerait à faire connaître qu'elle décernera un prix au meilleur ouvrage de statistique publié dans le cours de chaque année. Mais l'objet et les élémens de cette science ne sont point assez connus. Il était donc nécessaire de la définir avec beaucoup de précision, d'énoncer distinctement ses règles principales, et d'assigner les limites qui la séparent de plusieurs autres sciences. C'est le but que votre commission s'est proposé en rédigeant le projet suivant. Elle espère que ce projet, amélioré par la discussion à laquelle il sera soumis dans cette séance, pourra satisfaire aux vues du donateur et aux desseins du gouvernement, en contribuant aux progrès des connaissances utiles.

La commission, en présentant ce projet, croit devoir proposer aussi de publier, avec le programme, l'extrait du premier rapport qui vous a été fait à ce sujet, et la délibération qui en a été la suite. Ces pièces offrent un juste témoignage des sentimens de l'Académie pour les bienfaiteurs des sciences; elles contribueront aussi à développer les principes énoncés dans le programme; elles en rendront l'exposition plus claire et plus complète.

Programme du prix de Satistique proposé par l'Académie royale des Sciences, pour l'année 1818.

Une ordonnance du roi, rendue le 22 octobre 1817, autorise la fondation d'un prix de statistique qui sera proposé et décerné par l'Académie des Sciences.

Parmi les ouvrages publiés chaque année, et qui auront

pour objet une ou plusieurs questions relatives à la statistique de la France, celui qui, au jugement de l'Académie, contiendra les recherches les plus utiles, sera couronné dans la première séance publique de l'année suivante. On considère comme admis à ce concours les Mémoires envoyés en manuscrit, et ceux qui auraient été imprimés et publiés dans le cours de l'année. Sont seuls exceptés les ouvrages imprimés ou manuscrits des membres résidens de l'Académie.

Afin que les recherches puissent s'étendre à un plus grand nombre d'objets, il a paru d'abord préférable de ne point indiquer une question spéciale, en laissant aux auteurs mêmes le choix du sujet, pourvu que ce sujet appartienne à la statistique proprement dite, c'est-à-dire qu'il contribue à faire connaître exactement le territoire ou la population, ou les richesses agricoles et industrielles du royaume ou des colonies.

Les remarques suivantes pourront servir à diriger les auteurs vers le but que l'on s'est proposé en fondant un prix annuel de statistique.

Cette science a pour objet de rassembler et de présenter avec ordre les faits qui concernent directement l'économie civile. Elle observe et décrit les propriétés du climat, la configuration du territoire, son étendue, ses divisions naturelles ou politiques, la nature du sol, la direction et l'usage des eaux.

Elle énumère la population, et en distingue les différentes parties sous les rapports du sexe, de l'âge, de l'état de mariage, et de la condition ou profession;

Elle montre l'état et les progrès de l'agriculture, ceux de

l'industrie et du commerce, et en fait connaître les procédés, les établissemens, et les produits;

Elle indique l'état des routes, des canaux et des ports;

Les résultats de l'administration des secours publics;

Les établissemens destinés à l'instruction;

Les monumens de l'histoire et des arts.

Ainsi le but de ses recherches est de reconnaître et de constater les effets généraux des institutions civiles, et tous les élémens de la puissance respective et de la richesse des nations.

La statistique est donc une science de faits : elle est formée d'un grand nombre de résultats positifs fidèlement représentés ; elle multiplie les observations, les détails utiles, les évaluations et les mesures ; elle exige une instruction variée, et plusieurs sciences l'éclairent et la dirigent; mais elle leur emprunte seulement des principes généraux que l'expérience et l'étude ont fixés depuis long-temps.

Elle diffère beaucoup de la science de l'économie politique, qui examine et compare les effets des institutions, et recherche les causes principales de la richesse et de la prospérité des peuples. Ces considérations, qui exigent des lumières si rares, ne peuvent être fondées que sur l'examen attentif de tous les faits; mais elles ne sont point le premier objet de la statistique qui exclut presque toujours les discussions et les conjectures.

L'arithmétique politique, c'est-à-dire l'application de l'analyse mathématique à un certain ordre de faits civils, doit aussi être distinguée de la statistique. Cette analyse dirige utilement les recherches sur la population et sur d'autres ob-

jets qui intéressent l'économie publique. Elle indique dans ces recherches les élémens qu'il importe le plus d'observer, leur dépendance réciproque, et le nombre des observations nécessaires pour acquérir un degré donné de certitude; elle détermine la durée moyenne de la vie, celle des mariages ou associations, le nombre d'hommes d'un âge donné, le rapport de la population totale au nombre moyen des naissances annuelles. La statistique admet ces divers résultats sans les envisager sous le point de vue théorique. Elle emploie sur-tout ceux que l'on peut regarder comme évidens par eux-mêmes, ou dont la connaissance est devenue facile à acquérir.

Les richesses d'un état, sa population, les usages publics, les arts, enfin presque tous les objets que la statistique considère, et qu'elle décrit à une certaine époque, peuvent subir des changemens très-sensibles dans l'intervalle de quelques années, en sorte qu'il paraîtrait nécessaire de renouveler sans cesse les premières recherches; mais on doit faire à ce sujet une remarque importante : la plupart de ces élémens variables conservent entre eux une relation que l'expérience a fait connaître, et qui subsiste toujours, ou du moins pendant un laps de temps considérable. On est parvenu à distinguer dans plusieurs cas ceux des élémens qu'il suffit d'observer chaque année pour déterminer les autres avec une approximation suffisante. Cette remarque est très-générale, et constitue un des principes de la statistique. Elle sert à vérifier les résultats; elle dispense de renouveler fréquemment les recensemens généraux, les énumérations, les descriptions complètes, et perpétue en quelque sorte l'utilité de ces premiers travaux.

Les mesures géodésiques, les observations relatives aux températures et à l'état de l'atmosphère, aux maladies communes, à la salubrité de l'air, des alimens et des eaux, l'exposition des procédés des arts, les descriptions minéralogiques appartiennent sans doute à la statistique; elles en sont même des élémens précieux : mais cette science n'a point pour but de perfectionner les théories; elle en considère seulement l'application immédiate et générale à l'état présent de la société.

Si parmi les ouvrages de statistique, il y en a dont on ne doit attendre aucun avantage, ce sont ceux dont les auteurs, embrassant d'avance une opinion fixe sur une des questions d'économie politique, sembleraient moins occupés d'énumérer tous les faits, que de choisir et de faire remarquer ceux qu'ils jugeraient favorables à leurs sentimens.

On pourrait, au contraire, parmi les ouvrages regardés à juste titre comme les plus utiles, désigner ceux qui auraient pour objet :

La description d'une des principales branches de l'industrie française, et l'estimation détaillée de ses produits.

La description des cours d'eaux, et de leur usage dans une portion notable du territoire de la France.

Le tableau de l'industrie de la capitale, recherche importante qui se compose d'une multitude d'élémens divers très-difficiles à rassembler.

Le plan topographique d'une grande ville, joint à des mémoires assez étendus sur la population, le commerce, la navigation et les établissemens maritimes.

Les descriptions statistiques des départemens, ou des annuaires rédigés d'après les instructions générales qui ont été

publiées en France, et que S. E. le ministre de l'intérieur a renouvelées.

L'indication des substances qui forment la nourriture des habitans des campagnes dans plusieurs départemens, et le tableau des proportions selon lesquelles ces mêmes substances sont employées comme alimens.

Une suite d'observations sur les transports effectués par terre, qui serve à comparer l'importance respective des communications.

L'état des richesses minéralogiques de la France, celui de la navigation intérieure.

Enfin divers mémoires de ce genre, ayant un objet spécial exactement défini et relatif à l'économie publique.

On regarderait comme préférables ceux de ces mémoires qui, à conditions égales, s'appliqueraient à une grande partie du territoire, ou à des branches importantes de l'agriculture ou du commerce; ceux qui donneraient la connaissance complète d'un objet déterminé, et contiendraient surtout la plus grande quantité possible de résultats numériques et positifs.

En effet, il est assez facile de substituer à ces énumérations des aperçus généraux, des dissertations ou des vues sur tous les objets qui intéressent l'administration de l'état; mais ce qui demande beaucoup de sagacité et de soin, ce qui est vraiment digne de l'attention, et nous dirons même, de la reconnaissance publique, c'est de discerner les faits importans, d'en former une collection nombreuse et variée, d'assigner les quantités, les valeurs, l'étendue, de soumettre à des mesures tout ce qui peut en être l'objet, de multiplier les renseignemens exacts et les observations. Ce sont les tra-

vaux de ce genre qui éclairent les sciences économiques, préparent les projets utiles et les grandes entreprises, inspirent l'homme d'état, réunissent et présentent sans cesse à la science de l'administration, à l'histoire, les élémens si divers dont se compose la longue expérience des sociétés humaines.

Les réflexions précédentes pourraient être plus développées; mais elles suffisent pour l'objet que l'on a dû se proposer ici, qui est d'énoncer les règles générales. L'Académie des Sciences aura satisfait aux intentions du gouvernement, à celles du fondateur; ses vœux seront accomplis, si elle a pu, dès l'origine de cette nouvelle fondation, exposer les vrais principes de la science qui en est l'objet, et en propager la connaissance, inspirer de plus en plus le goût des études positives, et diriger vers un but commun des recherches consacrées à l'utilité publique.

NOTICE

SUR LA VIE ET LES OUVRAGES DE M. ROCHON,

PAR M. LE CH^{er} DELAMBRE, SECRÉTAIRE-PERPÉTUEL.

Lue dans la séance publique de l'Académie royale des Sciences, le 16 mars 1818.

L'ACADÉMIE a perdu dans la même semaine deux de ses membres les plus anciens, qu'elle s'était associés dans une même année, qui sont entrés le même jour à la classe des sciences physiques et mathématiques de l'Institut, et qui vont dans une même séance recevoir le tribut funèbre qu'elle se fait un devoir de payer à la mémoire des membres qu'elle a perdus.

Tous deux ont porté long-temps le titre d'*astronome de la marine ;* tous deux ont justifié ce titre par les travaux d'une longue vie, et par l'emploi des talens divers que la nature leur avait départis : leurs travaux ont été aussi différens que leurs caractères.

L'un (M. Rochon), d'un esprit plus hardi, plus entreprenant, a cherché à se rendre utile par des voyages longs et périlleux, que les circonstances ont souvent contrariés. Rendu malgré lui à une vie plus tranquille, il a repris avec la même activité des recherches, pour la perfection de l'op-

tique, qui lui avaient dès son début mérité les éloges de l'Académie et le titre de correspondant.

L'autre (M. Messier), d'une disposition moins inquiète et plus sédentaire, a mis la même persévérance à suivre, dans son observatoire, le cours de tous les astres, à noter les circonstances des phénomènes qui pouvaient servir à l'amélioration des théories et des tables astronomiques, et sur-tout à fournir aux navigateurs les observations correspondantes à celles qu'ils auraient pu obtenir dans leurs voyages; enfin à faire l'usage le plus continu et le plus avantageux de ces instrumens d'optique, que son confrère travaillait de tout son pouvoir à perfectionner.

Alexis-Marie Rochon, membre de la Légion-d'honneur, était né au château de Brest, le 21 février 1741. Issu d'une très-ancienne maison, passionné pour les sciences et les arts, à ce double titre il obtint facilement la protection constante d'une famille illustre, qui lui fit conférer un de ces bénéfices qu'on appelait *simples*, parce qu'ils n'obligeaient à aucune résidence, à aucun travail, et qu'ils laissaient au titulaire la libre disposition de tout son temps et d'un revenu assez considérable. L'église a toujours approuvé cette façon de disposer de ces bénéfices en faveur de quelques hommes recommandables par leur savoir et leurs ouvrages. Rochon, autant que personne, justifia cet usage, par l'emploi qu'il fit de tout son temps en recherches utiles, et d'une grande partie de son revenu en essais dispendieux, sans lesquels on ne peut guère prétendre à perfectionner un art tel que l'optique.

Quoique attaché à l'état ecclésiastique, jamais il ne s'était lié par aucun vœu. Sa passion pour l'étude, et sur-tout pour les voyages, l'avait toujours éloigné de tout engagement. *Né*

dans le port principal du royaume, nous a-t-il dit lui-même, *il y prit pour les voyages un goût que nul obstacle ne put surmonter; quelques connaissances mathématiques, acquises pour ainsi dire à la dérobée, dans des institutions* qui avaient un but bien différent, *lui inspirèrent le vif desir de se livrer à l'étude de la science navale; et pour connaître non-seulement la théorie, mais encore la pratique de l'art du navigateur,* il fit les trois voyages dont il a écrit l'histoire.

Le premier est celui de Maroc, entrepris en 1757 pour conduire un ambassadeur; Rochon saisit cette occasion pour essayer son moyen d'observer les satellites, nonobstant les mouvemens du vaisseau. Un moyen à-peu-près semblable avait été proposé huit ans auparavant par Jrwin, officier de marine irlandais. L'idée était même bien plus ancienne, car, dès l'an 1557, Jacques Besson, pour faciliter aux marins l'usage de son cosmolabe, avait imaginé une chaise suspendue, à la manière de Cardan; et dans l'une des planches de son livre, il s'était fait représenter, assis sur sa chaise, à la poupe d'un vaisseau, et dirigeant son instrument vers le ciel. La construction d'Jrwin était plus soignée; on en fit plusieurs essais dont on fut peu satisfait. Dans un voyage à la Barbade, en 1763, Maskelyne nous dit que plusieurs fois il s'était servi de la chaise d'Jrwin pour tenter l'observation des satellites, et il avoue n'en avoir tiré aucune utilité. En 1771, les astronomes de la Flore essayèrent une nouvelle chaise imaginée par Fyot; mais ils trouvèrent toujours que l'observation y était plus difficile que sur le pont du vaisseau.

Rochon ne connaissait probablement aucun de ces essais, lorsque, dans un Mémoire lu à l'Académie, et, long-temps après, dans l'histoire de ses voyages, il reproduisit l'idée de

sa chaise suspendue. Ce fut le 11 avril 1767 qu'il en fit le premier essai, et il nous assure avoir ainsi trouvé sa longitude à un tiers de degré près. Quoique ce résultat n'eût rien de bien incroyable, nous sommes forcés d'avouer qu'il trouva des incrédules. Mais l'auteur, que rien ne pouvait décourager quand il s'agissait d'une expérience importante, n'a pas laissé de renouveler plusieurs fois ses tentatives, avec des succès dont il ne paraît pas mécontent; et s'il finit par abandonner cette idée, c'est qu'il a reconnu que la méthode des distances lunaires offre beaucoup plus de certitude, par des moyens incomparablement plus commodes. Comme il ne cherchait véritablement que les progrès de la navigation, jamais il ne fit la moindre difficulté de renoncer à des idées qu'il croyait siennes, quand, par des comparaisons souvent répétées, il était parvenu à se convaincre que ses inventions, quoique bonnes en elles-mêmes, se trouvaient cependant très-inférieures à celles qui avaient reçu l'assentiment unanime des navigateurs.

Dans le second voyage, nous voyons qu'arrivé à Madagascar, il y observe un abaissement subit et extraordinaire du baromètre, qui lui fait craindre un ouragan prochain. Le mercure avait descendu de 25 lignes. Il communique sa prédiction aux autorités. Le capitaine du port est mandé pour aviser aux précautions convenables; mais il se rit des craintes de l'académicien, dit qu'on peut s'en rapporter à ses connaissances locales, et ne prend aucune précaution. Une heure après le coucher du soleil, l'ouragan commence et cause les dégâts les plus affreux pendant dix-huit heures. A quelque temps de là, nouvel abaissement, mais moins considérable : cette fois Rochon est écouté, on prend des précautions : les effets furent

bien moins terribles; il est vrai que l'ouragan était beaucoup moindre.

Un des principaux objets du voyage avait été de reconnaître la position de plusieurs écueils, bancs et autres dangers, qui rendaient presque impraticable la route la plus directe qui puisse conduire aux Indes. Rochon détermine astronomiquement la position de l'île de Séchelles; il emploie deux mois à ce travail. Il marque de même, mais par des moyens plus expéditifs, trois autres points non moins dangereux. Des circonstances étrangères ne lui permirent pas d'achever ce travail important, qu'il ne put réellement qu'ébaucher. Dans le loisir auquel il se vit forcé, il rassembla du moins des notions précieuses sur le sol de l'île de Madagascar, ses productions, son histoire et ses principaux établissemens.

Dans la route, ses observations astronomiques lui font apercevoir une faute palpable commise par le capitaine, bon marin, mais un peu trop plein de lui-même, et d'une vivacité telle, que, malgré le danger imminent, personne n'ose lui adresser la moindre représentation. Rochon se dévoue, et, pour faire découvrir au capitaine lui-même l'erreur qui va compromettre la sûreté du bâtiment, il feint de lui demander une instruction sur les pratiques qui servent à mesurer la route d'un vaisseau. Le capitaine, flatté de pouvoir donner une leçon à un académicien, se prête à lui démontrer les opérations de la journée; mais à peine a-t-il commencé, qu'il est frappé de la faute qu'il a commise, jette ses crayons, et court changer les ordres qu'il vient de donner : le bâtiment est sauvé.

Quelques jours après, Rochon trouve, par les distances lu-

naires, que l'erreur de l'estime est de 120 lieues. Il est obligé d'imaginer une nouvelle ruse, pour faire adopter la correction qui résulte de ses observations. Nous rapportons ces anecdotes sur la foi de l'historien; mais sa véracité est si bien reconnue, que personne sans doute n'aura l'idée d'en contester la moindre circonstance.

Rochon s'embarqua une troisième fois en 1771. Le capitaine Kerguélen, qui commandait l'expédition, n'avait aucune confiance aux méthodes astronomiques; il voulut obstinément s'en tenir à son estime, dont l'erreur était déja de 6° en longitude. On allait manquer l'île de France, et tomber sous le vent de l'île de Bourbon. Heureusement, on s'en aperçut à temps. La division éclata bientôt entre le capitaine et l'astronome, qui prit le parti d'abandonner le vaisseau, et de rester à l'île de France.

Ce n'était pas pour éviter les dangers de la navigation projetée, car il forma tout aussitôt le projet d'accompagner, dans un voyage de découvertes, le capitaine Marion, avec lequel il eût couru des dangers bien plus terribles. Malgré ses sollicitations, il ne put obtenir l'autorisation nécessaire; et cette fois, il n'eut qu'à se féliciter du peu de succès de ses démarches, car Marion fut tué bientôt après, et sans doute dévoré par les sauvages avec une partie de ses compagnons; et l'expédition fut abandonnée.

Ce qui put consoler Rochon de tant de contrariétés, c'est l'accueil qu'il reçut à son retour. Il se vit nommé successivement conservateur du cabinet d'astronomie et de physique de la Muette, astronome-opticien de la marine, inspecteur-général des machines servant à la fabrication des espèces monnayées, et commissaire-général des monnaies. Mais ce

qui dut le satisfaire encore davantage, c'est que, parmi les objets d'histoire naturelle qu'il avait rapportés de ses voyages, et dont il fit don au Jardin du Roi, se trouvaient les plus beaux cristaux de quartz de Madagascar que l'on eût jamais vus. Il en fit tailler quelques fragmens, y reconnut la double réfraction, conçut l'idée de la faire servir à la mesure des angles, et fut ainsi conduit à la découverte la plus importante qu'il ait faite, et qui suffirait pour faire vivre sa mémoire.

Cet instrument, qu'il nomma micromètre prismatique, n'est propre, dans le fait, qu'à mesurer de très-petits angles; et l'auteur l'employa d'abord à déterminer les diamètres des trois planètes supérieures. On ne fit pas alors à cette invention tout l'accueil qu'elle méritait; mais, long-temps après, l'auteur de la découverte eut la satisfaction de voir son idée heureuse acquérir une importance toute nouvelle, entre les mains d'un jeune confrère (M. Arago) qui s'en est servi avec succès pour éclaircir un des points les plus difficiles et les plus contestés de l'astronomie moderne.

Rochon voulut étendre aussi lui-même l'usage de son instrument, et le rendre propre à mesurer les diamètres du soleil et de la lune. Il s'est constamment occupé de cet objet, jusqu'à ses derniers momens; mais, malgré tous ses efforts et les moyens ingénieux qu'il a mis en usage, il ne paraît pas encore que le succès ait couronné cette entreprise. Il fit du moins de l'idée fondamentale des applications curieuses : un prisme glissant le long de l'axe d'une lunette, marque sur une règle extérieure des nombres qui servent à reconnaître la distance des objets; employé à la mer, il fait promptement distinguer si un vaisseau, vu dans le lointain, s'approche

ou s'éloigne; si on le gagne, ou si l'on en est gagné de vîtesse.

L'invention lui fut disputée. Maskelyne avait conçu, de son côté, l'idée de faire glisser un prisme le long d'une lunette : il annonça des expériences; mais elles n'ont point paru, il n'en fut plus question. La dispute fut plus vive entre Rochon et Boscovich. Les deux auteurs s'accusèrent réciproquement de plagiat; mais il y a deux différences essentielles entre les deux micromètres : l'idée d'y faire entrer la double réfraction paraît appartenir exclusivement à Rochon; on en a tiré un parti avantageux. Le micromètre de Boscovich n'a rien produit et paraît oublié.

L'instrument pour mesurer les distances fut accueilli par le gouvernement, qui nous ordonna de l'examiner. Nous le soumîmes à toutes sortes d'épreuves; nous le comparâmes à tous les micromètres connus; nous l'appliquâmes à déterminer un côté des petits triangles de notre méridienne. L'instrument soutint assez bien la comparaison avec le micromètre filaire et avec le cercle répétiteur. Les expériences furent répétées à Saint-Cloud, et le gouvernement chargea l'auteur de faire exécuter plusieurs de ces lunettes.

Rochon, comme tant d'autres, avait perdu toutes ses places et son bénéfice à la révolution; mais on ne peut pas dire qu'il ait été persécuté, ni même vu avec défaveur. *Chargé de l'inspection d'une fonderie à Brest, de la découverte et de l'exploitation de plusieurs mines, et de la création d'une manufacture de toiles métalliques, propres à remplacer les fanaux à la mer et à prévenir les dangers du feu; ses services, son activité, la simplicité de son ton et de ses manières, lui donnaient pendant ces temps d'orage un accès*

facile auprès des différens proconsuls ; il était auprès d'eux le solliciteur de tous les adoucissemens, le défenseur de tous les proscrits. Aucun danger personnel, aucun refus, ne lassaient son infatigable persévérance. Les prisons s'ouvrirent souvent à sa voix ; il en arracha entre autres Mad. Gratien de Saint-Maurice, qui paya son zèle et ses bienfaits du don de sa main. (Journal de Paris, 15 mai 1817.)

Quand une loi créa le bureau des longitudes, il se vit cité de la manière la plus honorable dans le rapport d'après lequel fut décidé cet établissement. Peu de jours après, un décret particulier créa pour lui la place de directeur de l'observatoire de Brest, espèce de bénéfice simple qui ne le dédommageait qu'à moitié de celui qu'il avait perdu, mais dont il jouit du moins sans trouble jusqu'à son dernier jour; qui ne l'empêcha pas d'être nommé à l'Institut, comme s'il n'eût pas résidé à Brest, ni bientôt après de se fixer à Paris, d'où il continua de diriger son observatoire, sans plus de difficulté qu'auparavant. Plusieurs fois, sur les rapports du bureau des longitudes, le gouvernement lui acheta des instrumens dont il avait dirigé la construction quand il était à la Muette.

Une de ses passions dominantes était l'amour des hommes, le bien de son pays, et particulièrement celui de sa province. Nous avons déja vu ce qu'il avait fait pendant son séjour à Brest.

En 1785, la Bretagne avait consulté l'Académie sur un projet de navigation intérieure. Les commissaires furent Bossut, Rochon et Condorcet. Le projet n'eut pas l'approbation de ces savans. Rochon proposa depuis un projet tout différent, dont le but était d'ouvrir des canaux pour l'approvisionnement du port de Brest, en temps de guerre, lors-

que la communication par mer peut être interceptée. Un bon juge (M. Girard) a dit que *ces mémoires ont le mérite assez rare d'indiquer à-la-fois, à côté des avantages, les difficultés à vaincre et les moyens de les surmonter.*

M. Rochon s'occupa des mêmes objets presque toute sa vie. Sans cesse il travaillait à perfectionner ses idées ou celles des autres. Tous ces essais n'eurent pas le même succès; c'est le sort de tous ceux qui cherchent à faire des découvertes. On ne juge les inventeurs que d'après ce qu'ils ont fait de mieux: le chef-d'œuvre de Rochon est sans contredit son micromètre de cristal de roche, qu'il inventa en 1777; le bureau des longitudes, dans son annuaire de l'an 1818, a consigné la date de cette invention au chapitre des instrumens d'astronomie et de marine: une pareille mention, dans un article qui n'a que vingt-six lignes, équivaut à plus d'un éloge.

M. Rochon est mort le 5 avril 1817, âgé de soixante-seize ans et sept semaines. Il a été remplacé à l'Institut, dans la section de physique générale, par M. le baron Fourier, le 12 mai 1817.

NOTICE

SUR LA VIE ET LES OUVRAGES DE M. MESSIER,

PAR M. LE CHer DELAMBRE, SECRÉTAIRE-PERPÉTUEL.

Lue dans la séance publique de l'Académie royale des Sciences, le 16 *mars* 1818.

CHARLES MESSIER, né à Badonviller, département de la Meurthe, le 26 juin 1730, était le dixième de douze enfans, dont six étaient morts en bas âge. Il perdit son père en 1741. Un frère aîné prit soin de son éducation, le forma aux arts de l'écriture et du dessin, et s'occupa de lui chercher une place. L'astronome Delisle consentit à le prendre auprès de lui. Messier vint à Paris le 2 octobre 1751. Delisle lui donna à copier une carte de la grande muraille de la Chine, puis à réduire au quart un grand plan de la ville de Pékin. Pour ces travaux, qui auraient exigé un cabinet assez vaste, Delisle ne put lui abandonner qu'un long corridor du collége de France. Le dessinateur, qui n'était pas encore accoutumé à se passer de feu les hivers, trouva que l'apprentissage était assez rude; mais il n'en était que plus convenable au projet qu'il avait formé de se livrer aux observations astronomiques.

A l'âge de quatorze ans, il avait été vivement frappé du

spectacle qu'offrait alors une des plus belles comètes qu'on eût jamais observées ; et quatre ans après, il ne fut pas moins attentif à la grande éclipse de soleil, qui décidait au même instant la vocation de Lalande et celle de Maskelyne. Une même éclipse valut donc à l'astronomie trois académiciens très-célèbres, quoique chacun dans un genre très-différent.

Quand Delisle n'eut plus de cartes à faire copier, il songea qu'il pourrait tirer parti du goût que Messier montrait pour les observations; il chargea son secrétaire Libour de lui enseigner l'usage des instrumens et la mesure des angles. Ce noviciat ne pouvait être bien long, et Messier lui-même nous apprend dans ses mémoires, que, vers la fin de 1753, *il commençait à être bien exercé dans le genre de travail qui lui convenait le mieux.* Il travailla quelque temps au plan de Paris, sous l'abbé de la Grive, et puis à la carte de France, pour laquelle il fit le plan du bois de Verrières. Ces deux essais ne le conduisant à rien, il en revint aux observations astronomiques.

C'était le temps où les astronomes attendaient la comète de Halley. Delisle avait lu à l'Académie un mémoire sur les moyens les plus propres à découvrir cette comète avant son retour au périhélie, et quand elle serait encore trop faible pour être aperçue à la vue simple. Lacaille et les autres astronomes, qui avaient autre chose à faire que de promener pendant une année entière une lunette dans le ciel, dans l'espoir fort incertain d'y apercevoir un astre qui leur ferait perdre un temps précieux, s'en reposèrent sur Delisle, qui pouvait déléguer ce soin à son élève, ne doutant point qu'il ne les avertît dès que la comète serait visible. Leur attente fut doublement trompée.

Après les routes que Delisle avait d'avance tracées à la comète, dans diverses hypothèses, personne ne doutait que Messier ne dût être le premier à la découvrir, et qu'il ne s'empressât aussitôt de la signaler à tous les astronomes de l'Europe. L'élève, fidèle au plan donné par son maître, et à toutes les instructions qu'il avait reçues, muni d'un instrument dont les mouvemens étaient calculés dans un systême, se fatigua pendant un an et demi à chercher la comète où elle n'était pas. Dès la fin de décembre elle fut aperçue par un paysan qui n'y songeait guère. Le docteur Hoffmann la vit quelques jours après, et le 18 janvier elle fut encore vue par un professeur de Leipsick, qui l'observa, la calcula, la reconnut pour la comète attendue, et publia une éphéméride de ses mouvemens.

Par un hasard inconcevable, aucun de ces faits ne pénétra en France; et ce ne fut qu'un mois après le paysan, que Messier aperçut enfin la comète. Mais, par déférence aux ordres de son maître, il fit mystère de son succès un peu tardif, et suivit l'astre en janvier, février et mars, sans en rien dire à personne. Enfin Mayer avertit Lacaille et Delisle; et celui-ci, voyant qu'il était impossible de garder le secret plus long-temps, permit à Messier d'aller faire aux astronomes une confidence qui leur parut dérisoire.

Cette fameuse comète n'était pas la première que Delisle eût voulu garder pour lui seul. Sur un avis venu de Dresde Messier avait suivi celle de 1758 depuis le 15 août jusqu'au 2 novembre, sans en faire part à personne. Delisle mérita encore les mêmes reproches à l'occasion d'une comète découverte par Messier le 21 janvier 1760.

Ces longs et importans travaux étaient bien faits pour ac-

célérer l'entrée de Messier à l'Académie; la fantaisie étrange de Delisle, son premier bienfaiteur et l'arbitre de sa destinée, ne pouvait au contraire que refroidir les autres astronomes, qui ne voyaient en lui qu'un disciple trop dévoué, qui faisait tout pour un individu et rien pour l'Académie. Messier ne se découragea point, il n'en devint que plus assidu à parcourir le ciel toutes les nuits avec une constance infatigable; et comme il n'était plus renfermé dans des limites posées d'avance, il vit ses efforts couronnés de succès nombreux. Presque toutes les comètes decouvertes pendant quinze ans le furent par lui seul; il s'était tellement accoutumé à les regarder comme sa propriété, qu'en 1772 il fut désolé d'avoir été prévenu, par un astronome de Limoges. Les soins qu'il donnait alors à sa femme mourante l'avaient empêché de parcourir le ciel suivant sa coutume. Il ne put voir la comète que trois jours après la mort de sa femme, et de mauvais plaisans imprimèrent qu'il avait été moins sensible à cette perte qu'au chagrin d'avoir manqué une découverte, et *qu'en s'efforçant de pleurer sa femme, il ne put jamais pleurer que sa comète.* Il trouva des consolations dans les années suivantes; sans entrer dans plus de détails, il nous suffira de dire qu'il observa en tout 46 comètes, dont 21 ont été découvertes par lui et que Louis XV ne l'appelait que son *dénicheur de comètes.* La Harpe dit : « le furet des co-« mètes. (*Correspondance,* tom. Ier, p. 97.) »

Mais si les comètes constituent la partie des travaux de M. Messier qui a le plus étendu sa réputation, elles ne sont pas les seuls titres, ni peut-être même les premiers qu'il ait à la reconnaissance des astronomes. Au reste c'est ce qu'il n'est pas aisé de déterminer. Nous pouvons bien compter les ob-

servations qu'elles lui ont fournies, mais qui pourrait même estimer le nombre des nuits qu'il a passées en recherches inutiles ? Ce que nous pouvons dire, c'est que pendant sa longue carrière il n'a négligé aucune opposition, aucune conjonction de planètes, aucune éclipse d'aucun genre. On lui doit sur-tout un nombre considérable d'éclipses des satellites de Jupiter, et comme il avait une vue excellente et une excellente lunette, il voyait presque toujours les immersions plus tard et les émersions plus tôt que tous les autres astronomes.

La suite non interrompue des observations de M. Messier nous a entraînés; rétrogradons un peu pour voir les avantages qu'il en avait retirés. En 1755 ce qu'il appelle son *avancement* se bornait encore à un traitement de 500 livres avec le titre modeste de *commis de la marine*. Il avait de plus la table de Delisle ; mais le vieil astronome, dégoûté peut-être par les désagrémens que lui avait attirés sa conduite inexplicable, en 1759, avait quitté l'astronomie. Devenu veuf, tout entier à des œuvres de dévotion et de charité, il avait fait connaissance avec une femme qui se disait fille d'Achmet III, sultan de Constantinople, et dont les mémoires sont imprimés. Elle s'était fait présenter à Delisle en prétextant avec lui une conformité de goûts et de sentimens. Elle gagna son entière confiance, l'attira chez elle; Delisle ne pouvait plus s'en séparer ; il rompit son ménage pour aller chaque jour prendre ses repas avec elle, en sorte que Messier eut l'inquiétude assez bien fondée de perdre une ressource qui lui était strictement nécessaire. Nous avons eu entre les mains une lettre de la princesse ottomane, qui lui annonçait que Delisle, en considération de son zèle et de ses

travaux, lui abandonnait 400 livres à prendre annuellement sur la pension dont il jouissait comme astronome de la marine; et peu de jours après Delisle lui porta lui même un billet qui lui donnait la même assurance. Son revenu reçut des accroissemens successifs, son titre de *commis* fut changé en celui d'*astronome*. La marine payait le loyer de son observatoire. On y ajouta même un logement voisin, dans lequel il a terminé ses jours, mais qui devint à sa charge à la révolution qui supprima sa place, son traitement et ce loyer, qui n'était au total que de 600 livres.

Chacune de ses découvertes lui valait l'entrée d'une académie étrangère; celle de Paris lui avait donné plusieurs fois ce qu'on appelait alors les *secondes voix ;* plusieurs fois même il avait été présenté pour une autre section que celle d'astronomie. Quelques académiciens lui reprochaient de s'être adonné trop exclusivement aux observations et de n'avoir jamais voulu faire aucun calcul; cependant quand Bailly fut nommé, il n'avait qu'une voix de plus que Messier, qui enfin en 1770 eut la pluralité des suffrages, quoiqu'il eût pour concurrent M. le comte de Cassini, qui fut lui-même reçu quelques jours après.

Aucun de ces événemens ne changea sa manière de vivre. Il passait les nuits dans son observatoire et les jours à mettre au net ses observations ou à tracer les cartes du cours de ses comètes, de ses éclipses, des passages de Mercure et de Vénus. C'était sa manière de les calculer et d'en présenter les résultats. Lalande ayant rappelé l'attention des astronomes sur les taches du soleil, il les observa pendant plusieurs années, et il nous a laissé une ample collection de ces observations, qui n'ont encore été ni publiées ni calculées et

dont nous espérons faire jouir les astronomes. Il avait lui-même rassemblé tous ses mémoires astronomiques et météorologiques dans deux volumes énormes, dont l'un contenait ses comètes, et l'autre ses observations diverses. Il venait de terminer ce recueil et s'occupait assidument de la planète Uranus, nouvellement découverte par M. Herschel, lorsqu'un accident épouvantable vint interrompre ses travaux pendant un an, et faillit y mettre un terme pour toujours.

Le 6 novembre 1781, M. Messier se promenait avec la famille Saron dans le jardin de Mouceaux, qui excitait alors la curiosité publique et où l'on n'entrait que par billets. Une serre chaude avait principalement attiré son attention. Elle servait d'entrée à une grotte obscure qu'il avait parcourue avec intérêt. A peu de distance il voit une porte ouverte, il la prend pour l'entrée d'une grotte à-peu-près semblable. Il y entre avec confiance; c'était une glacière. Il y tombe de vingt-cinq pieds de haut sur des monceaux de glace. Il ne peut retenir un cri douloureux quand il sent qu'il a la cuisse et le bras cassés, le poignet fracassé, deux côtes enfoncées, et au-dessus de l'œil droit une blessure par laquelle il perd beaucoup de sang. Il n'ose appeler dans la crainte que les enfans de M. de Saron qui le suivaient habituellement, ne viennent s'engloutir avec lui dans la fatale glacière. Heureusement l'évêque d'Avranches, qui connaissait le jardin, remarque avec surprise que la glacière est ouverte; il en approche, il entend des gémissemens, et sans reconnaître la voix, il se hâte d'aller chercher du secours. Un garçon jardinier, dépositaire des clefs de la glacière, arrive avec une échelle; il descend, et la première consolation qu'il adresse à la victime de sa négligence, est de lui demander

d'un ton brusque, *qui êtes-vous et que faites-vous là?* Messier répond doucement qu'il est de la compagnie du président de Saron. On donne des ordres pour le tirer de l'abyme, on assujettit sa cuisse sur une planche, on le pose sur un matelas; avec des échelles et des cordes trois hommes parviennent à le tirer de la glacière, sans accident et sans nouvelles douleurs. M. de Saron envoie aussitôt chercher Sabatier; il va lui-même prendre Tenon et Bordenave, vient prévenir la sœur de Messier et donner tous les ordres nécessaires. Trois heures et demie après sa chûte, Messier arrive porté sur un brancard. Les trois chirurgiens étaient présens, Sabatier était arrivé le premier, le pansement lui appartient, Messier croit y remarquer quelques négligences fâcheuses. Ce pansement dure deux heures après lesquelles le malade s'endort assez tranquillement; il nous dit plus loin que, pendant sa cure qui fut très-longue, il n'eut pas un instant de fièvre. Il se condamna à la diète la plus austère, c'était l'avis de Tenon, ce n'était pas celui de Sabatier, et le malade se demande comment deux maîtres si habiles peuvent différer d'opinion sur un point qui paraît si simple.

Un an et trois jours après son accident, Messier monte pour la première fois à son observatoire afin de se préparer à l'observation du passage de Mercure. Trois jours après, époque du passage, il prend vingt-deux hauteurs du soleil, observe le soleil au méridien, voit l'entrée de Mercure, et il en marque quatorze positions. Le voilà rendu à ses occupations habituelles.

Le reste du journal duquel nous tirons tous ces faits, est consacré à exprimer la reconnaissance de l'auteur à tous ceux qui lui avaient témoigné de l'intérêt pendant sa maladie. Cet intérêt fut général. Tous les ordres de la société prirent part

à son malheur, et firent tout pour le consoler et le dédommager. Le président de Saron lui prodigua les soins les plus constans et les plus généreux : c'était une espèce de devoir; il était son ami, son confrère à l'Académie, et ses enfans avaient été la cause innocente de ce malheur. Boscovich lui témoigna l'amitié la plus active, et le secourut efficacement. M. Sage lui fit obtenir du roi une gratification de 1200 liv., suivie presque aussitôt d'une pension viagère de 1000 liv. et d'une gratification de 2400 liv.

Il lui restait à subir d'autres épreuves. La révolution le priva tout-à-la-fois de son traitement et de toutes ses ressources; devenu à son tour académicien pensionnaire, il avait vu, peu de jours après, supprimer l'Académie et sa pension. Son généreux ami, le président de Saron, était tombé sous la faux révolutionnaire; on conçoit à peine comment il put subsister, s'il n'avait pas quelques faibles épargnes : tout ce qu'on sait, c'est qu'il n'avait pas même les moyens d'alimenter la lampe qui servait à ses observations nocturnes. Il vit enfin des jours plus heureux : l'Institut, le bureau des longitudes, la Légion-d'honneur, lui firent connaître une indépendance, et une aisance à laquelle il était peu accoutumé. Elle ne changea rien à sa manière de vivre; il n'en profita que pour être utile à sa famille. Sa sœur était morte auprès de lui; il fit venir un frère, qu'il eut aussi la douleur de perdre, et une nièce, Mlle Joséphine Messier (1), qui a passé avec lui les dix-neuf dernières années de sa vie, et qui lui a rendu les soins les plus touchans et les plus assidus, dont on a cru qu'elle n'était pas dignement récompensée, quand on apprit que son oncle n'avait fait en sa faveur aucune disposition parti-

(1) Aujourd'hui Mme Bertrand.

culière. Mais elle nous a désabusés, en nous assurant que M. Messier avait pris ses précautions d'avance, pour lui assurer un sort dont elle est parfaitement contente, et dont elle aura toujours la plus vive reconnaissance.

Messier était éminemment observateur; il ne voyait rien, n'entendait rien dont il ne prît note. La collection de ses journaux pourrait être une lecture piquante. Mais il n'écrivait que pour lui seul; ses notes auraient besoin d'être rédigées d'une manière plus correcte et plus concise. Il en aurait sans doute retranché quelques jugemens un peu précipités et un peu malins : car il était bon, quoique sa vie laborieuse lui eût fait contracter une humeur un peu sévère; fidèle ami, sans intrigue, ponctuel en tout, comme il l'était à se présenter à sa lunette pour l'observation d'un phénomène. Cette vie réglée le fit arriver à quatre-vingt-deux ans sans aucune infirmité. Alors sa vue baissa considérablement : il ne pouvait lire ou écrire qu'avec une forte loupe qui le fatiguait; c'est ce qui l'a empêché de mettre au net ses mémoires. Il fut frappé d'une paralysie sur le côté droit. La triste expérience qu'il avait faite l'avait rendu rebelle aux ordonnances de la médecine. Tenon lui envoya un de ses confrères, pour le visiter en qualité d'ami : il consentit à recevoir quelques soins, se rétablit, reparut à nos assemblées; mais ses forces diminuant sensiblement, il se tint renfermé chez lui pendant deux ans, et fut attaqué d'une hydropisie pour laquelle il ne fut alité que deux jours. Le mal fit des progrès rapides. Il expira dans la nuit du 11 au 12 avril 1817, à l'âge de quatre-vingt-six ans neuf mois et dix-huit jours. Il fut remplacé à l'Académie par M. Mathieu, le 26 mai de la même année.

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANALYSE

Des Travaux de l'Académie royale des Sciences, pendant l'année 1817.

PARTIE PHYSIQUE,

PAR M. LE CH^ER CUVIER, SECRÉTAIRE-PERPÉTUEL.

PHYSIQUE ET CHIMIE.

LES physiciens savent aujourd'hui, par les travaux d'un grand nombre de leurs plus ingénieux prédécesseurs, que les effets de la distribution de la chaleur, dans l'intérieur des corps solides, se rapportent à trois qualités variables selon les corps, mais déterminables et fixes pour chacun d'eux: leur capacité pour le calorique, c'est-à-dire la quantité qu'il en faut à chacun pour passer d'un degré de chaleur à un autre; leur conducibilité intérieure, c'est-à-dire le plus ou moins de facilité avec laquelle la chaleur parvient à s'y dis-

tribuer également; et leur conducibilité extérieure, c'est-à-dire le plus ou le moins de facilité avec laquelle ils se mettent à l'unisson de chaleur avec l'air ou les corps environnans.

La première de ces qualités est appréciée depuis long-temps pour chaque corps; la troisième dépend beaucoup de l'état de la surface; et il est necessaire, dans une théorie exacte, de la distinguer soigneusement de la seconde, qui tient sans doute à la disposition mutuelle des molécules des corps.

Feu M. de Rumford avait fait de nombreuses expériences sur la conducibilité extérieure d'un même corps, selon qu'il est plus ou moins poli, ou revêtu de diverses enveloppes.

M. Desprets vient d'en faire pour comparer celle des corps différens dans des états de surface semblables pour tous. Il emploie des sphères assez petites pour que leur conducibilité intérieure n'influe point trop sur l'extérieure; ses thermomètres ont leur réservoir au milieu de chaque sphère, et les surfaces sont ou simplement polies, ou enduites d'un vernis et d'un nombre de couches de ce vernis, reconnu par l'expérience le plus favorable au refroidissement.

M. Desprets a rédigé ainsi une table des temps que mettent à se refroidir, au même degré, les principaux métaux employés dans les arts; et, en combinant convenablement cette table avec celle des capacités, il obtient celle de la conducibilité extérieure; c'est le plomb qui la possède au plus haut degré, ensuite la fonte, puis le fer, l'étain, le zinc, et enfin le laiton.

Les bains du Mont-d'Or, près Clermont, fournissent une

eau à 42 ou 43° centigrades de température, contenant quelques matières salines, mais exhalant sur-tout une grande quantité d'acide carbonique. On observe de très-grandes différences dans leur action sur ceux qui les prennent et dans le mal-aise qu'occasionne leur vapeur ; et lorsque ces effets sont beaucoup plus marqués qu'à l'ordinaire, que les bains sont ce qu'on appelle *soufrés*, on peut être assuré qu'un orage est prochain, et qu'il sera d'autant plus violent, que ces signes précurseurs ont été plus manifestes.

M. Bertrand, médecin de ces eaux, attribue ces phénomènes à l'électricité qui, dans ses communications de la terre à l'atmosphère, ou réciproquement, doit, selon lui, suivre de préférence les ramifications tortueuses des eaux minérales ; mais les signes d'électricité qu'il a obtenus n'ont pas paru assez constans ni assez évidens pour servir de preuve à son hypothèse, et l'on n'a peut-être besoin de recourir qu'au plus ou moins de différence de chaleur au-dedans et au-dehors du bain, et à la plus ou moins grande abondance d'acide carbonique résultant de la plus ou moins grande difficulté que l'état de l'atmosphère extérieure oppose à sa dissipation.

Chacun sait que les alcalis fixes s'unissent au soufre, et forment avec lui cette combinaison à laquelle sa couleur a fait donner très-anciennement le nom de *foie de soufre*, et que la nouvelle chimie place dans la classe générale des sulfures ; mais depuis que l'on a appris, par les brillantes expériences de M. Davy, que les alcalis fixes ne sont autre chose que des oxides métalliques, il devenait intéressant de savoir s'ils entrent dans le sulfure comme oxide ou comme

métal, c'est-à-dire s'ils conservent ou s'ils perdent, en y entrant, l'oxygène auquel ils sont unis.

M. Vauquelin avait présenté des motifs plausibles d'adopter la première de ces opinions pour le sulfure fait à une haute température; et M. Gay-Lussac vient, en quelque sorte, de la démontrer.

En effet M. Vauquelin avait fait observer que le sulfure fait à une haute température, lorsqu'on le dissout dans l'eau, donne du sulfate, dont l'acide sulfurique contient précisément autant d'oxygène que la potasse employée; et si cet acide existait dans le sulfure avant la dissolution, il ne peut avoir pris son oxygène qu'à la potasse; mais on pourrait objecter qu'il ne se forme qu'au moment de la dissolution et en décomposant l'eau.

C'est à quoi répond maintenant M. Gay-Lussac. En formant le sulfure à une temperature douce, on n'obtient point de sulfate lors de la dissolution, mais seulement de l'hyposulfite. La simple dissolution dans l'eau ne produit donc pas de l'acide sulfurique, et, s'il y en a, il a dû se former en même temps que le sulfure, et dans un moment où la potasse seule avait de l'oxygène à lui fournir.

L'oxide noir de manganèse, traité à chaud avec de la potasse caustique, se fond en une matière verte, dont la dissolution, d'abord de la même couleur, passe ensuite au bleu, au violet, et au rouge. Scheele, qui a le premier observé ces variations, avait donné, à la combinaison qui les présente, le nom de *Caméléon minéral.*

M. Chevreul a remarqué qu'elle peut passer par toutes les teintes des anneaux colorés, et que l'on y produit alternati-

vement les diverses nuances, soit en ajoutant, petit à petit, de l'eau, de l'acide carbonique, de la potasse, etc., soit en mêlant, dans diverses proportions, les deux couleurs extrêmes ; on peut enlever toute couleur par certains acides, etc.

MM. Chevillot et Edwards, s'étant occupés de cette singulière substance, ont constaté d'abord qu'il ne peut se former de caméléon sans le concours de l'air ; qu'il s'en forme dans l'oxygène plus aisément que dans l'air, et qu'il absorbe de l'oxygène en se formant, plus que ne ferait la potasse seule. Variant ensuite les proportions des composans, ils ont vu que le caméléon est d'un verd d'autant plus clair et plus pur qu'on y a employé moins de manganèse et plus de potasse, et qu'en augmentant le premier composant et diminuant l'autre jusqu'à ce qu'ils soient en parties égales, on arrive à faire immédiatement du caméléon rouge, qui, dissout et évaporé, donne de beaux cristaux comparables au carmin, inaltérables à l'air, et capables de colorer une grande quantité d'eau. L'alcali y est parfaitement neutralisé. Ces chimistes se proposent de suivre ces expériences, et espèrent en déduire les causes des phénomènes remarquables qu'offre le caméléon minéral.

La médecine emploie tous les jours des racines, des graines, ou d'autres parties de plantes et d'animaux auxquelles on a reconnu une action bien marquée sur l'économie animale, et des vertus précieuses contre diverses maladies; mais ces vertus n'appartiennent pas à la totalité des principes immédiats qui composent les substances, elles sont, au contraire, ordinairement l'apanage exclusif de l'un

d'entre eux; et lorsque la chimie parvient à discerner ce principe privilégié et à découvrir les moyens de l'extraire, elle rend à la médecine un service d'autant plus grand, que souvent les autres principes auxquels il est uni, affaiblissent son action, et produisent même des inconvéniens qui restreignent l'usage de la substance dans laquelle il entre.

Ainsi l'on connaît depuis long-temps le pouvoir de l'ipécacuanha pour exciter le vomissement, et les heureux effets de ce remède sur les suites de la dyssenterie; l'on sait aussi, par les travaux récens de M. de Candolle, que les racines employées en pharmacie, sous le nom d'*ipécacuanha*, proviennent de plantes assez diverses et dont la force n'est pas toujours égale; savoir : d'un *psychotria,* d'un *calicocca,* et d'une *violette;* mais il s'agissait de déterminer auquel des principes immédiats de ces racines appartient la vertu qui les a rendues si précieuses, ce qui, seul, pouvait donner les moyens d'assigner avec précision leurs degrés respectifs de puissance, et de fixer les meilleures méthodes de les préparer pour leur emploi en médecine. C'est ce que MM. Magendie et Pelletier ont essayé de faire par une analyse chimique très-soignée, et par des expériences sur les animaux et sur les hommes.

Après avoir enlevé, par l'éther, une matière huileuse, d'une odeur désagréable, ils traitent l'ipécacuanha par l'alcool, et en obtiennent de la cire et une substance particulière, qu'ils séparent de cette cire au moyen de l'eau. Le résidu ne contient plus que de la gomme, de l'amidon, et du ligneux.

C'est à la substance dissoluble dans l'alcool et dans l'eau, qu'appartient le pouvoir de faire vomir; ce qui l'a fait nom-

mer *émétine*. Elle se présente sous forme d'écailles transparentes, brunes rougeâtres, presque sans odeur, légèrement âcres et amères; elle est déliquescente à l'air, et offre plusieurs autres caractères qui paraissent lui être particuliers. A dose convenable, de 2 à 4 grains, elle a les effets de l'ipécacuanha, mais non pas son odeur nauséabonde, qui réside dans la matière huileuse. Le vomissement qu'elle occasionne est suivi de fortes envies de dormir. A dose plus élevée, de 6 à 12 grains, par exemple, elle a fait périr les chiens, après des vomissemens violens et plusieurs heures d'un assoupissement profond.

L'écorce d'ipécacuanha brun (*psychotria emetica*) contient 16 centièmes d'émétine; mais la partie ligneuse intérieure de la même racine n'en possède qu'un peu plus d'un centième. Il y en a 14 centièmes dans l'écorce d'ipécacuanha gris (*calicocca ipecacuanha*) et 5 dans la totalité de la racine d'ipécacuanha blanc (*viola emetica*).

L'opium, ou le suc de tête de pavots, dont l'usage est devenu si général dans la médecine moderne, est aussi un composé de plusieurs principes; et, malgré les nombreux travaux dont il a été l'objet, M. Sertürner, pharmacien d'Eimbeck, en Hanovre, y a découvert récemment un acide, et, ce qui est plus extraordinaire, un alcali nouveau, ou, du moins, une substance qui a toutes les propriétés générales des bases salifiables. C'est à elle qu'il attribue le pouvoir somnifère et vénéneux de l'opium, et il lui a donné, par cette raison, le nom de *morphine*. Amère, cristallisable, fusible à la chaleur, peu soluble dans l'eau, même bouillante, mais beaucoup dans l'alcool et dans l'éther, elle forme, avec la plu-

part des acides, des sels neutres remarquables, dont elle est précipitée par l'ammoniaque; elle se résout au feu en oxygène, en carbone, en hydrogène, et peut-être en un peu d'azote. L'acide auquel elle est unie dans l'opium, a reçu de M. Sertürner le nom de *méconique;* mais ce chimiste n'a pas eu le loisir d'en faire un examen assez approfondi.

M. Robiquet a repris et vérifié les découvertes de M. Sertürner, par rapport à ces deux substances; il a reconnu que l'acide méconique est très-soluble dans l'alcool et dans l'eau, qu'il forme des sels diversement solubles avec les alcalis; qu'il donne au sulfate de cuivre une belle couleur d'émeraude, etc.; mais M. Robiquet s'est assuré, contre l'opinion de M. Sertürner, que le sel essentiel, extrait de l'opium par M. Dérone, en 1813, n'est pas la morphine, ni une combinaison de la morphine avec l'acide méconique; c'est, selon lui, une troisième substance qui existe dans l'opium en même temps que ces deux-là.

M. Sertürner avait éprouvé de la morphine, dissoute dans l'alcool, des effets délétères assez violens; mais quand on la donne seule elle agit peu. M. Orfila en a fait prendre sans effet à des chiens, à une dose où l'extrait aqueux d'opium aurait produit un empoisonnement violent. Tous les sels solubles de morphine agissent, au contraire, avec la même intensité que l'opium, et en déterminant les mêmes symptômes; tandis que l'opium, dont on a séparé la morphine, perd son efficacité.

C'est donc la morphine qu'il faut tâcher de retrouver dans les végétaux indigènes, si l'on veut y découvrir quelque succédané de l'opium.

M. Sage a publié, dans le courant de l'année, quatre Mé-

moires sur l'eau de mer ; il y admet un gaz particulier, auquel il donne le nom de *gaz neptunien, oléagineux, alcalin, et inodore*, qui, selon lui, doit empêcher que la distillation ne puisse extraire de l'eau de mer une boisson salubre. On saura bientôt à quoi s'en tenir, d'après les expériences que le capitaine Freycinet a été chargé de faire dans le grand voyage qu'il a entrepris.

MINÉRALOGIE ET GÉOLOGIE.

Les minéraux, considérés sous un point de vue général, n'occupent essentiellement que les naturalistes; mais les rapports particuliers d'un grand nombre de leurs espèces avec les besoins et les agrémens de la société sont, pour ainsi dire, infinis. Les moins importans de leurs usages, ceux qui n'intéressent que la vanité, produisent encore dans le commerce et dans les relations mutuelles des peuples, des mouvemens que la politique étudie, et que la philosophie ne doit pas dédaigner, car elle en tire toujours quelque profit. Le plus puéril de tous les luxes est bien certainement celui des pierres précieuses, et cependant nous lui devons la première connaissance de contrées éloignées, et plusieurs faits de physique dignes de toute notre attention. M. Haüy, dont les travaux ont donné à la grande minéralogie une face si nouvelle en la soumettant aux procédés d'une physique délicate et aux calculs d'une géométrie rigoureuse, a voulu que ces minéralogistes pratiques, qui ne s'occupent que des minéraux de luxe, participassent aussi aux progrès de la science. Il vient de publier un traité des caractères physiques des pierres précieuses, où il donne les moyens les

plus sûrs d'en distinguer les espèces, malgré les altérations que l'art leur a fait subir, en les taillant, en les chauffant, ou de toute autre manière; et ce qui était plus difficile, malgré toutes les diversités de couleur et de transparence que la nature elle-même leur imprime. Ce ne sont là que des accidens ; l'essence de chaque espèce consiste dans la forme de sa molécule intégrante, dans la disposition de ses lames, et dans la nature de ses élémens ; mais on ne pourrait constater ces caractères dans une gemme sans la détruire; on est donc réduit à ceux qui dérivent des premiers et en sont, en quelque sorte, les indicateurs, savoir : à la dureté, à la pesanteur spécifique, à la double réfraction, et à l'électrisation, soit par le frottement, soit par la chaleur. C'est sur ceux-là que M. Haüy insiste dans un ouvrage qui sera également avantageux et à ceux qui travaillent les pierres précieuses et à ceux qui aiment à s'en parer.

Nous avons parlé plusieurs fois de la grande question élevée entre les cristallographes et les chimistes, sur la préférence que méritent les caractères offerts par leurs sciences respectives pour la distinction des minéraux, et nous avons cité quelques exemples de substances, dont la composition chimique varie à un degré étonnant, quoique leur forme cristalline et plusieurs de leurs propriétés physiques restent les mêmes. On en est réduit à croire que, dans ces sortes de cas, il se fait un mélange purement mécanique, une interposition de substances étrangères, entre les molécules du véritable cristal, lesquelles conservent leurs rapports comme si ces matières hétérogènes n'étaient pas survenues ; mais, dans cette hypothèse, on est obligé de reconnaître un fait

bien extraordinaire : c'est la puissance prédominante dont certaines substances jouissent, et en vertu de laquelle elles en contraignent d'autres à se plier à leurs formes, à se soumettre à leurs lois, quoique ces autres substances aient aussi des formes et des lois cristallines qui leur sont propres, et qu'elles entrent dans le mélange (si l'on veut l'appeler ainsi) en quantité incomparablement plus grande que celle à laquelle elles sont ainsi obligées d'obéir.

C'est ce que M. Beudant vient de constater par des expériences très-exactes qu'il a soumises à l'Académie.

Après avoir reconnu que deux sels s'unissent rarement dans les mêmes cristaux, à moins d'avoir un principe commun, il a mêlé différens sulfates pour déterminer lequel l'emporterait sur les autres.

Le sulfate de fer exerce un pouvoir, on oserait dire un despotisme tout-à-fait étonnant. Il suffit, par exemple, que dans une dissolution de sulfate de fer et de sulfate de cuivre il y ait un dixième du premier, pour que la totalité cristallise sous la forme qui lui est propre, et pour que celle du sulfate de cuivre ne s'y montre nullement. Avec du sulfate de zinc il faut un dixième et demi de sulfate de fer pour dominer ; enfin, si l'on mélange un quart de sulfate de zinc et trois quarts de sulfate de cuivre, il suffira d'y ajouter deux à trois centièmes de sulfate de fer, pour que le tout cristallise comme si c'était du sulfate de fer pur.

Pour montrer à quel point ce résultat est fait pour étonner, il suffit de se rappeler que la molécule intégrante du sulfate de cuivre est un parallélipipède obliquangle irrégulier ; que celle du sulfate de fer est un rhomboïde aigu ; que M. Haüy soupçonne celle du sulfate de zinc d'être un octaèdre régu-

lier, et que les formes secondaires ordinaires de ces trois substances ne se ressemblent pas plus que leurs élémens mécaniques. Comment ce petit nombre de molécules rhomboïdales se rangent-elles facette à facette pour former le cristal général, sans être troublées, dans leur tactique ordinaire, par ce nombre prodigieusement supérieur de molécules tout autrement figurées? comment celles-ci peuvent-elles être contraintes de se presser, de s'empiler dans les vastes intervalles des premières, sans aucun ordre relatif à l'attraction de leurs propres facettes? Il y a certainement là des mystères dignes de toutes les recherches des physiciens, et d'un ordre bien au-dessus de la question de savoir si l'on doit classer les minéraux par leur analyse ou par leur forme.

M. Lelièvre, qui avait trouvé, en 1786, dans une mine de plomb des Pyrénées, une substance d'un aspect particulier, qui lui parut d'abord une sorte de chalcédoine, en a donné l'analyse faite par M. Berthier, ingénieur des mines, qui y a reconnu 44. 5 d'alumine, 15 de silice, et 40. 5 d'eau. En conséquence, M. Lelièvre la nomme *alumine hydratée silicifère*. Sa cassure est un peu résineuse; elle happe à la langue; roussie au feu, elle devient friable, et perd 40 pour 100 de son poids; elle ne fond pas au chalumeau; les acides nitrique et sulfurique la convertissent en magma salin.

On avait déja remarqué plusieurs ressemblances entre les aëorolithes, et cette célèbre masse de fer natif, observée à la surface de la terre, en Sibérie, par feu Pallas; M. Laugier vient d'en compléter l'ensemble dans l'analyse qu'il a donnée d'un fragment de cette masse. Non-seulement il y a ré-

trouvé le nickel; mais le chrome, dont il a le premier découvert l'existence dans les aërolithes, s'est aussi offert à lui, ainsi que le soufre.

Il se fait, en quelques endroits de l'Italie et de la Sicile, des éruptions d'une vase argileuse et froide, qui sort de terre, s'élève et coule à-peu-près comme la lave; et l'on a donné, à cette espèce de volcans, les noms de *salsa,* de *gorgogli* et de *bollitori.* C'est de l'un d'eux, situé à Sassuolo, dans le Modénais, que paraissent être sorties de violentes déjections, accompagnées de flammes et de tremblemens de terre, dont Pline fait mention. Des auteurs, beaucoup plus modernes, parlent aussi de flammes, de boue et de pierres lancées à de grandes hauteurs. Mais Spallanzani, qui en a donné, dans ses voyages, une description fort étendue, l'a trouvé beaucoup plus tranquille; et M. Mesnard-Lagroye, qui l'a visité encore plus récemment, l'aurait presque méprisé, si des phénomènes singuliers de la nature pouvaient jamais paraître méprisables à un physicien. Un petit tertre de terre argileuse est percé d'une ouverture assez étroite, remplie d'une vase molle, sur laquelle on voit quelques filets de pétrole. Il s'en exhale continuellement des bulles d'un gaz inflammable, qui est un hydrogène carboné, mêlé d'acide carbonique, et il s'en dégage des ondes d'un eau salée. Tout autour de cette petite bouche, un grand cercle stérile et salé est le vestige des anciennes éruptions, et montre qu'elles ont dû être considérables. Mais elles n'arrivent que de temps en temps, comme celles des volcans ordinaires.

L'auteur compare cette salze avec deux ou trois autres qu'il a vues dans les environs; avec celle de Macaluba en Sicile,

qu'à décrite Dolomieu; avec une autre plus grande de Crimée, dont a parlé Pallas, et, en général, avec toutes celles dont il a trouvé des traces dans les différens auteurs. Sans prétendre assigner la cause de ces phénomènes remarquables, M. Mesnard-Lagroye se borne à faire remarquer qu'ils sont toujours placés dans le voisinage des sources de pétrole, des fontaines ardentes, des feux naturels, et près de la limite du dernier calcaire marin. Au reste il dit, ce que l'on voit assez, que les salzes ne supportent aucune comparaison réelle avec les véritables volcans.

Les cavernes dont un si grand nombre de montagnes sont creusées, appartiennent aussi aux phénomènes remarquables qui occupent le géologiste.

M. de Humboldt, qui avait observé depuis long-temps celles des chaînes calcaires d'une partie de l'Allemagne, n'a pu manquer de porter son attention sur celles de la grande chaîne porphyritique et volcanique des Andes. Ce qui, dans les premières, appartient à l'action des eaux, semble avoir été quelquefois dans les autres l'effet d'émanations gazeuses. On voit de ces cavernes auprès de Quito, assez étendues pour servir de refuge et comme de caravenserais aux voyageurs. Elles sont généralement peu profondes, et tapissées de soufre. L'énorme grandeur de leurs ouvertures les fait distinguer aisément de celles qu'offrent les tuffa volcaniques en Italie, aux Canaries, et même dans les Andes.

BOTANIQUE.

Les botanistes suivent aujourd'hui, par rapport aux fou-

gères, les idées de M. Smith, qui, en 1791, les a divisées en vingt-quatre genres répartis en deux sections, selon que les petites capsules, qui contiennent leurs semences, sont ou non munies d'un anneau élastique ; et distingués entre eux d'après l'arrangement des capsules, l'absence ou la présence de la membrane qui les recouvre avant la maturité, d'après la manière dont un des bords de cette capsule se détache de la feuille, d'après le nombre de leurs loges, enfin d'après la manière dont elles s'ouvrent, soit en deux valves, soit par des fentes longitudinales ou par des pores.

MM. Swarz, Wildenow, Robert Brown et autres, ont encore ajouté de nouveaux genres à ceux de M. Smith, au point que leur nombre s'élève à plus de cinquante.

M. Desvaux, directeur du jardin botanique de Poitiers, a poursuivi ces recherches ; et, dans un Mémoire adressé à l'Académie, où il décrit beaucoup de nouvelles espèces, et où il ajoute huit genres à ceux qui avaient été établis avant lui, il divise les fougères en quatre sections ; savoir :

Les *polypodiacées*, dont les capsules, réunies en groupes ou disposées en lignes, sont entourées d'un anneau articulé, et s'ouvrent transversalement dans le plan de cet anneau;

Les *osmondacées*, dont les capsules striées en étoiles à leur sommet sont dépourvues d'anneaux ;

Les *gléchéniacées*, dont les capsules, entourées d'un anneau strié, non articulé, s'ouvrent longitudinalement dans le sens opposé à cet anneau;

Enfin, celles dont les capsules solitaires, nues, non striées, à plusieurs loges, s'ouvrent par une fente ou par un pore.

Ce mémoire présente aussi des considérations sur les lycopodes, sorte de cryptogames intermédiaire, à certains égards,

entre les mousses et les fougères. L'auteur les divise en trois sections : les *stachidées* à capsules d'une seule loge, disposées en épi ; les *psylotées* à capsules de deux ou trois loges ; enfin les *ophyoglossées* à capsules d'une seule loge, s'ouvrant transversalement en deux valves : mais d'habiles botanistes pensent que cette dernière section appartient aux vraies fougères plutôt qu'aux lycopodes.

M. Richard a publié un Mémoire latin sur les Orchidées, famille de plantes célèbres depuis long-temps par la structure particulière des diverses parties de leurs fleurs, dont les formes bizarres décorent abondamment nos prairies et nos bois. La singularité de leur organisation ne pouvait être clairement rendue qu'en adoptant quelques termes nouveaux, et c'est ce que l'auteur engage les botanistes à faire. Les racines, par exemple, il les divise, suivant leurs formes, en bitubéreuses, fibreuses, rameuses, bulbeuses et parasites. Aucun genre ne réunit deux de ces sortes de racines. Ce n'est qu'à certains genres parasites qu'appartiennent des feuilles articulées à leurs pédicules. Quelques espèces offrent des individus dont les fleurs sont toutes stériles, par l'imperfection de l'ovaire ; d'autres où elles sont toutes fertiles ; d'autres, enfin, où quelques fertiles sont mêlées irrégulièrement à un grand nombre de stériles. La présence ou l'absence de pédicelle sous l'ovaire fournit, pour les genres, des moyens faciles de distinction.

La structure du *labelle*, autrefois base essentielle des caractères génériques, n'y joue plus qu'un rôle secondaire. L'existence et le manque d'éperon continuent d'indiquer une différence générique. C'est une chose digne de remarque,

que, parmi les nombreuses orchidées parasites découvertes en Amérique, il ne s'en trouve pas une seule éperonnée, tandis que l'Asie et l'Afrique en produisent un assez grand nombre pourvues d'un éperon, qui quelquefois est d'une longueur inconnue dans les terrestres. C'est à tort qu'on a confondu avec l'éperon une sorte de petit sac, formé par la connexion et le prolongement des bases de deux divisions extérieures du calyce. Ce petit sac, que M. Richard distingue par le nom de *pérule*, établit une diversité de genre.

Le corps multiforme, résultant de la soudure des deux sexes, et désigné jusqu'ici par le nom insignifiant de *colonne*, prend maintenant celui de *gynostème*, mieux approprié à sa nature. Cette soudure s'opère par l'intermède des matières filamentaire et stylaire, dont l'une est terminée par l'anthère et l'autre par le stygmate : ces deux organes ne sont donc pas, comme on l'a avancé, unis immédiatement ou portés l'un par l'autre.

Une cavité, pratiquée au sommet du gynostème, pour recevoir l'anthère, tire de cette destination son nom de *clinandre*.

L'aréole visqueuse, regardée par les botanistes comme constituant seule le stygmate, et que M. Richard nomme *gynise*, est ordinairement surmontée par un processus appelé *rostelle*. Tantôt celui-ci est terminé par une *bursicule*, tantôt il porte une *proscolle* ou glande glutineuse, à laquelle s'attache le pollen sortant de l'anthère.

L'anthère, considérée quant à son mode d'insertion, est dite 1° *continue*, 2° *stipulée*, 3° *sessile*. Le point d'origine de la première n'est pas distinct du reste de la matière filamentaire : la seconde a un petit support propre : la troisième est

immédiatement fixée par un point plus étroit que sa base. Chacune d'elles non-seulement indique une diversité générique, mais elle prouve aussi l'affinité des genres dans lesquels elle se trouve. Toujours biloculaire, ses loges sont le plus souvent subdivisées en plusieurs *locelles*, par des *septules* : ceux-ci, étant d'une substance rétractile dans la plupart des genres, s'oblitèrent au moment même de la déhiscence de l'anthère.

Le pollen contenu dans chaque loge forme une *masse pollinique,* rarement simple, et le plus souvent composée de deux ou quatre *massettes.* Sous le rapport de leur tissu, ces masses ou massettes sont 1° *sectiles*, 2° *granuleuses,* 3° *solides.* Les premières sont fendues, par leur face externe, en un grand nombre de corpuscules réunis par leurs bases sur un seul plan. La *caudicule* résultant du prolongement filamentiforme qui les réunit, est ordinairement terminée par un *rétinacle* visqueux, qui est d'abord niché dans la bursicule stygmatique, ou fixé au bout du rostelle. Comme pulvéracées au premier aspect, les secondes sont composées d'innombrables particules, amoncelées avec plus ou moins de cohérence, quelquefois aussi elles sont baignées par une humeur qui les rend comme pultacées. Les troisièmes sont des corps d'un tissu uniformément continu.

Deux appendices, ordinairement existans aux côtés de l'anthère ou du clinandre, et nommés *staminodes*, semblent indiquer que la substance filamentaire est formée de trois filets monadelphes, dont l'intermédiaire est seul anthérifère.

Le tégument propre des graines étant d'un tissu celluleux susceptible de subir, dans son accroissement, une dilatation extraordinaire, a été mal-à-propos pris pour un arille. Sa

surface et sa forme, jointe à celle de l'amande, donnent un moyen très-facile de distinguer les graines en *réticulaires* et *fusiformes :* les premières indiquent les orchidées terrestres, et les secondes celles qui croissent sur d'autres végétaux.

L'embryon constitue toute l'amande, et n'est pas renfermé dans un endosperme, comme on l'a dit d'après Gærtner.

Après avoir exposé fort en détail tous ces principes fondamentaux de l'orchidéologie, M. Richard trace, comme exemples de leur application, les caractères génériques des orchidées d'Europe. Avec des espèces mal agrégées à certains genres, il en établit plusieurs nouveaux.

Voici la distribution qu'il propose des genres d'Europe.

§ 1. Pollen sectile : Caudicule rétinaculifère.
- A. Rétinacles bursiculés.
  - a. Un seul rétinacle, commun aux deux masses.
    Serapias. Loroglossum. Anacamptis.
  - b. Deux rétinacles.
    Orchis. Ophrys. Nigritella.
- B. Rétinacles nuds.
  Gymnadenia. Platanthera. Herminium. Chamorchis.

§ 2. Pollen sectile : nul rétinacle.
Goodyera. Epipogum.

§ 3. Pollen granuleux.
- A. Une anthère.
  Limodorum. Spiranthes. Neottia. Cephalanthera. Epipactis.
- B. Deux anthères.
  Cypripedium.

§ 4. Pollen solide.
- A. Masses composées de deux massettes.
  - a. Loges de l'anthère simples.
    Calypso. Liparis. Malaxis.
  - b. Loges de l'anthère bilocellées.
    Corallorhiza.

Il donne ensuite au caractère de chaque section tout le développement dont il est susceptible.

Il termine son travail par l'indication des espèces de chaque genre.

Une planche, où les principales modifications de la structure des organes sexuels sont figurées avec exactitude, en rend l'intelligence plus facile et plus claire.

Quoique le Mémoire de M. Richard ait principalement pour but d'éclairer les orchidées d'Europe, les botanistes y trouveront des principes généraux applicables à celles de toutes les parties du monde.

Il y a lieu d'espérer que ce travail, résultat de nombreuses et difficiles recherches, les excitera à coopérer au perfectionnement de cette famille intéressante, par des descriptions plus complètes et plus exactes qu'elles ne l'ont été jusqu'à ce jour.

Il n'est presque aucune des subdivisions de nos analyses que nous ne pussions enrichir des observations que M. de Humboldt a recueillies dans son grand voyage, et qu'il a toujours l'attention de communiquer à l'Académie à mesure qu'il les rédige. Ses observations astronomiques, son nivellement barométrique des Cordillières, sa géographie des plantes, son tableau des régions équinoxiales, ses recherches sur les monumens des peuples indigènes de l'Amérique, et une partie de ses observations de zoologie et de la relation historique de son voyage, ont été annoncées dans leur temps par nous ou par notre collègue, et sont maintenant livrées au public ; mais parmi toutes ces belles acquisitions, celles qui se distinguent peut-être le plus par leur nombre et par leur

magnificence sont celles qui se rapportent à la connaissance spécifique et systématique des plantes.

Le choix de plantes équinoxiales, les monographies des rhexias et des mélastosmes, en nous faisant connaître tout l'éclat dont la nature a embelli la végétation des pays chauds, nous font admirer le zèle et la sagacité des deux voyageurs qui en ont recueilli les productions, et le talent des artistes qu'ils ont chargés de les représenter.

Mais l'un des naturalistes, M. Bonpland, est retourné dans le pays qui lui a procuré de si riches récoltes. Il veut y en faire de nouvelles, et enrichir encore une fois nos jardins et nos musées; et pour accélérer la publication du nombre immense d'espèces qui restaient à faire connaître, M. de Humboldt a dû chercher un autre collaborateur. M. Kunth, professeur de botanique à l'université de Berlin, s'est chargé de décrire les genres et les espèces nouvelles ou peu connues, rapportées par MM. de Humboldt et Bonpland. Le nombre en sera de 4000, dont 3000 au moins sont entièrement nouvelles pour les botanistes. Elles occuperont cinq ou six volumes in-folio, dont le premier, qui renferme les monocotyledones au nombre de 800, est déja publié, et dont le deuxième sera bientôt terminé. On imprimera en même temps le quatrième qui sera entièrement consacré à la famille des composées.

M. Kunth, en décrivant un si grand nombre d'espèces, a été conduit à envisager les familles des plantes d'après des vues générales. Il les a soumises à une nouvelle révision, et a établi des sections nouvelles et de nouveaux genres en grand nombre, revu et rectifié les caractères des genres anciens.

A la fin de chaque section, M. de Humboldt fait connaître dans des notes spéciales la variété des formes qui abondent le plus sous chaque latitude, et l'influence de la lumière, de la chaleur et de l'humidité sur la multiplication de chaque tribu de végétaux.

ZOOLOGIE.

M. Delamark travaille avec une rare persévérance à la publication de son Histoire naturelle des animaux sans vertèbres. Le quatrième volume a paru cette année. Il continue et termine la classe des insectes. L'auteur y expose avec soin, et y range dans l'ordre qui lui a paru le plus naturel, ceux des genres établis par les entomologistes qu'il a jugé devoir adopter ; mais l'étendue à laquelle il s'est restreint ne lui a pas permis de donner, comme dans les classes précédentes, l'énumération détaillée des espèces. Il se borne à citer comme exemple un certain nombre des plus remarquables, en s'attachant de préférence à celles de notre pays. Les naturalistes desirent vivement qu'il reprenne dans les volumes suivans, et sur-tout quand il sera arrivé à la classe des mollusques, les énumérations complètes des espèces connues, qui ont fait des premiers volumes un travail si important pour la science.

M. Daudebart de Férussac, qui étudie depuis long-temps avec beaucoup de soin les coquilles de terre et d'eau douce, ainsi que leurs animaux, a présenté le plan d'un grand ouvrage déja fort avancé, où il les fera représenter en couleurs naturelles, et dans lequel il réunira tout ce que l'on a

découvert sur leur organisation et sur leurs habitudes. Il complétera ainsi sur un point important l'histoire naturelle des animaux sans vertèbres.

Il n'est personne qui n'ait entendu parler, presque dès l'enfance, de l'industrie laborieuse et des ouvrages savans de l'abeille domestique ; et tous ceux qui ont eu occasion de lire les Mémoires de Réaumur ont été sans doute vivement frappés des procédés divers, des moyens aussi ingénieux que compliqués, inspirés par la nature à cette multitude d'abeilles sauvages qui peuplent nos champs, nos prairies et nos forêts. M. Walckenaer, digne membre de l'académie des belles-lettres, qui s'est distingué aussi par un grand nombre de recherches du genre de celles qui occupent l'académie des sciences, vient d'ajouter des faits très-intéressans à tous ceux que l'on connaissait déja sur l'instinct de ce genre admirable. Dans cette prodigieuse quantité de sous-genres que les naturalistes ont été obligés d'établir, pour classer nettement les innombrables espèces d'abeilles, il s'en trouve un que l'on a nommé *halicte*, qui appartient à la tribu des andrènes, et dont le caractère particulier consiste en un sillon longitudinal sur le dernier anneau de l'abdomen des femelles. Une espèce de ces halictes, de petite taille, vit en société ; elle creuse en commun, dans la terre, un trou qui pénètre à cinq ou six pouces et communique latéralement avec sept ou huit cavités distinctes, élargies à leur fond et servant d'alvéole à une larve. Ces petits halictes ne travaillent à leur nid que la nuit ; pendant le jour, ils vont recueillir sur les fleurs le pollen et le suc mielleux dont ils forment les boules destinées à la nourriture de leurs larves.

Il n'y a point de neutres parmi les halictes, et les femelles, qui prennent seules part à l'ouvrage, forment environ les trois quarts des individus. Le plus grand soin de ces petits animaux est de faire tour-à-tour une garde attentive à l'entrée de leur trou, et de n'y laisser pénétrer que les membres de la société. En effet des ennemis de plusieurs genres, que M. Walckenaer fait connaître, cherchent à s'y glisser, les uns pour dévorer la pâtée mielleuse ramassée par les halictes, les autres pour y déposer des œufs, dont il doit éclore des petits qui dévoreront les larves. Un ennemi plus cruel encore est le cercère orné, insecte de la famille des crabrons, qui creuse des trous aux mêmes endroits que les halictes, enlève ceux-ci au moment où ils veulent entrer chez eux, les pique de son aiguillon pour les affaiblir, et les enterre pour servir de provision à sa propre larve.

Une espèce d'halicte plus grande creuse une grande cavité arrondie, où elle construit en terre les petites cellules qui doivent recevoir ses larves.

Le mémoire de M. Walckenaer, qui a été imprimé, contient, outre ces observations sur les mœurs de deux espèces particulières, une description exacte de ces espèces, leur comparaison avec les espèces voisines, et la description des insectes qui les attaquent de diverses manières.

On connaît en Amérique une énorme araignée, que les zoologistes rangent aujourd'hui dans la subdivision dite des *mygales,* et que l'on a nommée *aviculaire,* parce que sa taille d'un pouce et demi de longueur, pour le corps seulement, lui permet d'attaquer jusqu'aux petits oiseaux; M. Moreau de Jonnès a donné un Mémoire sur ses mœurs, qu'il a obser-

vées à la Martinique : elle ne file point, mais elle se loge dans les crevasses des roches, et se jette de vive force sur sa proie; elle tue les colibris, les oiseaux-mouches, les petits lézards, qu'elle a soin de saisir toujours par la nuque, comme si elle savait que c'est l'endroit par où ils peuvent être plus aisément mis à mort. Ses fortes mâchoires paraissent verser quelque venin dans les plaies qu'elles font; car on regarde ces plaies comme beaucoup plus dangereuses qu'elles ne le seraient par leur seule profondeur. Elle enveloppe dans une coque de soie blanche des œufs, au nombre de 1800 ou de 2000, et cette fécondité, jointe à la ténacité de sa vie, aurait bientôt couvert le pays de cette espèce hideuse et cruelle, si la nature ne lui avait pas donné, dans les fourmis rouges, des ennemis actifs et innombrables qui détruisent la plus grande partie des petites araignées à mesure qu'elles éclosent.

M. l'abbé Manesse a fait, depuis plus de 40 ans, des œufs des oiseaux l'objet particulier de ses études; il en a recueilli dans les marais de la Hollande et de la Hongrie, sur les rochers de l'Ecosse et de la Suède. Son absence l'a fait considérer comme émigré et lui a fait fermer pendant long-temps les portes de sa patrie. A son retour, il a trouvé détruites une partie des planches qu'il avait fait graver. Rien n'a pu le rebuter : constamment occupé de cette unique passion, il a rassemblé les œufs de 216 espèces d'Europe; il les a décrits, il les a peints tous par des moyens qui lui sont particuliers; il a donné tous les faits relatifs aux habitudes des oiseaux, à leurs nids, à leur manière de couver, dont ses recherches l'ont rendu témoin, et, d'après ce que l'Académie a vu de son travail, elle pense qu'il remplira une lacune de

l'histoire des oiseaux que plusieurs observateurs précédens étaient encore loin d'avoir comblée d'une manière aussi satisfaisante.

M. de Humboldt a décrit un oiseau de l'Amérique aussi singulier par ses mœurs que par sa conformation. Sa taille est celle d'un coq; son bec est large et fendu comme celui d'un engoulevent, mais la double dentelure qu'il a de chaque côté le rapproche des pies-grièches ; son plumage est celui d'un oiseau de nuit. En effet il se tient le jour dans des cavernes, et y niche ; on ne le voit sortir qu'au crépuscule ou au clair de lune. Cet oiseau fournit en quantité une graisse fluide, inodore et plus transparente que l'huile d'olive, que les habitans du voisinage emploient à la préparation de leurs alimens. C'est d'après cette propriété que M. de Humboldt lui a donné le nom systématique de *Stéatornis*. A Cumana, on l'appelle *Guacharo*.

Ce savant voyageur continue à donner, dans ses observations de zoologie, les insectes recueillis par M. Bonpland dans l'Amérique méridionale et décrits par M. Latreille, qui s'est chargé aussi de décrire, dans les cahiers prochains, les coquilles rassemblées le long des côtes de ce pays.

M. Palissot de Beauvois a terminé le premier volume des insectes que lui ont procurés ses voyages d'Afrique et d'Amérique.

ANATOMIE COMPARÉE.

Dans notre analyse de 1807, nous avons annoncé les travaux entrepris par M. le chevalier Geoffroy-Saint-Hilaire, dans

la vue de porter beaucoup plus loin qu'on ne l'avait fait avant lui, l'analogie de toutes les parties du squelette dans les diverses classes d'animaux; et, dans celle de 1812, nous avons indiqué quelques modifications proposées par M. Cuvier à la partie des résultats de M. Geoffroy, qui se rapporte aux os de la tête.

Il est bien constant aujourd'hui, d'après cette suite de recherches, que le crâne et la face des vertébrés ovipares, c'est-à-dire des oiseaux, des reptiles et des poissons, se composent d'os correspondans les uns aux autres et formant un ensemble analogue; que cet ensemble, sans répondre entièrement aux os qui composent les mêmes parties dans les fœtus des mammifères, s'en rapproche toutefois plus que de ceux des mammifères adultes; que la différence la plus essentielle entre les mammifères et les ovipares consiste en ce que, dans ceux-ci, plusieurs parties du temporal, du sphénoïde et du palatin, demeurent détachées et mobiles, et que du premier de ces os il ne reste, dans la composition du crâne, que ce qui est nécessaire pour contenir le labyrinthe de l'oreille.

Mais on n'est pas arrivé à la même certitude à l'égard de cet appareil volumineux et compliqué que les poissons emploient à leur respiration, et l'on n'a point encore clairement retrouvé dans la charpente osseuse des animaux terrestres, les vestiges de ces nombreuses pièces qui soutiennent les opercules, la membrane branchiostége et les branchies.

M. Cuvier, conduit par l'analogie des autres vertébrés, et spécialement par celle des reptiles batraciens, lesquels ont, pendant quelque temps, des branchies plus ou moins semblables à celles des poissons, et dont quelques-uns con-

servent même ces organes pendant toute leur vie; M. Cuvier, disons-nous, a considéré les grands os qui portent la membrane branchiostége comme représentant l'os hyoïde, mais n'a pas cru pouvoir retrouver dans le squelette des animaux à poumon les analogues ni des opercules, ni de l'appareil spécialement consacré à porter les branchies.

M. de Blainville a cherché à déterminer la nature de l'opercule. Comme la mâchoire inférieure des oiseaux et celle des reptiles se divisent en six pièces pour chaque côté, et qu'on n'en voit communément que deux à celle des poissons, il a pensé que les quatre pièces qui composent l'opercule peuvent être démembrées de la mâchoire; mais M. Geoffroy annonce que cette idée n'est plus admissible, depuis que M. Cuvier a reconnu dans la mâchoire de *l'esox osseus* les mêmes divisions que dans celle des autres vertébrés ovipares, et sur-tout depuis que M. Geoffroy lui-même a généralisé cette observation à tous les poissons osseux.

M. Geoffroy a donc fait de nouvelles études de toutes ces parties, et a présenté ses résultats à l'Académie en plusieurs Mémoires. Le premier a pour objet l'opercule; son opinion à cet égard est très-hardie, et cependant c'est peut-être, dans toute sa théorie, celle qu'il sera le plus difficile d'attaquer, du moins en n'employant que la voie de comparaison.

L'auteur pense que les quatre pièces reconnues depuis long-temps dans l'opercule, et une cinquième plus petite, qui s'y montre quelquefois séparée des autres, répondent au cadre du tympan et aux quatre osselets intérieurs de l'oreille des quadrupèdes. Selon lui, le cadre du tympan est ce que M. Cuvier nomme préopercule. L'opercule répond à l'étrier, l'interopercule au marteau; le subopercule à l'enclume, et la

petite pièce qui s'en détache quelquefois à l'osselet lenticulaire. Il trouve une certaine ressemblance de position, et même de figure, entre ces parties que l'on avait crues si étrangères les unes aux autres. La vaste communication de la cavité branchiale avec la bouche lui paraît représentée dans les animaux à poumons par le conduit de la trompe d'Eustache. En conséquence, M. Geoffroy doute que les osselets de l'oreille soient primitivement et essentiellement destinés à l'ouïe ; il pense qu'employés avec tout leur développement pour la respiration des poissons, ils se réduisent dans les autres classes à un état rudimentaire, à-peu-près comme ces doigts qui, bien visibles et bien mobiles dans certains quadrupèdes, se rappetissent et se cachent sous la peau dans des quadrupèdes d'espèces voisines, et n'y servent plus, pour ainsi dire, qu'à guider l'anatomiste dans les sentiers pénibles de l'analogie.

Mais comme l'on ne compte communément qu'un seul osselet dans la caisse de l'oreille des reptiles et des oiseaux, on pouvait objecter que les quatre osselets des mammifères ne conduisaient pas d'une manière continue à ces quatre grands os de l'opercule des poissons; et qu'il se trouvait dans la série des analogies une sorte d'hiatus qu'il fallait combler. M. Geoffroy l'a essayé : pour cet effet, il divise d'abord en trois parties cet osselet unique des oiseaux et des reptiles ; sa branche, recourbée et embrassée dans la membrane du tympan répond, selon lui, au marteau ; la tige qui traverse la caisse, à l'enclume; la platine qui ferme la fenêtre ovale, à l'osselet lenticulaire; et il croit avoir retrouvé l'étrier dans une double branche enfoncée plus intérieurement. Il y aura

à vérifier si cette dernière partie ne serait pas simplement la cloison du limaçon.

Le deuxième et le troisième Mémoires de M. le Chevalier Geoffroy ont pour objet de développer sa proposition, avancée en 1807, que les grandes branches osseuses qui portent la membrane branchiostége des poissons, et les osselets ou rayons, répondent au sternum des oiseaux.

Il fait d'abord bien connaître la structure de ces branches, et ne dissimule pas le fait le plus fort que l'on puisse lui objecter, c'est qu'elles sont suspendues aux os styloïdiens absolument comme les cornes supérieures de l'os hyoïde des mammifères.

A ces os styloïdiens, qui eux-mêmes ne peuvent être méconnus dans les poissons, tiennent de chaque côté une première grande pièce, suivie d'une seconde encore plus grande; et c'est à ces deux-là, ou à l'une des deux, qu'adhèrent les rayons branchiostéges. Entre les deux grandes pièces, à l'endroit où elles se rapprochent, en sont quatre petites, deux de chaque côté; l'une postérieure, et l'autre antérieure. En avant des deux antérieures, est l'os impair de la langue; en arrière des deux postérieures, une suite de trois os également impairs, auxquels s'articulent de chaque côté les arcs branchiaux; et enfin, en dessous des quatre, encore un os impair, comprimé d'ordinaire verticalement, et qui sert à l'attache de différens muscles.

Le nombre des pièces de l'os hyoïde, dans les quadrupèdes et dans les oiseaux, étant assez variable, le nombre de celles qui entrent dans la composition des parties que nous venons de décrire, n'étaient pas un obstacle à ce qu'on vît encore, dans cet ensemble, un os hyoïde; et leur position, leurs

connexions, leur figure générale, et leurs fonctions avaient également semblé favoriser cette idée.

Mais M. Geoffroy ayant, dès l'origine, considéré les rayons branchiostéges comme des côtes et comme répondant spécialement aux côtes sternales, c'est-à-dire à ce qu'on appelle, dans l'homme, cartilages des côtes, a dû chercher à trouver des portions de sternum dans les parties auxquelles ces rayons s'attachent.

Pour réaliser cette idée, il a étudié le sternum et l'os hyoïde des divers vertébrés, en prenant ces parties dans les individus jeunes, où les centres d'ossification n'étaient pas encore confondus. Dans le sternum des oiseaux, il a trouvé constamment une grande pièce centrale, celle dont le milieu porte cette crète si remarquable, en forme de carène de navire, et à laquelle s'attachent en avant les grandes apophyses coracoïdes des omoplates; une latérale antérieure, à laquelle s'articulent les côtes; une latérale postérieure, qui forme ces angles, long-temps percés ou échancrés par un espace membraneux; enfin, une cinquième impaire plus petite que les autres et placée en avant de la grande, entre les articulations coracoïdes des apophyses. Il nomme la grande pièce *ento-sternal;* la petite, en avant, *épi-sternal;* la latérale antérieure, de chaque côté, *hyo-sternal*, (parce qu'elle donne attache au muscle sterno-hyoïdien); et la latérale postérieure, *hypo-sternal.*

Le sternum des reptiles, particulièrement celui des tortues et celui des lézards, lui offre des analogies et des différences curieuses sur lesquelles nous ne nous étendrons pas ici parce qu'elles importent moins à la discussion principale.

Dans l'os hyoïde des mammifères, M. Geoffroy trouve con-

Q 2

stamment un corps qu'il nomme *basi-hyal*; deux cornes thyroïdiennes, ou aidant à suspendre le cartilage thyroïde, celles qu'on nomme les grandes dans l'homme, mais qui sont les plus petites dans la plupart des animaux (il les appelle *glosso-hyaux*); deux autres cornes qui suspendent l'os aux apophyses styloïdes: ce sont les petites cornes de l'homme; mais dans les autres animaux, ce sont presque toujours les plus grandes. Elles se composent ordinairement chacune de deux pièces que M. Geoffroy nomme *apo-hyaux* et *cérato-hyaux;* et l'os styloïde, qui est détaché du crâne dans tous les mammifères, l'homme et les singes exceptés, prend le nom de *stylo-hyal;* enfin, une proéminence impaire, partant du milieu de l'os et se dirigeant en avant, qu'il appelle *uro-hyal*, par des raisons que nous dirons tout-à-l'heure; elle se divise aussi quelquefois en deux ou trois pièces; M. Geoffroy l'a vue ainsi dans le cheval.

Ces faits posés, M. Geoffroy cherche l'analogie de l'hyoïde des oiseaux avec celui des mammifères. Il admet que les grandes cornes des premiers répondent à celles des autres, mais que, ne trouvant point d'attaches styloïdiennes, elles se portent autour de l'arrière-crâne; il suppose ensuite dans le corps de l'os un mouvement de bascule qui porte les cornes thyroïdiennes en avant, pour former l'os de la langue qu'il trouve effectivement divisé en deux pièces latérales dans le geai. Ce mouvement aurait porté en arrière la proéminence impaire, devenue ainsi une espèce de queue sur laquelle repose le larynx; c'est pourquoi il nomme cette proéminence *uro-hyal*.

Restait à faire l'application aux poissons.

Partant, comme nous l'avons dit, du principe que les

rayons branchiostéges sont des côtes, M. Geoffroy devait chercher les annexes latérales du sternum, dans les parties auxquelles ces rayons s'articulent, c'est-à-dire dans les deux grandes pièces des branches qui portent la membrane branchiostége. Il leur transporte en effet les noms qu'il a donnés aux annexes latérales du sternum des oiseaux, et appelle l'antérieure *hyo-sternal*, et l'autre *hypo-sternal*. Il cherche ensuite dans les deux petites pièces de chaque côté, placées à la réunion de ces deux grandes branches, les cornes styloïdiennes de l'os hyoïde, et nomme l'une de ces petites pièces, l'antérieure, *cérato-hyal*, et l'autre *apo-hyal;* l'os de la langue, ici comme dans les poissons, est pour lui l'analogue des cornes thyroïdiennes ou de ses *glosso-hyaux*; le corps de l'os et sa queue, ou le *basi-hyal* et l'*uro-hyal*, il les cherche dans cette suite de trois os impairs placés entre les arcs branchiaux. Enfin l'os impair et vertical, placé sous tout cet appareil, M. Geoffroy le regarde comme répondant à son *épi-sternal*, et il suppose que la partie moyenne du sternum des oiseaux, l'*ento-sternal*, manque dans les poissons.

On voit que l'auteur est obligé d'admettre une sorte de fusion et d'entrelacement du sternum et de l'hyoïde, et de supposer que les annexes sternales sont venues s'intercaler entre les os styloïdes et le reste des cornes styloïdiennes de l'hyoïde; et ce sera sans doute, nous le répétons, une des grandes difficultés qu'on lui opposera. Toutefois, avant de prononcer, il sera nécessaire de voir et d'apprécier dans son ouvrage une infinité de détails pleins d'intérêt sur les analogies des muscles qui s'insèrent à ces diverses parties, et une foule d'idées ingénieuses sur le mécanisme qui, lorsqu'une des pièces osseuses est venue à manquer, a pu,

selon lui, entraîner les autres, les faire changer de position respective, et établir ces différences de connexions, embarrassantes pour ceux qui ne veulent reconnaître une pièce qu'autant qu'ils la retrouvent à-peu-près à la même place.

M. Geoffroy admet, par exemple, dans le sternum et dans les côtes sternales, qu'il regarde comme essentiellement consacrés à protéger le cœur et les organes de la respiration, une sorte de mobilité qui les ferait avancer ou reculer en même temps que ces importans viscères. Ainsi le sternum, placé dans les quadrupèdes à-peu-près sous le milieu de l'épine, rejeté dans les oiseaux sous la partie postérieure de cette colonne, serait porté en avant dans les poissons jusque sous le crâne; il dépasserait les apophyses coracoïdes, qui ne le retiendraient plus en arrière d'elles, comme dans les autres classes, parce qu'il manque dans les poissons de cet ento-sternal, ou de cette pièce moyenne où ces apophyses doivent s'appuyer.

Le quatrième et le cinquième Mémoires de M. Geoffroy ne seront pas sujets à autant de contradictions que les deux précédens. Il y traite des arcs branchiaux et des os pharyngiens, dont il voit les élémens dans le larynx, la trachée-artère et les bronches.

Rappelons-nous la chaîne mitoyenne de trois osselets auxquels l'auteur donne les noms de *basi*, d'*ento* et d'*uro-hyal.* Les trois premiers arceaux des branchies s'articulent de chaque côté à cette chaîne, par l'intermédiaire d'autant d'autres d'osselets, tandis que le quatrième arceau et l'os pharyngien inférieur s'articulent chacun immédiatement à son congénère, en arrière de la chaîne. Chaque arceau est lui-même brisé vers son tiers supérieur, et se trouve ainsi

composé de deux pièces; et aux extrémités des quatre branches supérieures de chaque côté, s'articule l'os pharyngien supérieur de ce côté-là, qui est d'ordinaire subdivisé en trois petites plaques. Les arceaux portent, comme tout le monde sait, le long de leur bord externe les lames cartilagineuses des branchies; et à leur bord interne, ils sont pour l'ordinaire armés de lames, de pointes, ou de tubercules, souvent hérissés de petites dents que l'on a nommées *branchiales*.

M. Geoffroy voit, dans les deux premières paires de ces osselets qui servent à unir les arceaux à la chaîne moyenne, les débris du cartilage thyroïde; dans la troisième paire, les représentans des cartilages arithénoïdes; et les os pharyngiens inférieurs, sont à ses yeux un démembrement du cartilage cricoïde, repoussé en arrière par les derniers arceaux qui s'articulent immédiatement à la chaîne moyenne. Mais pour se procurer dans les animaux à poumon quelque chose d'analogue aux pharyngiens supérieurs, l'auteur de ce Mémoire est obligé de détacher la lame inférieure du sphénoïde des oiseaux d'avec le reste de l'os auquel elle ne tient, il est vrai, que par un diploé assez lâche et encore interrompu par les cellules mastoïdiennes inférieures et par les trompes d'Eustache. Il faut même, pour établir l'analogie des pièces antérieures avec le larynx, qu'il admette que le cricoïde et les arithénoïdes ont glissé en arrière, et qu'au lieu de rester sur le thyroïde, ils se sont placés à sa suite.

Enfin M. Geoffroy voit dans les arceaux même des branchies, qu'il nomme *pleuréaux*, les représentans de certains cartilages transverses qui se trouvent aussi au nombre des

quatre dans les bronches des oiseaux, lorsqu'ils ont pénétré dans le poumon. Le nombre quaternaire des branchies lui paraît répondre à la division assez constante du poumon en quatre lobes. Les enfoncemens transverses, que la saillie des côtes produit dans le poumon des oiseaux, lui offrent une autre indication de cette division. Il n'est pas jusqu'aux tubercules, souvent hérissés d'épines qui garnissent les arcs des branchies, où il ne croie apercevoir des rudimens des anneaux de la trachée-artère. C'est pourquoi il les nomme *trachéaux*, et donne le nom de *bronchéaux* aux lames cartilagineuses disposées comme des dents de peigne, qui supportent le tissu vasculaire, partie essentielle de l'organe respiratoire des poissons.

Il nous est presque impossible d'entrer dans le détail de toutes les transpositions, de tous les mouvemens dans les pièces de la machine organique que ces analogies supposent, encore moins d'analyser toutes les raisons que l'auteur assigne à ces mouvemens; mais nous devons croire que les naturalistes, pour qui ces recherches ne peuvent manquer d'avoir beaucoup d'attrait, s'empresseront de les étudier dans l'ouvrage que M. Geoffroy va donner au public, avec les planches nécessaires pour rendre ses idées sensibles.

PHYSIOLOGIE.

Les expériences successives de Priestley, de Lavoisier, de Goodwin, de Bichat, de Legallois, ont éclairé de lumières inattendues la théorie de la respiration et de ses effets dans le corps vivant. On sait aujourd'hui que le sang devenu noir par sa dispersion dans tous les organes, le sang veineux en

un mot, ne peut reprendre la couleur vermeille, redevenir du sang artériel, qu'autant qu'il éprouve l'action de l'oxygène, et que de cette transformation en sang artériel, de ce rétablissement dans les qualités qu'il avait perdues, en se distribuant aux parties, dépend la faculté, dont il jouit, d'entretenir l'action du système nerveux, et, par le moyen de ce système, de renouveler sans cesse l'irritabilité musculaire, enfin, par cette irritabilité, de se donner à lui-même cette circulation perpétuelle qui en fait la source incessamment renouvelée de la vie.

Cependant il est des animaux, tels que les reptiles, où la connexion de la vitalité avec la circulation et avec la respiration semble moins intime, et où l'on peut suspendre pendant quelque temps l'une ou l'autre, ou toutes les deux ensemble, sans anéantir la sensibilité ni le mouvement volontaire.

L'on pouvait supposer que dans certains cas l'air agissait sur le sang, ou même immédiatement sur le nerf et sur la fibre, sans avoir besoin de l'intervention du poumon. L'on sait en effet que la principale modification, éprouvée par le sang lors de son contact avec l'oxygène, consiste à rétablir l'équilibre de ses élémens, en perdant son carbone superflu, qui se dissipe sous la forme d'acide carbonique.

Or les expériences de Spallanzani et de M. Ehrman ont prouvé que toutes les parties du corps animal, qui sont mises en contact avec l'oxygène, produisent de l'acide carbonique, et l'on devait croire qu'il s'y fait une sorte de respiration qui supplée plus ou moins à la respiration ordinaire, ou qui concourt avec elle.

M. Edwards, médecin, a voulu s'assurer d'abord de l'uti-

lité de cette respiration supplémentaire par des expériences directes. Des grenouilles, des crapauds et des salamandres, auxquels on avait enlevé le cœur, et où l'on avait supprimé par conséquent toute circulation et toute respiration pulmonaire, ont été placés dans de l'air, dans de l'eau ordinaire, et dans de l'eau privée d'air: le résultat constant des expériences a été que la vie s'est conservée beaucoup plus long-temps dans l'air. Les individus qui paraissaient morts dans l'eau reprenaient vie quand on les exposait à l'air, et l'on pouvait les tuer et les ressusciter ainsi à plusieurs reprises. La vie se conserve dans l'eau aérée un peu plus long-temps que dans l'eau privée d'air.

Ainsi l'air a dans ces expériences une influence sur la vitalité, indépendante du poumon et de la circulation. Tel est le résultat quand on supprime les deux fonctions à-la-fois.

Si l'on se borne à empêcher l'animal de respirer en lui fermant le larynx, l'action de l'air au travers de la peau est encore très-sensible; la vie se prolonge dans ce fluide beaucoup plus que dans l'eau, et il se développe de l'acide carbonique; mais, soit dans l'eau, soit dans l'air, elle se prolonge aussi beaucoup plus que si l'on enlève le cœur; en sorte que la circulation de ce sang, qui ne respire plus que par la peau, est encore bien plus avantageuse pour entretenir la vitalité, que la simple action directe de l'air sur un corps où la circulation ne subsisterait plus.

Mais ce qui dut paraître bien remarquable, c'est que ces animaux intacts, enfermés de toute part dans du plâtre, ou enterrés dans du sable, vivent beaucoup plus long-temps que ceux qu'on retient dans l'eau, que ceux mêmes qu'on tient dans de l'air sec.

Le premier point s'éclaircit assez vîte. M. Edwards s'assura que le sable et le plâtre laissaient passer de l'air; et quand il les couvrait de mercure, l'effet n'avait plus lieu.

Mais comment le plâtre et le sable prolongent-ils la vie plus que l'air sec? Des expériences exactes ont prouvé à M. Edwards que c'est en retardant la transpiration qui est très-funeste aux salamandres et aux grenouilles.

La même raison fait que ces animaux périssent dans le vide plutôt que dans l'eau.

Il ne faut pas croire cependant que leur existence dans les corps solides puisse se prolonger indéfiniment; et M. Edwards n'a rien obtenu qui justifie les récits de quelques auteurs touchant des crapauds qui auraient été trouvés vivans dans des blocs de marbre ou d'autres pierres naturelles.

Les physiologistes sont loin d'être d'accord sur toutes les circonstances du merveilleux phénomène de la circulation: l'irritabilité du cœur et les contractions qu'elle produit en sont bien, de l'aveu de tout le monde, la cause principale; mais il reste à déterminer si les artères prennent une part active à ce mouvement, et quelle est cette part en supposant qu'elle existe.

Les anatomistes ont admis long-temps, dans le tissu des artères, une tunique musculaire et irritable dont les contractions successives devaient porter plus loin le sang arrivé du cœur; mais on reconnaît aujourd'hui que cette tunique, au moins dans les grandes artères, n'est qu'un être de raison. Bichat a prouvé, de plusieurs manières, que leurs fibres n'ont rien de commun avec celles des muscles, et il ne les considère, par rapport à la circulation, que comme des tubes

entièrement passifs et obéissans à l'impulsion du cœur; mais il n'étend pas les effets de cette impulsion jusqu'au travers des derniers petits vaisseaux du système capillaire, et il pense même que le mouvement du sang s'arrêterait à ce passage sans l'intervention de ce qu'il appelle la contractilité organique ou la tonicité des parties; et c'est aussi dans cette contractilité que cet ingénieux physiologiste cherche les causes des variations locales que les parties éprouvent de la plus ou moins grande abondance du sang qui y afflue.

M. Magendie a présenté à l'Académie un Mémoire où il cherche à établir des idées différentes; il n'admet d'irritabilité ni dans les grandes artères ni dans les petites; mais il reconnaît dans les unes et dans les autres une élasticité qui leur permet de se dilater quand le cœur y pousse le sang, et en vertu de laquelle elles se contractent sur ce sang qu'elles ont reçu, et le poussent plus loin; il prouve cette élasticité par l'inspection et par cette expérience, qu'en liant une artère en deux points et en l'ouvrant entre les ligatures, le sang jaillit et l'artère se contracte. C'est par cette élasticité qu'il explique comment le mouvement du sang, dû à une cause intermittente, les contractions du cœur, devient cependant à-peu-près uniforme, parce que dans l'intervalle des contractions du cœur, celles des artères y suppléent en reproduisant sur le sang l'action qu'elles ont elles-mêmes éprouvées de la part du cœur, comme il arrive dans les pompes de compression. M. Magendie pense aussi que le mouvement du sang dans les veines dépend uniquement de l'action du cœur et des grandes artères, sans que le système capillaire y ajoute rien; et il a fait, à ce sujet, une expérience qu'il regarde comme démonstrative. Si on sépare, dans un en-

droit convenable, l'artère et la veine crurale, et qu'on lie fortement le reste de la cuisse, on verra le sang jaillir avec plus ou moins de force de la veine, selon qu'on laissera l'artère libre ou qu'on la comprimera. On trouvera l'exposé de cette théorie et le résumé de ces expériences dans le deuxième volume des *Elémens de physiologie* de l'auteur, qui a été publié cette année.

Il est un fameux problême de médecine légale qui a souvent embarrassé les juges autant que les médecins, que les codes ont résolu parce qu'il fallait le résoudre, mais sur lequel la nature est loin de se conformer toujours à la loi humaine : c'est celui de la durée de la grossesse. Afin de prévenir beaucoup de fraudes, le législateur s'est exposé à commettre quelques injustices, et il a fixé les termes dans lesquels la loi reconnaîtrait la légitimité des naissances : il a profité, à cet égard, des observations faites par les accoucheurs et par les médecins ; mais des causes nombreuses, et qu'il est inutile d'expliquer au long, rendent l'instant de la conception dans l'espèce humaine si difficile à constater, qu'il était bien difficile aussi d'arriver, sur cette question, à un résultat concluant. Depuis long-temps l'on avait proposé de faire des expériences sur les animaux, car il n'y a point d'apparence que les limites de leur gestation soient, à proportion, ni plus ni moins fixes que celles de la femme. M. Tessier, qui avait saisi cette idée depuis plus de quarante ans, a constamment tenu registre des faits qu'il a observés, ou qui lui ont été communiqués par des observateurs exacts.

La latitude qui en résulte est bien grande.

Les vaches, dont le terme est le plus communément de neuf mois et quelques jours, ne vèlent quelquefois qu'à dix mois et vingt et un jours; mais quelquefois aussi elle vèlent à huit mois. La différence, entre la plus longue gestation et la plus courte, peut aller à quatre-vingt-un jours.

Le terme ordinaire des jumens est de onze mois et quelques jours, mais elles peuvent le retarder jusqu'à près de quatorze mois. La plus grande différence va à cent trente-deux jours. Les prolongations dans cette espèce sont plus nombreuses que dans les vaches.

Les brebis portent cinq mois; leurs limites sont plus restreintes; les différences en plus et en moins ne s'éloignent que de onze jours. Les aberrations précoces y sont les plus communes.

La latitude diminue, comme on devait s'y attendre, dans les gestations courtes, mais pas exactement dans la proportion de leurs durées. Les chiennes portent deux mois, et leurs limites sont de quatre jours; et les lapines, qui ne portent qu'un mois, ont huit jours de différences extrêmes.

Et ce n'est ni l'âge des mères, ni celui des pères, ni leur constitution, ni les races dont ils proviennent, ni le régime qu'on leur fait suivre, ni le sexe des petits, qui occasionnent ces différences; on est réduit à en rechercher la cause dans des dispositions intérieures, qui ont, jusqu'à présent, échappé à tous les yeux.

M. Tessier publiera les tableaux des faits qui lui ont fourni ces résultats; ils portent sur cinq cent soixante-dix-sept vaches, quatre cent quarante-sept jumens, neuf cent

douze brebis, cent soixante et une lapines, ving-cinq truies, huit bufflesses, quatre chiennes, et deux ânesses; et l'auteur a soigneusement écarté de ses séries toutes les observations suspectes.

MÉDECINE.

La folie, cette maladie si triste et si propre à humilier notre orgueil, excite d'autant plus notre étonnement qu'elle est moins complète, et qu'elle se concentre plus exclusivement sur certains objets. Qu'un homme devienne maniaque, qu'il tombe dans une fureur que rien ne peut calmer, ou dans une imbécillité qui le ravale au-dessous des animaux, nous ne voyons qu'une affection générale du cerveau qui rend cet instrument de l'ame inhabile à ses fonctions; mais qu'un homme, sain d'ailleurs de corps et d'esprit, jouissant de sa raison, conservant ses habitudes, s'imagine éprouver des sensations que rien d'extérieur n'occasionne; qu'il croie voir des spectacles enchanteurs ou affreux, entendre des discours, de la musique, respirer des odeurs déterminées; que, convaincu de la réalité des objets qu'il aperçoit, il applique les règles ordinaires du bon sens aux actions auxquelles cette conviction le détermine, c'est ce qui semble à peine possible à ceux qui n'en ont pas été les témoins. Cependant c'est un genre de maladie qui n'est pas rare, qui ne l'a jamais été, et dont la connaissance peut expliquer une multitude de traits souvent bien importans de l'histoire morale du genre humain.

M. Esquirol, qui réserve à cette branche particulière des maladies de l'esprit, le nom d'*hallucination,* a présenté à

l'Académie un Mémoire où il établit qu'elles suivent une marche tantôt aiguë, tantôt chronique, et qu'on y observe, comme dans toutes les autres maladies, des progrès, des paroxismes, un déclin, souvent une terminaison heureuse. De grands changemens dans l'existence des personnes, ou des événemens propres à frapper vivement l'imagination, multiplient ce genre d'accident, et aucune époque ne le favorisa davantage que les trente années que nous venons de parcourir. Aussi les exemples rapportés par M. Esquirol sont-ils aussi nombreux que variés. Quelquefois l'illusion n'affecte qu'un ou deux sens; d'autres fois elle les atteint tous. Tel homme, déplacé à la suite d'accusations graves, croit sans cesse entendre des voix qui lui reprochent ses fautes; telle femme, dont la jeunesse a été livrée aux passions, voit et entend les êtres infernaux chargés de lui faire expier ses plaisirs; telle autre, adonnée à la vie contemplative, se voit enfin récompensée par une anticipation de toutes les jouissances de l'autre monde. Ces illusions peuvent être durables ou seulement momentanées. Il est tel individu qui n'a eu en sa vie qu'une vision, qu'un entretien avec des intelligences d'un autre ordre, mais sur qui cette maladie d'un instant a agi si fortement que rien ne le désabuserait. L'imagination est pour elle-même le plus puissant remède, et c'est en la frappant adroitement, en se prêtant pour quelque temps à ses erreurs, en cherchant à les détourner, que le médecin moraliste parvient à les guérir; mais il est encore plus sûr d'en prévenir les aberrations en formant d'avance le jugement de la jeunesse par une instruction solide.

Nous avons parlé, dans notre Histoire de 1813, des ex-

périences de M. Magendie, qui tendaient à prouver que la cause directe du vomissement n'est pas une contraction immédiate de l'estomac lui-même, mais que ce mouvement désordonné vient d'une contraction des muscles qui entourent le ventre, et principalement du diaphragme, laquelle agit médiatement sur l'estomac; on avait dès-lors indiqué l'œsophage comme y participant peut-être autant que les muscles extérieurs; et il paraît, en effet, que dans de nouvelles expériences faites par M. Maignant, le vomissement a eu lieu quoique l'on eût coupé, aux animaux sur lesquels on opérait, les muscles du diaphragme, qu'on eût détaché les ailes de cette cloison, et que l'on eût fendu transversalement les muscles du bas ventre.

M. Portal, dans un Mémoire sur le vomissement, qu'il a lu cette année à l'Académie, après avoir rappelé d'anciennes expériences qui lui sont propres, et dans lesquelles, après avoir coupé les muscles du bas ventre, on avait vu l'estomac se dilater et se contracter avec force, pendant que le diaphragme était refoulé dans la poitrine, a exposé la manière dont il conçoit que s'opère la réjection des alimens.

En conservant à l'estomac la vertu contractile qu'on lui avait toujours attribuée, il le croit cependant puissamment aidé par les muscles transverses de l'abdomen, qui, en se contractant, refoulent contre lui le foie et la rate, en même temps que leur aponévrose antérieure comprime presque immédiatement sa face antérieure lorsqu'il est rempli, et la repousse à-la-fois en arrière et en bas. Or, dans l'état ordinaire des choses, l'estomac, lorsqu'il se remplit, fait sur lui-même un demi-tour, pour porter sa face antérieure vers le haut, ainsi que l'a fait connaître Winslow, et la po-

sition qu'il prend alors en opérant un pli dans la direction du cardia, et en diminuant celui que forme le duodenum, contribue à rendre plus difficile le retour des alimens dans l'œsophage, et à faciliter leur passage dans les intestins. L'action des muscles transverses leur rend, au contraire, la marche inverse plus aisée, en rouvrant le cardia et en rétrécissant le duodenum ; aussi, toutes les fois qu'une cause maladive empêche l'estomac de prendre, lorsqu'il se remplit, la situation qui lui convient, le vomissement devient fréquent. M. Portal en cite un exemple, provenu d'une tumeur à l'épiploon, et un autre d'un engorgement sanguin dans la rate. Des remèdes appropriés ayant détruit les deux causes de dépression, l'estomac reprit ses mouvemens naturels, et les vomissemens cessèrent.

M. Girard, directeur et professeur d'anatomie de l'école vétérinaire d'Alfort, a présenté un Mémoire sur le vomissement, considéré dans les divers animaux domestiques. En général, plus l'insertion de l'œsophage dans le cardia se fait vers l'extrémité gauche; plus elle est évasée, plus les fibres charnues qui l'entourent sont faibles, plus le grand cul-de-sac est effacé, plus le pylore est resserré, plus le voile du palais est mobile et raccourci, et plus le vomissement est facile. Il l'est donc beaucoup dans les carnivores, dont l'estomac n'est presque qu'une dilatation un peu oblique du canal intestinal; il est déja pénible dans le cochon, où le cul-de-sac de gauche fait presque la moitié de tout le viscère, et où l'œsophage est fort rétréci et garni d'une couche charnue épaisse. Dans le cheval, où l'estomac éloigné des muscles du bas-ventre, peu fixé au diaphragme,

à cause du prolongement de l'œsophage dans l'abdomen, a de plus le cardia très-rapproché du pylore, traversant les parois obliquement et fortement entouré de lames charnues, le vomissement n'a pas lieu dans l'état naturel. Il est plus rare encore, s'il est possible, dans les ruminans, à cause de la complication de leurs quatre estomacs, de la manière singulière dont l'œsophage y aboutit, et des faisceaux musculaires qui en garnissent l'entrée. Toutefois, il peut se manifester dans ces animaux un vomissement contre nature, par suite d'une rupture de l'estomac ou de la membrane externe de l'œsophage, ou quand le cardia a perdu son énergie et n'oppose plus de résistance au retour des alimens. C'est un véritable état maladif, toujours accompagné de circonstances fâcheuses et souvent suivi de la mort.

Lorsque les cavités du cœur se dilatent outre mesure, il en résulte ce qu'on appelle *anévrisme du cœur*, et le plus souvent les parois de ces cavités s'amincissent; il leur arrive même de se rompre dans les endroits où elles sont devenues le plus minces : mais il s'en faut de beaucoup que ces circonstances soient générales, et que la dilatation du cœur ou de quelqu'une de ses cavités, soit toujours accompagnée d'amincissement de leurs parois.

M. Portal a lu à l'Académie un Mémoire très-étendu, où il rapporte un grand nombre de cas de dilatation, dans lesquelles l'épaisseur naturelle des parois s'était conservée et avait même quelquefois augmenté; la propre substance du viscère s'est gonflée, ou parce qu'elle a été convertie en graisse, ou parce qu'elle s'en est pénétrée, ou

parce qu'elle s'en est recouverte à l'extérieur, ou parce que de fausses membranes ont tapissé ses cavités, soit par dedans, soit par dehors, ou parce que les vaisseaux se sont gorgés de sang, ou, enfin, parce qu'il s'y est formé des infiltrations séreuses ou purulentes, ou même des hydatides.

Les cœurs dilatés et épaissis par un vice stéatomateux, sont quelquefois recouverts d'excroissances fongueuses en forme de végétation. On reconnaît quelquefois ce genre d'altération lorsque les symptômes généraux des maladies du cœur sont accompagnés d'engorgemens au cou et d'autres signes des scrophules; les anti-scrophuleux sont indiqués alors et n'ont pas toujours manqué leur effet. Dans les hydropisies qu'occasionne la dilatation du cœur par la pléthore de ses vaisseaux, la saignée est souvent utile, et elle l'est toujours contre cette pléthore quand on la reconnaît par les circonstances dans lesquelles les palpitations s'exaspèrent. Enfin, quand des infiltrations gonflent les parois du cœur, dans les personnes atteintes d'hydropisie, les remèdes généraux contre cette dernière maladie sont aussi appropriés à la maladie du cœur.

M. Portal expose un grand nombre de faits tirés de sa pratique, et qui viennent tous à l'appui de sa doctrine.

Le même savant médecin a lu un autre Mémoire, dans lequel il présente des doutes nombreux touchant la théorie que les médecins modernes paraissent s'être faite sur l'inflammation du péritoine ; il a observé, dans certains sujets, l'inflammation de cette membrane la mieux caractérisée, sans qu'elle ait été annoncée par aucun des sym-

ptômes que l'on croit lui être essentiels ; et lorsque ces symptômes avaient eu lieu, il a toujours trouvé quelqu'un des viscères du bas-ventre atteint d'inflammation; si le péritoine était enflammé en même temps, c'était toujours dans la partie voisine d'un ou de plusieurs organes eux-mêmes enflammés; d'où il conclut que la péritonite n'est pas une maladie plus distincte de l'inflammation des viscères abdominaux, que la frénésie ne l'est de l'inflammation du cerveau, ni la pleurésie de celle du poumon, ou de ce qu'on nomme vulgairement fluxion de poitrine.

De toutes les articulations de notre langue, l'R est la plus difficile pour nos organes, et la dernière que les enfans apprennent à bien prononcer; il est même des individus qui n'y parviennent jamais, et l'on n'en sera point étonné, lorsqu'on saura que cette lettre exige de la part des muscles, du larynx, du voile du palais, de la langue, de la mâchoire inférieure, et des lèvres, jusqu'à 26 mouvemens distincts, et qui tous ont été caractérisés par les physiologistes. M. Fournier a lu à l'Académie un Mémoire sur ce vice de langage, communément appelé *grasseyement*, et sur un moyen de le corriger lorsqu'il vient d'une paresse des organes, ou d'une mauvaise habitude, moyen dont il doit l'idée à M. Talma. Il consiste à exercer les individus qui grasseyent à substituer à la lettre R, dans les mots où elle est nécessaire, les deux consonnes muettes T, D, jusqu'à ce qu'ils soient habitués à les prononcer assez vîte pour les unir en quelque sorte en une seule. M. Fournier assure que cet exercice prépare si bien les muscles, que la lettre R leur devient ensuite très-facile à rendre, et il en a

fait l'expérience sur plusieurs individus; ce moyen ne reste impuissant que chez ceux où le grasseyement tient à une faiblesse intrinsèque et insurmontable.

CHIRURGIE.

Le rétrécissement de l'urètre, maladie cruelle et devenue trop fréquente, se traite d'après la méthode de John Hunter et de sir Éverard Home, son neveu, par la pierre infernale que l'on fixe à l'extrémité d'une bougie emplastique, et que l'on fait pénétrer ainsi dans le canal jusqu'aux carnosités et autres embarras qu'elle doit faire disparaître. M. Petit, jeune chirurgien, qui a reconnu les avantages de ce procédé, a trouvé cependant, à la manière dont on l'a pratiqué jusqu'à-présent, quelques inconvéniens auxquels il a cherché à remédier. Au lieu d'une bougie sujette à se ramollir, il emploie une sonde de gomme élastique, et de peur que le morceau de nitrate d'argent ne se détache et ne reste dans l'urètre, il change sa forme et le fixe à l'extrémité de la sonde par une substance résineuse; enfin il enduit de suif toute la surface de l'appareil excepté le point seul qui doit exercer son activité. Les commissaires de l'Académie qui ont été témoins des expériences de M. Petit, et qui en ont fait eux-mêmes d'aussi heureuses, attestent que l'action du caustique, que l'on croirait devoir être si douloureuse, se passe ordinairement sans accident, et presque sans faire souffrir le malade, sur-tout si le mal est chronique et si l'on a l'attention de ne rien brusquer.

Depuis long-temps l'usage du feu en médecine est vanté avec enthousiasme par les uns, repoussé avec amertume et terreur par les autres; et cependant il est impossible de ne pas reconnaître qu'en certains cas son application immédiate a guéri des maux demeurés rebelles à tout autre remède.

M. Gondret, jeune médecin, a dissipé par le fer chauffé à blanc, porté au sommet de la tête, brûlant les tégumens, entamant même quelques parties de l'os, des gouttes sereines, des epilepsies avec idiotisme, et d'autres affections chroniques et rebelles.

Les commissaires qui ont suivi pendant plusieurs mois ses opérations, en ont rendu le compte le plus satisfaisant. Ils ont parlé avec le même éloge d'une pommade employée par ce médecin pour imiter à volonté tous les degrés de l'action du feu. Elle se compose de doses égales de graisse de mouton, et d'ammoniaque. On fond la graisse au bain-marie, et l'on y verse petit-à-petit l'ammoniaque en agitant jusqu'au refroidissement. Ce savon ammoniacal, suivant le temps qu'on lui accorde, produit l'excitation, la rubéfaction, et va jusqu'à remplacer le vésicatoire, et même le cautère actuel, effets d'autant plus utiles qu'ils sont très-prompts, qu'on les arrête à volonté, et qu'ils n'ont en aucun cas les inconvéniens des cantharides.

Il arrive quelquefois qu'il se forme au cou une tumeur remplie d'eau, mais d'ailleurs semblable à un goître. Les chirurgiens qui ont anciennement eu occasion de traiter cette maladie, avaient soin d'en extraire petit-à-petit le liquide, afin de donner aux parois le temps de revenir peu-à-

peu sur elles-mêmes, et de prévenir la gangrène qu'amènent d'ordinaire une évacuation trop prompte, et sur-tout l'accès de l'air dans la cavité. M. Maunoir de Genève, qui a décrit de nouveau ce genre de tumeur, et lui a donné le nom d'hydrocèle du cou, en fait la ponction avec un trois-quarts, et le traverse ensuite par des sétons, pour empêcher un nouvel épanchement et favoriser le recollement des parois. Il n'emploie point d'injections qu'il serait difficile de rendre telles qu'elles n'eussent pas d'inconvéniens dans un sens ou dans un autre. Sa doctrine coïncide, à beaucoup d'égards, avec celle qu'enseignait, il y a bien des années, feu M. Tenon, et avec la pratique de nos plus habiles chirurgiens, nommément de M. Percy, qui a fait à l'Académie le rapport du Mémoire de M. Maunoir.

Quand le chirurgien est obligé de retrancher une main fracassée, gangrenée ou cariée, il la détache d'ordinaire entre l'avant-bras et le poignet, parce que la simplicité de cette articulation la rend facile à diviser, et que la plaie, peu étendue, guérit aisément. Mais dans quelques occasions rares le poignet pourrait n'être point attaqué. M. Troccon s'est occupé de la méthode que l'on aurait à suivre pour enlever le corps de la main, c'est-à-dire le métacarpe, en laissant le poignet adhérer à l'avant-bras. L'opération devient plus difficile, à cause des inflexions de la ligne que l'instrument doit suivre, et de l'étendue de la plaie, et peut-être cette difficulté n'est-elle point compensée par les avantages que peut procurer ce petit reste de main: tout au plus pourrait-il servir à attacher plus commodément une main artificielle de carton, ou d'autre composition immo-

bile; mais si cette main artificielle devait être disposée pour quelque mécanisme qui la rendît capable d'imiter en partie les mouvemens naturels, on pense qu'elle trouverait dans l'avant-bras un point d'appui plus solide.

M. Sédillot a présenté un Mémoire étendu sur un genre d'accident dont il s'est occupé depuis bien long-temps, et qu'il a étudié plus à fond qu'aucun de ses confrères; c'est la rupture des muscles. Il arrive quelquefois que, dans un mouvement inopiné et purement d'instinct, dans un faux pas, dans une chûte, lorsque, pour ainsi dire, à l'insu de la volonté, les muscles se contractent brusquement, irrégulièrement, et que toutes leurs fibres ne peuvent prendre une part égale à l'action, il arrive, disons-nous, que celles qui en supportent l'excès viennent à se rompre. Cet accident s'annonce d'ordinaire par un sentiment de déchirure, par du sang extravasé. M. Sédillot en apporte un grand nombre d'exemples; il en fait bien connaître les symptômes; il rend raison des phénomènes presque toujours singuliers qui les ont accompagnés et suivis, et il montre qu'une compression douce, uniforme et constante, en est le vrai remède. Si on la néglige, et que l'on perde le temps en cataplasmes et en fomentations, la partie ne manque guère de rester faible et émaciée; le meilleur moyen compressif, pour les membres qui en sont susceptibles, est le bas de peau de chien lacé. M. Sédillot s'en déclare le partisan; il n'emploie guère de topiques que dans les cas où aucun bandage n'est applicable.

M Rigaud, de Lille, a communiqué des recherches sur le mauvais air des contrées marécageuses, et particulièrement sur la nature de cette cause maladive que les Italiens désignent sous le nom d'*Aria-cattiva*. Il paraîtrait en résulter qu'aucune des raisons que l'on assigne communément aux maladies si communes dans certains cantons, tels que les environs de Rome, ni la transpiration interceptée, ni le défaut de plantations, ou de population, ne sont de nature à produire les effets funestes qu'on leur attribue, mais qu'il se forme réellement dans l'air, et dans les vapeurs qui le remplissent, un principe délétère d'une nature particulière.

ÉCONOMIE RURALE.

Les calamités de l'année 1816 ont engagé beaucoup de physiciens à des recherches sur les moyens de tirer parti des blés qui n'avaient pu mûrir, ou qui avaient été altérés par les pluies, et sur ceux de faire produire encore quelques végétaux utiles aux terres dont la récolte étoit détruite dès le printemps.

M. Proust s'est occupé du blé germé, et du pain que l'on peut en faire. Dès 1802, il avait reconnu que la germination rend le grain plus léger d'un dixième, qu'elle y double la proportion de la gomme et du sucre, et qu'elle y change l'état du gluten; or, comme c'est le gluten qui donne à la pâte la faculté de lever, c'est à rétablir sa proportion dans l'ensemble qu'il faut sur-tout penser, si l'on veut faire de bon pain avec du blé germé. On peut y parvenir en rafraîchissant le levain avec de bonne farine. Cette première

idée ayant réussi à M. Proust, il a voulu aller plus loin, et essayer si l'on ne pouvait pas faire encore un levain efficace avec la farine du blé germé lui-même; et il a trouvé que, dans une multitude de cas, elle n'est point assez altérée pour qu'on ne puisse en extraire encore ou y concentrer une quantité suffisante de gluten.

Quelques membres de l'Académie, qui appartiennent aussi à la société d'agriculture, MM. le baron Morel de Vindé, Yvart et Tessier, ont rédigé, par ordre du gouvernement, des instructions sur les plantes que l'on pouvait utilement semer au printemps dans les terres inondées pendant l'hiver. Ces instructions ont été répandues et ont contribué à réparer quelques malheurs. On en a publié aussi sur les moyens de convertir les blés avariés en pain mangeable, sur le parti à tirer des grains coupés avant leur maturité, sur les remèdes ou les préservatifs à appliquer aux maladies que l'excessive humidité avait fait naître parmi les bestiaux, et sur-tout parmi les moutons.

MM. Tessier et Huzard se sont chargés de ce dernier travail.

M. Huzard, fils de l'académicien, a fait un voyage en Angleterre, dans la vue de rechercher ce qu'étaient les chevaux de ce pays, avant leur amélioration, et par quels moyens on les a amenés à leur état actuel. Les résultats de ses observations ont été présentés à l'Académie. A en juger par d'anciens monumens, il a eu lieu de croire qu'une grande partie des chevaux originaires anglais étaient assez semblables à

ceux qui subsistent encore dans les contrées montueuses du pays; de petite taille, à forte encolure, à tête petite, à jambes sèches, infatigables à la course. Une autre race primitive, plus semblable aux chevaux de Hollande et de Frise, habitait les pays de plaines, où elle a été fort perfectionnée; mais tous les chevaux anglais améliorés ont éprouvé plus ou moins directement l'influence des étalons arabes, barbes, turcs et persans, qui peuvent seuls, selon l'auteur, procurer d'une manière durable le même avantage aux autres races de l'Europe. Les produits sont d'autant plus beaux, qu'ils appartiennent de plus près à la race étrangère qui a servi de type au croisement. Le gouvernement a fort contribué à ces progrès par son exemple, par des importations de chevaux et par des prix. Il y a en ce moment, en Angleterre, plus de soixante courses royales chaque année, où le gouvernement distribue des coupes d'or de la valeur de cent guinées, et les courses particulières vont au nombre de plus de quatre cents, dont chacune rapporte plus de mille guinées par des souscriptions. Elles produisent un mouvement de plus de quinze millions de notre monnaie, en paris, en achats, etc.; et, loin de n'être qu'un jeu futile, comme on pourrait l'imaginer, elles ont contribué, de la manière la plus efficace, à la prospérité du pays, en faisant étudier et découvrir tout ce qui concerne les qualités des chevaux et les moyens de les porter au plus haut degré.

Un anonyme avait offert à l'Académie une somme de 3000 liv. pour être donnée en prix à l'inventeur d'une machine propre à détacher l'écorce du lin et du chanvre, et à

la réduire en filamens, sans exiger l'opération si insalubre du rouissage.

Le vœu de ce personnage estimable était rempli d'avance. M. Christian, directeur du conservatoire des arts et métiers, a fait voir à l'Académie une machine de son invention qui remplit le but proposé, par des moyens très-simples : les tiges de lin et de chanvre passent entre diverses roues dentées, qui réduisent en parcelles les parties ligneuses, et laissent les fibres corticales dans leur intégrité. On obtient $\frac{13}{32}$ d'une filasse parfaitement belle ; ce qui est un produit supérieur à celui des machines analogues usitées en Angleterre.

L'Académie a donc engagé le fondateur du prix à consacrer sa générosité à répandre ce mécanisme ; ce ne sera pas un moindre service à rendre au public : car il est souvent plus difficile d'accréditer parmi le peuple les inventions utiles, que de les faire.

~~~~~~~~
~~~~~~~~

ERRATA

POUR LE VOLUME DE 1816,

MÉMOIRE DE M. POISSON.

Page 109, lignes 6 et 7 ; au lieu de dv, lisez : vdv.

Page 110, ligne 10 ; au lieu de $sin.\, t \sqrt{ga}$, lisez : $cos.\, t \sqrt{ga}$.

Page 156, ligne 10 ; au lieu de $sin.\, t \sqrt{gu}$, lisez : $cos.\, t \sqrt{gu}$.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE

L'INSTITUT ROYAL DE FRANCE.

RECHERCHES

Sur la durée de la gestation et de l'incubation dans les femelles de plusieurs quadrupèdes et oiseaux domestiques;

PAR M. TESSIER.

Lues à l'Académie le 12 mai 1817.

LORSQU'EN 1799 je lus une notice sur la durée de la gestation de plusieurs femelles d'animaux domestiques, je n'avais pas assez de données pour m'en tenir aux recherches que j'avais faites jusqu'à ce moment. Persuadé que cette matière ne pouvait être bien éclaircie qu'à l'aide d'une très grande quantité de faits positifs et individuels, j'ai dû continuer à en recueillir le plus possible, et ne pas m'écarter de cette idée. A l'époque où je fis connaître que je m'en occupais depuis long-temps, j'avais seulement l'intention d'empêcher qu'on ne regardât comme suffisantes pour décider une question difficile et délicate, quelques gestations isolées, qu'on s'empressait de publier. Un des rédacteurs du bulletin de

la société philomathique, présent à la séance, retint une partie des résultats, qu'il inséra dans cette feuille; c'est tout ce qui a été connu. Mais il me semble que cette publication prématurée ne saurait atténuer l'ensemble du travail que je présente aujourd'hui à l'Académie; d'autant moins qu'aux gestations précédentes, j'en ai ajouté beaucoup de nouvelles, qui mettent plus en état de juger, soit en confirmant les premières, soit en indiquant des variétés dans une des fonctions appelées *naturelles* par les physiologistes. Alors je n'avais encore réuni que les gestations de 163 vaches, de 102 jumens, de 139 femelles du lapin et de 15 truies; je n'en avais aucune de brebis. Maintenant j'en compte 577 de vaches, 447 de jumens, 161 de femelles du lapin, 25 de truies, et 912 de brebis.

La plupart des médecins ont déterminé la durée de la gestation de la femme. Plusieurs n'ont osé lui donner des bornes fixes. Le terme de neuf mois accomplis, ou seulement de neuf mois et quelques jours, a été regardé comme le *nec plus ultrà ;* c'est aussi l'opinion générale des personnes qui n'ont aucune connaissance en médecine ou en physiologie. Les autres l'ont étendu au-delà de cet espace de temps. Quelques-unes des dernières croyaient à la possibilité de grossesses de douze, treize et même vingt-trois mois. Plus d'une fois cette diversité d'opinions a, sur la légitimité d'enfants posthumes, embarrassé des juges qui, dans ces circonstances, avaient aussi à considérer le point moral. Je ne rappellerai pas les discussions que fit naître ce sujet entre deux savans très-distingués (1) de l'Académie des sciences, dont chacun

---

(1) Bouvart et Petit; c'était en 1765.

comptait dans son parti des accoucheurs en réputation; il me suffira de citer un passage de M. le marquis de Condorcet, secrétaire-perpétuel de cette académie, dans l'éloge de l'un d'eux :

« La nature, dit-il, a-t-elle renfermé le temps de la gesta-« tion dans des limites précises? Il semble qu'il eût fallu dé-« cider cette question d'après des observations exactes sur le « temps de la gestation dans différentes espèces d'animaux; « observations dans lesquelles on aurait eu égard à l'âge, à « la constitution des individus, au régime différent auquel « on les aurait assujettis. Les conséquences qu'on en eût ti-« rées pour l'espèce humaine n'auraient été fondées que sur « l'analogie; et dès-lors elles auraient perdu sans doute de « leur force; mais on aurait été exposé encore bien moins à « l'erreur, qu'en se servant d'observations directes, sur les-« quelles il resterait toujours un nuage, vu l'incertitude de « l'instant de la conception, et celles des signes de la gros-« sesse. Ces observations sur les animaux n'existent pas. »

Frappé des discussions dont je viens de parler; ayant lu les écrits de tous ceux qui y prirent part, je formai le dessein d'employer le moyen indiqué par M. de Condorcet. J'aurais pu ne suivre que les gestations des femelles d'une seule ou de deux espèces d'animaux domestiques; mais j'ai desiré porter mon examen sur plusieurs, pour avoir des objets de comparaison, et donner aux résultats plus de poids et d'intérêt.

Quelque chose que j'aie faite, je n'ai eu aucune facilité pour ce qui concernait les chèvres. J'ai si peu de gestations de chiennes, que je ne les porterai, pour ainsi dire, que pour mémoire. J'en ai encore moins de celles d'ânesses. Je n'en

ai relevé que huit des notes prises à Rambouillet, relativement aux femelles de buffles, parce qu'on y a conservé pendant plusieurs années un troupeau de ce genre d'animaux.

Bien que l'incubation des oiseaux ne puisse être assimilée à la gestation des quadrupèdes, qui s'opère d'une autre manière, cependant je n'ai pas regardé comme indifférent d'étudier ce qui se passe dans cette fonction, quant à la latitude des éclosemens. Il m'a paru utile de s'assurer, si, à l'égard de cette classe d'animaux, la nature avait des termes toujours fixes, ou quelquefois des écarts.

On concevra aisément que, pour atteindre le but que je me proposais, c'est-à-dire pour rassembler une grande quantité d'observations, il a fallu que, indépendamment de mes propres recherches, je m'adressasse à diverses personnes, auxquelles je fisse connaître comment elles devaient s'y prendre pour n'être pas trompées. De petits tableaux (1), que j'ai distribués, ont donné de la facilité pour consigner les remarques. J'en ai remis à des cultivateurs intelligens, attentifs et sûrs, en les engageant à y inscrire les jours de saillies et de mises bas des femelles des animaux qui leur appartenaient. J'ai choisi, quant aux vaches et aux truies, les fermes

(1) Sur ces tableaux je demandais qu'on indiquât les espèces de femelles, leur âge, leur robe; l'âge des mâles, la couleur de leur poil; les jours des accouplemens, les jours de la mise bas; le sexe des petits, leur couleur et leur force.

Quant aux oiseaux, je desirais qu'on fît connaître les espèces, la couleur des couveuses, la quantité d'œufs, les jours de couvaison; les jours où sont nés les premiers petits, ceux où sont nés les derniers; ce qu'il y y a eu d'œufs clairs et d'œufs fécondés; combien de mâles, combien de femelles.

où l'on n'entretenait ni taureaux, ni verrats. Deux propriétaires de mérinos (MM. Morel de Vindé et de Chastenay) ont bien voulu constater les chaleurs, les accouplemens et les mises bas de leurs brebis. Un des régisseurs d'une bergerie royale (1), M. Lemasne, les a imités. La surveillance très-scrupuleuse qu'on observe dans les haras, m'offrait une manière certaine de me procurer beaucoup de gestations de jumens. Là, comme on sait, les étalons sont toujours tenus à part; tout est rigoureusement noté sur un registre, jusqu'à l'heure et la minute de la saillie et de la mise bas du poulain. J'en ai profité, sous la bienveillance de quelques directeurs de ces établissemens. Afin de faire une masse plus forte, j'ai aussi recueilli les faits déja publiés par des vétérinaires. Ici se trouvait un embarras : souvent une jument est présentée plusieurs fois à l'étalon; il y en a qui le sont sept fois et plus, avec des intervalles de quelques jours, en sorte qu'on ne peut savoir de laquelle de ces saillies date la conception. Pour me mettre en état de parer à cet inconvénient, j'ai eu soin de demander qu'on notât chacun des jours d'accouplemens; résolu de n'admettre que le dernier comme le vrai, quoiqu'il pût ne pas l'être.

Il m'eût été facile d'obtenir sur les femelles du lapin un nombre plus considérable de gestations, que je n'en offre dans ce mémoire : car ce genre d'animal est plus soumis que les autres à la volonté de l'homme, qui sépare ou réunit les mâles et les femelles dans des cases, quand il desire les employer à la reproduction. Mais j'ai pensé que 161 faits étaient suffisans pour des comparaisons.

(1) Située au château de Clairmont, département de la Loire-Inférieure.

Les observations qui donnent lieu aux résultats qui vont suivre, ont été faites dans les départemens de la Seine, de Seine-et-Oise, de Seine-et-Marne, de la Seine-Inférieure, du Calvados, de l'Orne, du Loiret, de la Loire-Inférieure, de la Corrèze, de la Haute-Vienne, de la Charente-Inférieure, de la Haute-Garonne, de la Meuse, de la Meurthe, du Léman, indépendamment de celles que m'ont fournies MM. Brugnone et Hartmann; l'un, vétérinaire très-distingué dans le Piémont, et correspondant de l'Académie royale des sciences; et l'autre, chef du haras de Marbach dans le Wirtemberg (1). Quoique j'aie écarté tout ce qui pouvait me donner un soupçon d'équivoque, cependant il pourrait se faire que quelques indications ne fussent pas strictement exactes. Mais, comme tous les observateurs ont présenté des gestations de diverses latitudes, et plus ou moins prolongées, ils se contrôlent, ou plutôt ils se confirment les uns es autres (2). En en retranchant même quelques-unes, on aurait assez de prolongations pour en tirer des conséquences remarquables.

---

(1) M. Huzard, mon collègue, a revu et publié la traduction de l'allemand du *Traité des haras*, de M. Hartmann.

(2) Voici les noms des pays où se sont faites les observations, et ceux des personnes qui s'en étaient chargées.

A Pantin (Seine), M. de Saint-Genis.

A Charenton, Alfort et Maisons, la Varenne-Saint-Maur (Seine), Mme Day, M. de Chaumontel, M. Yvart, M. de Mallet.

A Passy (Seine), M. Tessier.

A Montrouge (Seine), M. Cels, de l'Institut.

A Rambouillet (Seine-et-Oise), M. Bourgeois père, directeur de la bergerie royale.

A Chatou (Seine-et-Oise), Mme de Montlevault.

A la Celle-Saint-Cloud (Seine-et-Oise), M. le baron de Vindé, pair de France.

J'ai insisté sur les précautions que j'ai prises et que j'ai dû prendre, parce que, de la certitude qu'aucune n'a été omise ou négligée, dépendent l'évidence des résultats et la confiance qu'ils méritent.

ARTICLE PREMIER.

Des vaches.

Dans le nombre de cinq cent soixante-dix-sept, vingt-une ont donné leurs veaux du 240e jour non compris, au 270e compris, c'est-à-dire au-dessous du neuvième mois, de

---

A Epluches près Pontoise (Seine-et-Oise), Mme de Grandmaison.

A Bazoches près Provins (Seine-et-Marne), M. Tessier.

A Saint-Jean près Rouen (Seine-Inférieure), M. le marquis d'Herbouville, pair de France.

A Marclay près Caen (Calvados), M. d'Hericy.

A Sainte-Croix-Grandtonne près Caen (Calvados), M. de Chastenay.

Au haras du Pin près Argentan (Orne), M. de Grimoult, directeur du haras.

A Rouville près Malherbes (Loiret), M. Fera de Rouville.

A Andonville (Loiret), M. Tessier, M. Marchon.

Au château de Clairmont (Loire-Inférieure), M. Lemasne, directeur de la bergerie royale.

Au haras de Pompadour (Corrèze), MM. Thiroux et de Seltot, directeurs du haras.

A Limoges (Haute-Vienne), M. Pradier, vétérinaire.

A la Rochelle (Charente-Inférieure), M. Wilkens, propriétaire aux environs, et consul de Prusse.

Au Falga (Haute-Garonne), M. Caffarelli.

A Vaucouleurs (Meuse), M. Saincerre.

A Rosières (Meurthe), M. Struberg, directeur du haras.

A Lancy près Genève (Léman), M. Charles Pictet.

Dans le Piémont, M. Brugnone.

Dans le Wirtemberg, M. Hartmann.

30 jours, ne comptant qu'un jour pour celui de l'accouplement et pour celui de la mise bas.

Si on était tenté de prendre ces accouchemens précoces pour des avortemens, je dirais que dans leurs produits il y a eu des veaux bien constitués et des veaux faibles, comme dans les produits de gestations plus longues.

Terme moyen de ce nombre, 259 $\frac{1}{2}$ jours.

Cinq cent quarante-quatre ont porté du 270e compris au 299e compris, c'est-à-dire, du neuvième mois jusqu'au dixième mois. Douze seulement ont vélé le 270e juste, c'est-à-dire le dernier jour même du neuvième mois.

Terme moyen de ce nombre, 282 $\frac{11}{17}$ jours.

Les plus nombreux accouchemens ont été dans l'espace du 277e au 299e compris.

J'observerai que les dix plus longues gestations de cette 2e classe, qui en comprend cinq cent quarante-quatre, approchent du 300e jour : car six sont au 298e jour, et quatre au 299e; en sorte qu'elles pourraient être réunies à la classe qui commence au 300e jour.

Enfin dix ont prolongé leurs gestations, à compter du 299e jour jusques et y compris le 21e, c'est-à-dire jusqu'à dix mois et 21 jours.

Terme moyen de ce dernier nombre, 306 jours. J'ai retranché deux gestations, une de 360 et une de 372, quoique inscrites sur mes notes, parce que je n'ai pu retrouver le nom des personnes dont je les tenais.

D'après ces données : de la plus courte gestation, qui est de 240 jours ou huit mois, à la plus longue, qui est de 321 jours ou dix mois et 21 jours, il y a 81 jours; et du neuvième mois à la gestation extrême, 51 jours.

(*Voyez* le 1er tableau.)

ARTICLE II.

Des jumens.

1° *De celles qui n'ont été saillies qu'une fois.*

De deux cent soixante-dix-sept accouchemens, vingt-trois ont précédé le 330e jour, ou le onzième mois.

Terme moyen de ce nombre, 322 jours.

Deux cent vingt-sept jumens ont porté du 330e jour compris, ou dix mois 29 jours, au 359e compris, ou onze mois 29 jours.

Les plus nombreux accouchemens ont été du 333e jour au 346e compris. Cinq jumens seulement ont mis bas le 330e juste, ou le dernier jour du onzième mois.

Terme moyen de ce nombre, 346 $\frac{1}{3}$ jours.

La gestation de vingt-huit a été prolongée du 361e compris, ou douze mois et 1 jour, au 419e, ou treize mois 29 jours.

Terme moyen de ce nombre, 372 $\frac{4}{7}$ jours, ou douze mois 12 jours.

De la plus courte à la plus longue gestation, 132 jours; et, à compter du 330e jour ou de onze mois 89 jours.

(*Voyez* le 2e tableau.)

2° *De celles qui ont éte saillies plusieurs fois.*

Sur cent soixante-dix, vingt-huit ont fait leur poulain avant le 330e jour, ou le onzième mois.

Terme moyen de ce nombre, 321 jours, ou dix mois 21 jours.

Cent vingt-huit ont porté de 330 jours compris, ou onze

mois, à 339 compris, ou onze mois 9 jours. Six seulement ont mis bas le 330e jour, ou onze mois juste.

Terme moyen de ce nombre, 341 $\frac{2}{3}$ jours, ou onze mois 11 jours $\frac{2}{3}$.

La gestation de quatorze a été, du 362e compris, ou douze mois 2 jours, à 377 compris, ou douze mois 17 jours.

Terme moyen de ce nombre, 370 $\frac{3}{4}$, ou douze mois 10 jours $\frac{3}{4}$.

De la plus courte à la plus longue gestation, c'est-à-dire du 290e compris au 377e, 77 jours; et, du 330e, ou onzième mois 47 jours de prolongation.

Dans cette seconde partie de l'article des jumens, aucune n'a porté jusqu'à treize mois, tandis que, dans la première, il y en a deux, dont une a approché du quatorzième mois; et cette dernière n'offre aucune équivoque, car elle est du relevé du haras de Chivasso. D'où vient cette différence? Est-ce parce que, dans la première partie, il y a eu plus de gestations, et par conséquent plus de chances pour les prolongations, deux cent soixante-dix-sept contre cent soixante-dix? Ou bien, est-ce parce que plusieurs des gestations ont commencé à la suite de quelques-unes des premières saillies? L'une et l'autre cause me paraissent possibles.

En réunissant les gestations des deux parties de l'article, c'est-à-dire des jumens qui n'ont été saillies qu'une fois, et de celles qui l'ont été plusieurs fois; ne comptant toujours pour celles-ci que sur la dernière, on voit que sur quatre cent quarante-sept gestations, quarante-deux ont passé 360 jours, ou douze mois, et qu'une même s'est élevée à 419 jours. Les prolongations ont été plus nombreuses que dans les vaches.

(*Voyez* le 3e tableau.)

ARTICLE III.

Des ânesses.

De deux ânesses, les seules dont j'aie connu la gestation, l'une a porté 380 jours, ou douze mois et 20 jours; et l'autre, 391 jours, ou treize mois et 1 jour.

ARTICLE IV.

Des brebis.

Parmi neuf cent douze gestations de brebis, cent quarante ont eu lieu du 146e jour au 150e, c'est-à-dire au-dessous du cinquième mois; six cent soixante-seize, du 150e, non compris, au 154e; et quatre-vingt seize, du 154e compris, jusqu'au 158e non compris.

De la plus courte à la plus longue gestation, 11 jours; du cinquième mois à la gestation extrême, 7 jours.

Terme moyen, 151 jours $\frac{1}{2}$.

Deux brebis seulement ont mis bas leurs agneaux le 146e jour; sept le 156e, cinq le 157e.

Les plus nombreux accouchemens sont du 150e compris, au 153e compris; puisque dans ces 4 jours il y en a eu six cent soixante-seize, ou environ les deux tiers.

Les observations sur les brebis présentent plus d'exemples de gestations précoces, ou avant le cinquième mois : car on voit qu'il y en a cent quarante-six sur neuf cent douze; tandis qu'on n'en a que cinquante-une sur quatre cent quarante-sept de jumens, et vingt-une sur cinq cent soixante-dix-sept de vaches. Au contraire, il y a bien moins de gestations de brebis au-delà des cinq mois; douze seulement, au lieu de quarante-

deux pour les jumens et de douze pour les vaches, qui n'étaient pas en aussi grand nombre que les brebis.

(*Voyez* le 4e tableau.)

ARTICLE V.

Des buffles femelles.

N'ayant eu à ma connaissance que huit faits bien constatés relativement aux buffles femelles, je ne puis affirmer d'une manière positive quels sont les termes de la plus courte à la plus longue gestation : car ce nombre ne me paraît pas devoir suffire pour donner des résultats certains. En comparant ces huit gestations, j'ai su au moins, qu'il y a eu une différence de 27 jours entre la portée la plus hâtive et la plus éloignée, et que celle-ci s'étendait jusqu'à 328 jours, ou dix mois 28 jours.

Terme moyen, 310 jours, ou dix mois 10 jours.

ARTICLE VI.

De la chienne.

Deux ont porté 62 jours; une 61, et une 58; ce qui donne, pour quatre animaux seulement, une latitude de 4 jours.

ARTICLE VII.

De la truie.

Vingt-cinq truies ont fait leurs petits après des gestations de 109 à 133 jours, ou quatre mois et 13 jours. Il y en a eu cinq au 113e.

Terme moyen, 115 $\frac{1}{2}$, ou trois mois 25 jours $\frac{1}{2}$.

Nota, 1°, que parmi ces truies, une de deux ans, race de Java, pie de blanc, jaune et noire, couverte par un mâle de

même poil et de même race, a donné sept petits, semblables au père et à la mère; excepté deux d'entre eux, qui portaient la livrée comme les marcassins.

2° Que la mère d'une des truies était originairement marcassine, c'est-à-dire de race de sanglier, ou cochon sauvage; elle a porté 110 jours.

(*Voyez* le 5e tableau.)

ARTICLE VIII.

De la femelle du lapin.

Entre deux extrêmes de la gestation de cent soixante-une femelles du lapin, j'ai remarqué un intervalle de 8 jours : l'un de ces extrêmes est le 27e jour, et l'autre le 35e. Le plus grand nombre des portées a été de 29 à 31 jours. Cinquante-sept ont duré 30 jours, ce qui approche du tiers.

J'observerai ici, que dans un animal dont la gestation n'excède guère un mois, une latitude de 8 jours est considérable, si on la compare à celle des femelles dont la gestation la plus ordinaire est, ou de neuf mois, ou de onze mois et quelques jours; je veux dire les vaches et les jumens.

ARTICLE IX.

Incubations.

Je passerai maintenant aux incubations. D'après les tableaux que j'ai dressés, il existe entre diverses couvaisons d'une même espèce, d'œufs de poule, par exemple, placés sous des poules, une différence assez considérable, puisqu'elle est quelquefois de cinq jours; et entre les éclosemens des petits d'une même couvée, un intervalle qui peut être de huit jours. Ce fait confirme une observation publiée par

feu M. Darcet, de l'Académie des sciences, dans le *Journal de médecine,* juillet 1766, t. 25, p. 53. Suivant lui, le premier poulet d'une couvée de treize œufs a éclos 13 jours après le commencement de l'incubation ; le second, à la fin du 17ᵉ jour; le troisième, le 18ᵉ révolu; et les autres, les 19ᵉ et 20ᵉ jours.

On pourrait expliquer ces variations des couvaisons et de leur durée par les circonstances où se trouvent les oiseaux femelles, lorsqu'ils remplissent cette fonction, sur-tout par l'inégalité de la chaleur ; et, dans ce cas, on n'en conclurait rien pour les naissances tardives des oiseaux. Mais il paraît qu'il existe aussi des différences dans l'éclosement des œufs soumis à une même température. M. Geoffroy, notre collègue, que j'ai consulté sur ce qui se passait à cet égard en Égypte, où l'on fait éclore à-la-fois dans un four jusqu'à 20,000 œufs, m'a rapporté la pratique usitée dans ces contrées; on peut en tirer des conséquences analogues aux précédentes. L'apparition des poulets, dit M. Geoffroy, a lieu *successivement ;* et ce fait est si bien connu des gens du pays, qu'ils règlent là-dessus leur conduite comme commerçans. Le particulier qui fait couver ensemble un grand nombre d'œufs, ne prend aucune précaution pour nourrir les poulets; il les vend tous, aussitôt après leur éclosement. Il ramasse d'abord les premiers nés, les met dans une manne, et va les vendre lui-même. Il revient ensuite pour prendre ceux qui sont nés pendant son absence. Il arrive un moment, et c'est ordinairement au milieu des 30 heures de l'éclosement, où le nombre est si grand, que, ne pouvant suffire à les aller vendre, il amène chez lui des marchands regrattiers, qui les achètent et les emportent.

Je n'ai point formé de tableaux pour les ânesses, les fe-

melles buffles, et la chienne, parce que j'ai réuni trop peu de gestations sur ces animaux; mais j'en ai formé sur quelques couvaisons d'oiseaux.

(*Voyez* le 7[e] tableau et les suivans.)

CONSÉQUENCES

A TIRER DE TOUT CE QUI PRÉCÈDE.

Il est prouvé par les faits que je viens d'exposer, que la gestation, considérée dans les femelles de sept genres d'animaux domestiques, n'a point de terme fixe; qu'elle est susceptible de varier; qu'elle s'étend quelquefois très-loin, et au-delà de ce qu'on croit vulgairement; qu'il y a des accouchemens précoces, qu'il y en a de tardifs; qu'on ne peut se refuser d'admettre des écarts; que la même chose s'observe dans la couvaison des oiseaux; que cependant enfin on peut déterminer la durée ordinaire et les extrêmes de cette fonction dans les individus.

Je bornerais ici mon travail, que je croirais avoir suffisamment éclairci une circonstance intéressante de la physiologie animale, parce qu'il ne s'agissait que de rassembler un grand nombre de gestations et de couvaisons. Mais je ferai plus, je démontrerai, au moins à l'égard des quadrupèdes ci-dessus désignés, que l'âge, la constitution et le régime n'influent en rien sur les prolongations. A l'appui de cette assertion, je citerai des exemples extraits de mes notes.

1° Relativement à l'âge : une vache de onze ans a mis bas au 247[e] jour; une de treize, au 306[e]; une génisse ayant quinze mois au moment de la monte, a donné son veau au 277[e]; et une ayant dix-huit mois, aussi au moment de la

monte, a donné le sien au 303e. Une jument de onze ans a pouliné au 327e jour; et une de huit ans, au 408e. Dans les truies, la durée de la gestation n'a pas été en raison de l'âge. Voilà ce qui constate que l'âge des femelles n'a point d'influence. L'âge des mâles n'en a pas davantage. Des taureaux de vingt-deux mois ont formé des veaux qui sont nés aux 290e et 297e jours; tandis qu'il en est né un au 296e, après l'accouplement d'une vache avec un taureau de six ans. Ces exemples me paraissent devoir suffire.

2° Relativement à la constitution des individus : on ne peut juger de la constitution d'un animal que par son état apparent. On ne prétendra pas sans doute que la faiblesse et la maladie donnent lieu à la prolongation des gestations: il me semble, au contraire, que ces circonstances sont propres à les accélérer : c'est ainsi que le fruit d'un arbre qui souffre se décolle et tombe plus tôt que celui d'un arbre vigoureux. Au surplus, des femelles jeunes et des femelles âgées, n'importe de quelle robe, ont mis bas à des époques prolongées de gestation : on a obtenu, par le moyen de taureaux et de chevaux étalons, quels qu'ils aient eté, des productions précoces et de tardives. D'ailleurs, une femelle n'accouche presque jamais deux fois au même terme : une truie, après une gestation de 112 jours, en a eu une de 114. Quelquefois, dans la vache, la variation est de 13 jours. Des veaux, nés aux 237e, 241e, 243e, 244e, étaient forts; tandis que d'autres, nés aux 291e, 292e, 294e et 295e, se sont trouvés faibles et de peu de poids : à moins donc de supposer que la constitution physiologique change tous les ans, on ne peut l'admettre comme cause de précocité ou de retard dans l'accouchement.

3° Relativement au régime : quand on sait qu'il y a des gestations prolongées dans des pays très-distans les uns des autres, on ne croit pas que la manière de nourrir et de conduire les animaux y ait quelque part. Dix vaches, suivant mes tableaux, ont vélé après 300 jours, ou dix mois, sans compter celles qui ont approché de ce terme, et cela dans les départemens du Loiret, de la Corrèze, du Calvados, de Seine-et-Oise. Parmi les jumens saillies une fois seulement, et par conséquent celles sur lesquelles on doit le plus compter, il y en a eu quinze qui ont accouché au-delà de 361 jours, dans les départemens de la Meuse, de la Meurthe et du Piémont. Ces gestations ont eu lieu chez différens particuliers, où la nourriture n'a pu être la même, quant à la quantité et à la qualité; la manière dont ces animaux ont été conduits et soignés, a dû nécessairement aussi varier. On en peut dire autant des oiseaux. Par contre, des jumens appartenantes à un propriétaire ont été saillies le même jour, 26 avril, par les différens étalons du haras de Limoges : l'une a porté 340 jours; une autre, 351; une autre, 363; une autre, 365. La différence du premier au quatrième accouchement est de 25 jours. Il est plus que probable cependant que le régime de ces quatre jumens a été le même; il est certain que celui des étalons l'a été. (1)

Puisque les prolongations dans la gestation ne sauraient être attribuées ni à l'âge, ni à la constitution, ni au régime, il faut voir si on ne pourrait leur trouver d'autres causes, et ce qu'on doit penser de quelques opinions émises à ce sujet.

---

(1) Ce fait, tiré des registres du haras de Limoges, m'a été communiqué par M. Pradier, vétérinaire de cette ville.

Les femelles du taureau, du buffle, du cheval, du bélier, du porc, du lapin, et celles des oiseaux, éprouvent toutes des retards. La différence du genre n'y contribue en rien; mais on a imaginé que celle de la race pourrait y influer. On s'est trompé. Deux vaches de la race sans cornes et de celle de Suisse ont porté 291 jours; une de la Romagne a vélé au 298ᵉ, et une au 301ᵉ. Dans d'autres races, telles que les Brabançonnes, les Livarotes et les communes des environs de Paris, quelques-unes ont prolongé aussi loin leurs gestations. D'une vache couverte par un taureau suisse, il est issu un veau au 300ᵉ jour. Une autre, couverte par un taureau de la Romagne, a vélé au 294ᵉ. Une troisième, enfin, couverte par un taureau de la race sans cornes, a donné son veau au 291ᵉ. On rencontrerait également des prolongations dans les autres races de quadrupèdes, et dans les incubations des oiseaux.

On dira que c'est le volume et la force du fœtus qui produisent ces anomalies. A cela je réponds, d'abord, qu'ils en seraient plutôt l'effet que la cause; et je prouve qu'on ne saurait par là expliquer le phénomène de la prolongation. Le contraire même est démontré par les faits suivans : des veaux faibles sont nés au 291ᵉ, 292ᵉ, 294ᵉ, 295ᵉ jour; savoir, deux de mères de quatre ans, un d'une mère de huit ans, et un d'une mère de dix ans; un veau du poids de trente-une livres est né au 270ᵉ, et un de vingt-neuf livres au 273ᵉ. Des jumens ont mis bas des poulains faibles, au 371ᵉ et au 370ᵉ, et de bien étoffés et gros, au 318ᵉ, 320ᵉ, 325ᵉ, etc.

Suivant quelques personnes, cela dépend de la saison; pas davantage. Il y a de longues gestations à quelques époques de l'année que les femelles mettent bas. Les exemples en seraient faciles à citer, car ils sont en grand nombre sur mes notes.

On n'imaginera pas sans doute que le sexe des petits y fasse

quelque chose; je certifierais que des veaux mâles et femelles sont nés indistinctement au-delà de 270 jours, et même au-delà de 300, et des poulains et pouliches au-delà de 330 et de 360.

Je ne m'occuperai pas à répondre à ceux qui font dépendre des phases de la lune, les retards ou prolongations de gestations.

Un observateur croit avoir remarqué que la durée de la gestation, dans les femelles des animaux, était égale à neuf fois l'intervalle qui sépare le retour des chaleurs. Mais, pour faire de ceci une vérité, il faudrait des données plus positives et plus variées.

En écartant tout ce qu'on a allégué jusqu'ici pour rendre raison des longues gestations, je desirerais mettre d'autres causes à la place, et en indiquer de certaines. Mais il est des cas où l'on assurera bien qu'une chose n'est pas telle qu'on la croit, sans pouvoir déterminer ce qu'elle est. Les physiologistes ne manqueront pas de dire que les variations et les anomalies qui existent, d'après ce qui précède, dans une des fonctions animales, sont l'effet du plus ou moins d'extensibilité des parois de la matrice; extensibilité qui n'est point au même degré dans tous les individus et dans toutes les gestations. Mais où conduira cette explication? qu'apprendra-t-elle? Il me semble qu'il vaut mieux se contenter des conséquences directes qui dérivent des faits ci-dessus exposés, et que j'ai déduites avant de discuter les causes.

Resterait à faire l'application de ces conséquences à un autre ordre d'individus. Mais je laisse cette tâche aux hommes plus éclairés que moi dans les sciences médicales. Je ne m'étais proposé que de réunir un grand nombre d'observations exactes, et propres à éclaircir une question douteuse. Mon but est atteint, si j'ai pu y parvenir.

I[er] TABLEAU.

Vaches.

	NOMBRE DE VACHES.	DURÉE DE LA GESTATION. MOIS.		DURÉE DE LA GESTATION. JOURS.	TOTAL DES JOURS.
Termes les plus faibles.	1.	8.	»	240.	240.
	1.	8.	4.	244.	244.
	1.	8.	7.	247.	247.
	1.	8.	13.	253.	253.
	1.	8.	17.	257.	257.
	3.	8.	18.	258.	774.
	1.	8.	19.	259.	259.
	1.	8.	20.	260.	260.
	2.	8.	21.	261.	522.
	1.	8.	22.	262.	262.
	1.	8.	23.	263.	263.
	3.	8.	26.	266.	798.
	1.	8.	27.	267.	267.
	2.	8.	28.	268.	536.
	1.	9.	»	269.	269.
	21.				5451.
			259 ½.		
Termes les plus ordinaires.	12.	9.	»	270.	3240.
	7.	9.	1.	271.	1897.
	18.	9.	2.	272.	4896.
	37.				10033.

NOMBRE DE VACHES.	DURÉE DE LA GESTATION. MOIS.	JOURS.	TOTAL DES JOURS.
D'autre part..... 37.			10033.
10.	9. 3.	273.	2730.
18.	9. 4.	274.	4932.
12.	9. 5.	275.	3300.
20.	9. 6.	276.	5520.
33.	9. 7.	277.	9141.
27.	9. 8.	278.	7506.
29.	9. 9.	279.	8091.
27.	9. 10.	280.	7560.
38.	9. 11.	281.	10678.
29.	9. 12.	282.	8178.
22.	9. 13.	283.	6226.
32.	9. 14.	284.	9088.
22.	9. 15.	285.	6270.
35.	9. 16.	286.	10010.
24.	9. 17.	287.	6888.
23.	9. 18.	288.	6624.
19.	9. 19.	289.	5491.
19.	9. 20.	290.	5510.
14.	9. 21.	291.	4074.
12.	9. 22.	292.	3504.
9.	9. 23.	293.	2637.
9.	9. 24.	294.	2646.
8.	9. 25.	295.	2360.
3.	9. 26.	296.	888.
3.	9. 27.	297.	891.
534.			150776.

	NOMBRE DE VACHES.	DURÉE DE LA GESTATION. MOIS.	JOURS.	TOTAL DES JOURS.
D'autre part...	534.			150776.
	6.	9. 28.	298.	1788.
	4.	9. 29.	299.	1196.
	544.			153760.
		282 $\frac{11}{17}$.		
Termes les plus forts.	1.	10. »	300.	300.
	2.	10. 1.	301.	602.
	1.	10. 2.	302.	302.
	1.	10. 4.	304.	304.
	2.	10. 6.	306.	612.
	1.	10. 7.	307.	307.
	1.	10. 9.	309.	309.
	1.	10. 21.	321.	321.
	10.			3057.
		306.		

IIe TABLEAU.

Jumens saillies une seule fois.

	NOMBRE DE JUMENS.	DURÉE DE LA GESTATION. MOIS.	JOURS.	TOTAL DES JOURS.
Termes les plus faibles.	1.	9. 17.	287.	287.
	1.	10. 4.	304.	304.
	2.	10. 15.	315.	630.
	1.	10. 17.	317.	317.
	1.	10. 20.	320.	320.
	1.	10. 21.	321.	321.
	2.	10. 23.	323.	646.
	1.	10. 24.	324.	324.
	1.	10. 25.	325.	325.
	2.	10. 26.	326.	652.
	4.	10. 27.	327.	1308.
	2.	10. 28.	328.	656.
	4.	10. 29.	329.	1316.
	23.			7406.
		322.		
Termes les plus ordinaires.	5.	11. »	330.	1650.
	8.	11. 1.	331.	2648.
	7.	11. 2.	332.	2324.
	12.	11. 3.	333.	3996.
	32.			10618.

NOMBRE DE JUMENS.	DURÉE DE LA GESTATION.		TOTAL DES JOURS.
	MOIS.	JOURS.	
D'autre part..... 32.			10618.
12.	11. 4.	334.	4008.
15.	11. 5.	335.	5025.
9.	11. 6.	336.	3024.
7.	11. 7.	337.	2359.
10.	11. 8.	338.	3380.
11.	11. 9.	339.	3729.
11.	11. 10.	340.	3740.
9.	11. 11.	341.	3069.
9.	11. 12.	342.	3078.
7.	11. 13.	343.	3401.
9.	11. 14.	344.	3096.
8.	11. 15.	345.	2760.
22.	11. 16.	346.	7612.
5.	11. 17.	347.	1735.
6.	11. 18.	348.	2088.
7.	11. 19.	349.	2443.
5.	11. 20.	350.	1750.
2.	11. 21.	351.	702.
7.	11. 22.	352.	2464.
4.	11. 23.	353.	1412.
1.	11. 24.	354.	354.
5.	11. 25.	355.	1775.
1.	11. 26.	356.	356.
7.	11. 27.	357.	2499.
221.			76477.

	NOMBRE DE JUMENS.	DURÉE DE LA GESTATION.		TOTAL DES JOURS.
		MOIS.	JOURS.	
D'autre part...	121.			76477.
	2.	11. 28.	358.	716.
	3.	11. 29.	359.	1077.
	226.			78270.
	346 $\frac{1}{3}$.			
Termes les plus forts.	4.	12. 1.	361.	1444.
	4.	12. 3.	363.	1452.
	3.	12. 4.	564.	1092.
	3.	12. 5.	365.	1095.
	4.	12. 7.	367.	1468.
	1.	12. 9.	369.	369.
	1.	12. 13.	373.	373.
	1.	12. 17.	377.	377.
	1.	12. 22.	382.	382.
	1.	12. 25.	385.	385.
	2.	12. 28.	388.	388.
	1.	13. 1.	391.	391.
	1.	13. 18.	408.	408.
	1.	13. 29.	419.	419.
	28.			10443.
	372 $\frac{4}{7}$.			

IIIe TABLEAU.

Jumens saillies plusieurs fois.

	NOMBRE DE JUMENS.	DURÉE DE LA GESTATION. MOIS.	JOURS.	TOTAL DES JOURS.
Termes les plus faibles.	1.	9. 20.	290.	290.
	1.	10. 6.	306.	306.
	1.	10. 17.	317.	317.
	2.	10. 18.	318.	636.
	3.	10. 19.	319.	957.
	3.	10. 20.	320.	960.
	4.	10. 21.	321.	1284.
	1.	10. 22.	322.	322.
	1.	10. 23.	323.	323.
	3.	10. 24.	324.	972.
	1.	10. 25.	325.	325.
	2.	10. 27.	327.	654.
	3.	10. 28.	328.	984.
	2.	10. 29.	329.	658.
	28.			8988.
		321.		
Termes les plus ordinaires.	6.	11. »	330.	1980.
	7.	11. 1.	331.	2317.
	8.	11. 2.	332.	2656.
	21.			6953.

NOMBRE DE JUMENS.	DURÉE DE LA GESTATION. MOIS.	JOURS.	TOTAL DES JOURS.
Ci-contre....... 21.			6953.
9.	11. 3.	333.	2997.
4.	11. 4.	334.	1336.
3.	11. 5.	335.	1005.
4.	11. 6.	336.	1344.
5.	11. 7.	337.	1685.
9.	11. 8.	338.	3042.
4.	11. 9.	339.	1356.
4.	11. 10.	340.	1360.
4.	11. 11.	341.	1364.
8.	11. 12.	342.	2736.
6.	11. 13.	343.	2058.
9.	11. 14.	344.	3096.
2.	11. 15.	345.	690.
7.	11. 16.	346.	2422.
5.	11. 17.	347.	1815.
4.	11. 18.	348.	1392.
1.	11. 19.	349.	349.
1.	11. 20.	350.	350.
1.	11. 21.	351.	351.
5.	11. 22.	352.	1760.
1.	11. 23.	353.	353.
5.	11. 25.	355.	1775.
1.	11. 26.	356.	356.
2.	21. 27.	357.	714.
125.			42659.

	NOMBRE DE JUMENS.	DURÉE DE LA GESTATION. MOIS.	JOURS.	TOTAL DES JOURS.
D'autre part...	125.			42659.
	1.	11. 28.	358.	358.
	2.	11. 29.	359.	718.
	128.			43735.
	341 $\frac{2}{5}$.			
Termes les plus forts.	1.	12. 2.	362.	362.
	1.	12. 6.	366.	366.
	2.	12. 7.	367.	734.
	1.	12. 8.	368.	368.
	3.	12. 9.	369.	1107.
	1.	12. 10.	370.	370.
	1.	12. 11.	371.	371.
	1.	12. 15.	375.	375.
	1.	12. 16.	376.	376.
	2.	12. 17.	377.	754.
	14.			5183.
	370 $\frac{3}{14}$.			

IVe TABLEAU.

Brebis.

NOMBRE DE BREBIS.	DURÉE DE LA GESTATION. MOIS.	JOURS.	TOTAL DES JOURS.
2.	4. 26.	146.	292.
15.	4. 27.	147.	2205.
36.	4. 28.	148.	5328.
87.	4. 29.	149.	12963.
142.	5. »	150.	21300.
175.	5. 1.	151.	26425.
183.	5. 2.	152.	27816.
176.	5. 3.	153.	26928.
60.	5. 4.	154.	9240.
24.	5. 5.	155.	3720.
7.	5. 6.	156.	1092.
5.	5. 7.	157.	785.
912.			138094.

151 ½.

Ve TABLEAU.

Truies.

NOMBRE DE TRUIES.	DURÉE DE LA GESTATION. MOIS.	JOURS.	TOTAL DES JOURS.
3.	3. 19.	109.	327.
1.	3. 20.	110.	110.
3.	3. 22.	112.	336.
5.	3. 23.	113.	565.
3.	3. 24.	114.	342.
2.	3. 27.	117.	234.
2.	3. 29.	119.	238.
3.	4. »	120.	360.
1.	4. 1.	121.	121.
1.	4. 3.	123.	123.
1.	4. 13.	133.	133.
25.			2889.

$115 \frac{1}{2}$.

VIe TABLEAU.

Femelles du lapin.

QUANTITÉS DE MÈRES OU DE GESTATIONS.	DURÉE DES GESTATIONS.
	jours.
2 ont porté chacune	27.
1	28.
2	28 $\frac{1}{2}$.
6	29.
4	29 $\frac{1}{2}$.
57	30.
25	30 $\frac{1}{2}$.
22	31.
17	31 $\frac{1}{2}$.
8	32.
9	32 $\frac{1}{2}$.
6	33.
1	34.
1	35.
TOTAL... 161.	5055.

31 jours $\frac{2}{5}$.

VIIe TABLEAU.

Dindes ayant couvé des œufs de poule.

NUMÉROS.	QUANTITÉS d'œufs couvés.	DURÉE de la couvaison.	INTERVALLE DE TEMPS entre les premiers et les derniers nés.	NOMBRE d'œufs non fécondés.	OBSERVATIONS ET RÉSUMÉ.
		jours.	jours.		
1.	30.	20.	3.	12.	1° Durée des couvaisons, 17 à 27 jours.
2.	20.	19.	1.	0	2° Latitude, 5 jours.
3.	20.	17.	1.	9.	3° Intervalle de temps entre les premiers et les derniers nés, 3 jours.
4.	20.	22.	1.	10.	4° Le nombre des œufs non fécondés est à celui des œufs couvés, comme 1 est à 4.
5.	10.	27(*)	1.	4.	

(*) Cette dinde couvait en même temps dix œufs de dinde; tous ces derniers se sont trouvés clairs.

VIIIe TABLEAU.

Dindes ayant couvé des œufs de canne.

1.	20.	26.	1.	0	1° Durée de la couvaison, 27 jours.
2.	20.	26.	1.	4.	2° Latitude, 1 jour.
3.	20.	27.	2.	15.	3° Intervalle entre la naissance des petits, 2 jours.
					4° Le nombre des œufs non fécondés a été à celui des œufs couvés, comme 1 est à 3.

IXe TABLEAU.

Dindes ayant couvé des œufs de dinde.

NUMÉROS.	QUANTITÉS d'œufs couvés.	DURÉE de la couvaison.	INTERVALLE DE TEMPS entre les premiers et les derniers nés.	NOMBRE d'œufs non fécondés.	OBSERVATIONS ET RÉSUMÉ.
1.	20.	26.	1.	5.	1° Durée de la couvaison, de 26 à 29 jours. 2° Latitude, 3 jours. 3° Intervalle de temps entre les premiers et les derniers nés, 3 jours. 4° Le nombre des œufs fécondés est à celui des œufs couvés, comme 1 est à 2.
2.	20.	26.	2.	4.	
3.	20.	27.	1.	5.	
4.	20.	27.	1.	6.	
5.	20.	28.	1.	10.	
6.	20.	29.	1.	12.	
7.	20.	29.	1.	12.	
8.	15.	28, 29 et 30.	2.	5.	
9.	12.	»	1.	3.	

Xe TABLEAU.

Poules ayant couvé des œufs de canne.

1.	12.	26.	1.	0	1° Durée de la couvaison, 26 à 34 jours. 2° Latitude, 8 jours. 3° Intervalle de temps entre les premiers et les derniers nés, 8 jours. 4° Le nombre des œufs non fécondés
2.	12.	26.	1.	2.	
3.	15.	26.	1.	2.	
4.	12.	26.	1.	1.	

NUMÉROS.	QUANTITÉS d'œufs couvés.	DURÉE de la couvaison.	INTERVALLE DE TEMPS entre les premiers et les derniers nés.	NOMBRE d'œufs non fécondés.	OBSERVATIONS ET RÉSUMÉ.
5.	12.	26.	1.	6.	a été à celui des œufs couvés, comme 1 est à 3.
6.	14.	27.	1.	8.	De 3 poules couvant des œufs de canne de Barbarie, 2 ont été 33 jours et une 34 jours.
7.	10.	26.	1.	7.	Une canne de Barbarie a couvé 36 jours : sur 13 œufs 10 sont venus à bien; 3 étaient morts dans la coquille.
8.	15.	28.	1.	6.	
9.	1.	34.	1	»	

XIe TABLEAU.

Poules ayant couvé des œufs de poule.

1.	12.	20.	1.	2.	1° Durée de la couvaison, 19 à 24 jours.
2.	12.	20.	1.	3.	2° Latitude, 5 jours.
3.	12.	24.	1.	5.	3° Intervalle de temps entre les premiers et les derniers nés, 2 jours.
4.	12.	18.	2.	5.	4° Le nombre des œufs non fécondés a été à celui des œufs couvés, comme 1 est à 3.
5.	12.	24.	1.	4.	Une poule (à Chatou) a fait, en une année, 3 couvées, dont une a commencé le 10 décembre, sans que ses œufs se soient refroidis : 4 sont éclos le 30 décembre;
6.	15.	19.	1.	6.	
7.	15.	20.	1.	6.	
8.	15.	20.	1.	11.	
9.	15.	21.	1.	5.	

NUMÉROS.	QUANTITÉS d'œufs couvés.	DURÉE de la couvaison.	INTERVALLE DE TEMPS entre les premiers et les derniers nés.	NOMBRE d'œufs non fécondés.	OBSERVATIONS ET RÉSUMÉ.
10.	15.	24.	1.	5.	4 le 31, et 4 le 1er janvier; 2 ont été écrasés, et 1 non fécondé. L'incubation a été de 20, 21 et 22 jours. On n'a pu élever de ces poulets que 4; le froid a fait périr les autres. Chez la même personne qui m'a communiqué ce fait, sur 10 poules couveuses 8 ont été 21 jours; et 2, 19 et 20 jours.
11.	13.	21.	0	5.	
12.	13.	20.	0	2.	
13.	15.	24.	2.	6.	
14.	15.	19, et 20.	1.	4.	

Nota: On a mis sous une poule, le 12 juin, 13 œufs. Le 1er juillet, il en est éclos un, à midi; le 2 au matin, 8 étaient éclos; les autres se sont trouvés clairs. Il y a eu 12 heures de différence du 1er au 8e.

La pintade, qui pond jusqu'à 112 œufs, couve ordinairement 30 jours. On a vu des pintadeaux adoptés par une poule.

Quelquefois, dans les œufs qui ne réussissent pas à la couvaison, les germes cependant paraissent fécondés : on les trouve à divers degrés de développement; ce qui suppose que quelque accident les a fait périr. Dans un de ces œufs, le petit était entièrement formé. Une poule avait dans son intérieur un œuf dont la coquille était telle qu'elle est hors du corps.

XIIe TABLEAU.

Canne commune ayant couvé des œufs de canne commune.

NUMÉROS.	QUANTITÉS d'œufs couvés.	DURÉE de la couvaison.	INTERVALLE DE TEMPS entre les premiers et les derniers nés.	NOMBRE d'œufs non fécondés.	OBSERVATIONS ET RÉSUMÉ.
1.	15.	32.	2.	2.	1° Durée de la couvaison, 28 à 32 jours. 2° Latitude, 3 jours. 3° Intervalle entre la naissance des petits, 1 jour. 4° Le nombre des œufs non fécondés a été à celui des œufs couvés, comme 11 est à 10.
2.	11.	28, et 29.	1.	1.	

Nota. On a vu plus haut que les œufs de canne de Barbarie éclosaient aux 35e et 36e jours, c'est-à-dire 4 à 6 jours plus tard que ceux de la canne commune.

Une canne commune, dans la basse-cour du haras du Pin, pondait tous les jours un œuf bien conditionné; elle s'est mise ensuite à faire, tous les 2 jours, 2 œufs *hardélés*, c'est-à-dire sans coquille; si elle n'en pondait qu'un, il était gros comme celui d'une dinde, et avait deux jaunes.

XIIIe TABLEAU.

Oie commune ayant couvé des œufs d'oie.

1.	12.	jours. 30, et 31.	1.	»	1° Durée de la couvaison, 29 à 33 jours. 2° Latitude, 4 jours. 3° Intervalle entre la naissance des petits, 2 jours.
2.	12.	29.	0	2.	

NUMÉROS.	QUANTITÉS d'œufs couvés.	DURÉE de la couvaison.	INTERVALLE DE TEMPS entre les premiers et les derniers nés.	NOMBRE d'œufs non fécondés.	OBSERVATIONS ET RÉSUMÉ.
3.	12.	jours. 31, et 32.	1.	3.	4° Le nombre des œufs non fécondés est aux fécondés, comme 15 est à 13.
4.	15.	31, 32, et 33.	2.	2.	

Nota. De 15 œufs donnés à une oie, 9 sont éclos; 2 petits sont morts avant d'éclorre; 1 n'a pas été fécondé. De 12 autres, 7 sont éclos, 2 morts dans la coquille, et 2 non fécondés. Dans ces deux cas, on n'a point noté la durée de l'incubation.

XIVe TABLEAU.

Pigeonnes.

1.	2.	17, et 18.	1.	»	1° Durée de la couvaison, 17 à 20 jours. 2° Latitude, de 2 à 3 jours. 3° Intervalle, un jour, ou quelques heures. 4° Tous les œufs ont été fécondés.
2.	2.	20.	quelques heures.	»	

Nota. Les femelles du pigeon pondent ordinairement 2 œufs, dont un mâle et l'autre femelle; quelquefois les deux sont du même sexe. On a vu deux sœurs femelles faire ensemble 4 couvées dans le même nid, ayant été

couvertes par deux mâles, dont chacun avait en outre sa femelle. Elles couvaient tour-à-tour; ensuite elles se sont séparées, ayant trouvé dans la volière un mâle pour chacune à part. (Fait arrivé à Chatou.)

Quelquefois les pigeons changent de femelles.

M. de Vanieville, qui avait à Paris une volière d'expériences, qu'il observait avec la plus grande attention, a remarqué ce qui suit :

En 20 ans, il n'a vu qu'une pigeonne pondre 3 œufs; quelquefois elle n'en pond qu'un seul, soit par indisposition, soit au renouvellement de la *grappe*, c'est-à-dire de l'ovaire. Elle met un jour d'intervalle entre les 2 œufs. La ponte se fait ordinairement de midi à 4 heures, vers les 2 heures le plus souvent. Dans la journée, le mâle et la femelle couvent alternativement; le mâle, de 10 heures à 2 : la nuit, c'est la femelle seule; les vieux mâles la relayent plus souvent que les jeunes.

L'incubation est de 18 jours, à dater de la ponte du 2e œuf, quelquefois de moins ou de plus. Les pigeons se mettent bien sur le 1er œuf pondu, mais pour le garder; ils ne s'appesantissent pas dessus. La couvaison ne commence qu'après la ponte du 2e œuf; le 2e œuf s'ouvre presqu'en même temps que le 1er.

XVe TABLEAU.

Couvaisons de différentes femelles d'oiseaux du Jardin du Roi, à Paris.

M. Frédéric Cuvier a bien voulu me faire passer des notes, qui, n'étant pas aussi complètes que les miennes, ne peuvent être rangées de la même manière. Le point principal a été omis; savoir, l'intervalle entre les éclosemens des œufs de chaque couvée. M. Frédéric Cuvier convient qu'on n'examinait au Jardin du Roi les œufs, que le jour où l'on pensait qu'ils éclosaient. Au reste, l'exposé qui va suivre, apprendra, au moins, que dans la couvaison des

mêmes espèces d'oiseaux, il y a plus ou moins de prolongation; ce qui confirme en partie les observations précédentes, faites avec exactitude et détails.

OISEAUX.	DURÉE D'INCUBATION DANS 24 INDIVIDUS.
	jours.
Oie commune	31.
Oie commune (2 ans)	30.
Oie commune (2 ans)	30.
Oie commune (2 ans)	31.
Oie commune (2 ans)	30.
Oie de Hollande	31.
Canard à bec courbe	32.
Canard à bec courbe	30.
Canard polonais	32.
Canard de la Caroline	30.
Canard de la Caroline	31.
Cygne (de 6 ans)	33.
Cygne	33 et 34.
Cygne	33.
Paon	29.
Paon	26.
Faisan argenté (de 4 ans)	25.
Faisan argenté	26.

OISEAUX.	DURÉE D'INCUBATION DANS 24 INDIVIDUS.
	jours.
Faisan argenté.	25.
Faisan doré.	22.
Faisan doré.	24.
Faisan doré.	22.
Faisan doré.	22.
Poule de soie.	22.

Nota. Une serine verte a pondu un œuf un jour, et un le lendemain ; un petit est éclos un jour, et un le lendemain. Dans une seconde couvée d'un seul œuf, le petit est venu le 14e jour.

On voit, par ce dernier tableau, que des femelles d'oiseaux de même genre, telles que celles des canards, des oies, des cygnes, des faisans, des paons, de races communes ou étrangères, ont aussi présenté quelques variations dans leurs incubations. On ne peut méconnaître dans les résultats de toutes ces recherches un accord de la nature, pour ne rien établir de fixe dans la durée des incubations, comme dans celle des gestations.

ERRATA.

Page 7, ligne 5e (*note*), au lieu de *Marclay*, lisez : *Marcelay*.

Page 8, ligne 21e, au lieu de *y compris le* 21e, lisez : *y compris le* 321e.

Page 9, ligne 19e, après le mot *mois* mettez une virgule.

Page 10, ligne 10e, au lieu de 377e, 77 *jours*, lisez : 377e, 87 *jours*.

Page 11, dernier alinéa, ligne 21e et suivantes, jusqu'aux mots *Voyez le* 4e *tableau*; supprimez tout et substituez ceci : *Les observations sur les brebis présentent plus d'exemples de gestations précoces, car il y en a* 282 *sur* 912 ; *c'est environ un tiers ; tandis qu'on n'en compte que* 51 *sur* 447 *jumens, tant de celles qui ont été saillies une fois, que de celles qui l'ont été plusieurs fois : c'est un huitième ; et* 21 *sur* 570 *vaches, c'est-à-dire, un vingt-huitième.*

MÉMOIRE

Sur les rotations que certaines substances impriment aux axes de polarisation des rayons lumineux;

PAR M. BIOT.

Lu le 22 septembre 1818.

DANS l'état actuel de la chimie et de la physique, aucunes recherches ne semblent devoir être plus utiles et plus fécondes que celles qui concernent les propriétés individuelles des molécules dont les corps sont composés. En effet, ce sont ces propriétés qui décident et déterminent un grand nombre de phénomènes extrêmement remarquables, tels que l'état d'aggrégation et son énergie, le mode de cristallisation, les attractions capillaires, les affinités chimiques elles-mêmes, et tous leurs résultats si variés. Mais la recherche de ces propriétés est sujette à une grande difficulté, provenant de la complication des effets dans lesquels elles se montrent : car ceux-ci n'étant presque jamais produits par une seule molécule, mais par les forces combinées de plusieurs, il faut savoir y distinguer ce qui tient au nombre, de ce qui est dû à l'énergie individuelle; et cette distinction est d'autant plus délicate, que, dans beaucoup de circonstances, le nombre peut, jusqu'à un certain point, suppléer à l'énergie. Le mémoire que je présente aujourd'hui à l'Académie a

pour objet de faire remarquer, dans les particules de certaines substances, une propriété tout-à-fait exempte de cette complication; une propriété absolument individuelle à ces particules, et tellement inhérente à leur constitution, qu'elles la conservent dans toutes les situations qu'on leur donne, à toutes les distances où on les place, dans l'état solide ou liquide comme dans l'état de vapeur, et même dans les combinaisons très-intimes où on les engage. Cette propriété consiste dans la faculté qu'ont les molécules dont il s'agit, de faire tourner d'un certain angle, et dans un certain sens, les axes de polarisation des rayons lumineux.

Une pareille faculté existe dans le cristal de roche; et les phénomènes qui l'y rendent sensible ont été remarqués, pour la première fois, par M. Arago, dans ses belles expériences sur les couleurs que les lames des cristaux donnent avec la lumière polarisée (1). En cherchant les diverses circonstances qui pouvaient déterminer le développement de ces couleurs, dont il avait fait la découverte, il exposa, à un rayon solaire polarisé une plaque de cristal de roche, épaisse d'environ six millimètres, et qui se trouvait taillée perpendiculairement à l'axe de cristallisation : puis, analysant la lumière transmise, à l'aide d'une lunette prismatique, il reconnut que les deux images étaient colorées de teintes complémentaires, et que ces teintes changeaient à mesure que l'on tournait le double prisme qui servait à les observer; de manière que, dans une demi-révolution de ce prisme, l'image extraordinaire, par exemple, qui d'abord était rouge, devenait successivement orangée, jaune, jaune-verdâtre, et viola-

(1) *Mémoires de l'Institut pour* 1811, I[re] Part., pag. 115 et suiv.

cée, comme si les rayons colorés, de réfrangibilité diverse, eussent été polarisés par la plaque dans différens sens. Depuis, dans un autre mémoire, lu à l'Institut, mais non imprimé, il annonça que le faisceau lumineux modifié par la plaque de cristal de roche, pouvait être considéré comme un faisceau blanc dont les élémens prismatiques auraient été polarisés par des cristaux ayant leurs sections principales dirigées dans des angles divers. Deux ans après le premier travail de M. Arago, je m'occupai de ce genre de phénomènes (1); et, en suivant leurs apparences dans un grand nombre de plaques de cristal de roche, d'épaisseurs successivement variées, j'en déduisis, 1°, qu'ils consistent en une rotation progressive que les axes de polarisation des rayons lumineux éprouvent lorsqu'ils traversent ces plaques parallèlement à l'axe du cristal; 2° que la rapidité de cette rotation est inégale pour les rayons de couleur diverse, et qu'elle croît avec la réfrangibilité; de sorte que les rayons violets tournent plus vîte que les bleus, les bleus plus vîte que les verts, les verts plus vîte que les jaunes, et ainsi de suite jusqu'aux rouges qui tournent plus lentement que tous les autres. Je ne déterminai point alors les rapports de ces vîtesses, ni leur intensité absolue; ce qui eût exigé des recherches longues et délicates dont je ne ponvais pas prévoir encore l'utilité. Je me bornai à montrer en général comment un mode de rotation progressif pouvait donner la succession de couleurs observées à des épaisseurs diverses; et, pour fixer les idées, j'en indiquai hypothétiquement un qui me semblait assez concordant avec la marche des teintes; mais, pour avoir abandonné un mo-

(1) *Mémoires de l'Institut pour* 1812, Ire Part., pag. 218 et suiv.

ment l'expérience, ce seul guide qui puisse empêcher de s'égarer dans des phénomènes d'une espèce si nouvelle, je me trompai sur la loi de rotation que j'imaginai, et je me trompai encore en croyant que les rayons soumis à ce genre d'action, étaient ensuite réfractés par les cristaux autrement que les rayons polarisés par les procédés ordinaires. On verra dans ce mémoire qu'ils le sont absolument de même. Les particularités de coloration qui m'avaient semblé nécessiter cette différence, bien loin d'être des anomalies, deviennent des conséquences calculables de cette identité, lorsque l'on connaît la véritable loi des rotations.

Au reste, ces deux indications sont les seules que je trouve aujourd'hui à corriger dans mes premières recherches. Je montrai dès-lors que la rotation des rayons ne s'opérait que lorsqu'ils traversaient le cristal parallèlement ou presque parallèlement à son axe, de sorte que la force polarisante dépendante de la double réfraction fût nulle ou très-affaiblie : car, à mesure que le rayon réfracté s'incline sur l'axe, cette force augmente, et en augmentant elle enlève successivement une plus grande portion de lumière à la rotation, pour lui faire subir la polarisation relativement à des axes fixes. Je trouvai aussi que, dans certaines aiguilles de cristal de roche, la rotation s'opérait dans un sens, par exemple, de la droite vers la gauche de l'observateur, tandis que dans d'autres elle s'opérait dans le sens opposé, c'est-à-dire de la gauche vers la droite, quoique toujours suivant les mêmes lois et avec les mêmes vîtesses, car les mêmes couleurs se montraient à des épaisseurs égales. En outre, si l'on superposait deux de ces plaques à rotations contraires, les couleurs du rayon transmis étaient les mêmes que s'il eût traversé une

seule plaque égale à la différence des deux épaisseurs; ce qui montre que la rotation s'opère dans toute l'épaisseur d'une même plaque avec une égale vîtesse; de sorte que l'arc décrit par l'axe de polarisation de chaque rayon simple doit être proportionnel à l'épaisseur de cristal qu'il a parcourue. Par une suite nécessaire de ces résultats, si l'on superpose deux plaques d'épaisseurs égales et à rotations contraires, la seconde détruit dans les rayons la rotation que leur avait imprimée la première, et toute la lumière transmise à travers le système se trouve ramené à son état de polarisation primitif, de même que si elle eût traversé une plaque d'eau ou de toute autre substance qui n'aurait exercé aucune action polarisante sur les rayons lumineux.

Ayant ainsi trouvé que l'arc de rotation décrit par les rayons était proportionnel à l'épaisseur des plaques, et qu'il fallait, pour développer ce phénomène, éluder le pouvoir des forces polarisantes que la cristallisation fait naître, j'en tirai comme conséquence, qu'il était produit par les molécules mêmes du cristal de roche, ou par celles d'une substance uniformément distribuée entre elles, et qu'il l'était en vertu d'une faculté propre à ces molécules, indépendamment de leur état d'aggrégation; enfin, puisqu'il existait des aiguilles à rotations contraires, il fallait qu'elles fussent composées ou au moins uniformément mêlées de deux substances de nature différente, sans qu'aucun indice dans leur transparence ou leur forme cristalline pût faire soupçonner cette diversité. On verra ces inductions fortement appuyées par les faits dont j'ai à parler dans ce mémoire.

Le cristal de roche fut pendant long-temps la seule substance où je connusse l'existence de ces propriétés. Mais,

ayant été conduit à observer des lames cristallisées placées dans des milieux très-réfringens, tels que l'huile de térébenthine, par exemple, je m'aperçus que ce liquide modifiait la polarisation primitivement imprimée aux rayons lumineux qui le traversaient. Et, comme un effet pareil ne peut pas, dans un liquide, dépendre du mode d'apposition des particules, puisque ce mode n'a rien de déterminé, et peut être changé à tout instant, quand on agite la masse entière; j'en conclus aussitôt qu'il devait être produit par les molécules mêmes, et qu'en conséquence, il y indiquait l'existence de propriétés analogues à celles que les molécules de cristal de roche possèdent. C'est aussi ce que confirma l'expérience : car je trouvai qu'il s'opérait à travers la térébenthine des rotations absolument soumises aux mêmes lois que j'avais déterminées dans le cristal de roche, à cela près qu'elles y étaient beaucoup moins rapides, et qu'elles se dirigeaient toujours de la droite vers la gauche de l'observateur; au lieu que, dans le cristal de roche, j'avais reconnu deux sens opposés de rotation. Mais je retrouvai bientôt cette opposition dans d'autres substances, par exemple dans la dissolution alcoholique de camphre naturel, qui fait tourner les axes de polarisation de gauche à droite, en sens contraire de la térébenthine. Parmi les huiles essentielles même, j'en trouvai qui agissaient dans un sens, d'autres dans un autre; quelques-unes ne manifestèrent aucune action. J'imaginai qu'en formant des mélanges de ces liquides, je pourrais ajouter ensemble les forces de même nature, et opposer les unes aux autres les forces contraires. Cela devait être en effet, si la faculté de faire tourner les axes de polarisation des rayons est propre aux molécules mêmes. L'expérience confirma cette idée. Je pus

ainsi, à volonté, accroître ou diminuer les phénomènes, et former des mélanges où ils devinssent absolument nuls par l'opposition complète et l'égale intensité des actions; ce qui prouve que la loi de ces rotations est la même pour les mêmes rayons simples, dans les substances ainsi compensées.

Une faculté qui appartient aux molécules d'un corps offre un moyen de reconnaître sa présence, et de le distinguer des autres substances qu'une ressemblance apparente porterait à confondre avec lui. Ainsi le sucre de cannes et celui de betteraves, possédant l'un et l'autre ce genre d'action, on pourra s'en servir pour éprouver s'ils sont absolument identiques (1). La gomme, qui se rapproche tant du sucre de cannes par sa composition chimique, m'a paru n'avoir aucun effet. Par la fermentation le sucre perd cette faculté, et la gomme ne l'acquiert pas; mais alors les particules mêmes sont décomposées.

Ce genre de phénomènes se trouvant ainsi lié à des considérations de quelque importance pour la physique et la chimie, il devenait nécessaire d'en fixer tous les détails par des mesures précises. Tel a été le premier but des nouvelles recherches que je présente aujourd'hui à l'Académie. J'ai d'abord entrepris de déterminer le rapport des vîtesses de rotation dans une même épaisseur pour les différens rayons simples. Ces vîtesses sont en effet un des élémens les plus essentiels à connaître, puisque ce sont elles qui déterminent la nature des teintes pour des épaisseurs diverses de la même substance, et dans chaque position du prisme qui sert à analyser les rayons que la rotation a modifiés.

---

(1) J'ai déja fait cette comparaison; mais, pour lui donner plus de certitude, je me propose de la répéter en employant des sirops très-condensés, au lieu de simples dissolutions.

§ Ier.

Recherche de la loi des rotations des différens rayons simples dans le cristal de roche.

Pour obtenir ces mesures j'ai introduit dans la chambre obscure un rayon solaire fixe, très-mince, que j'ai brisé par un prisme très-réfringent; puis, en faisant tourner lentement ce prisme autour de son axe, j'ai fait tomber successivement les différentes portions du spectre sur une glace noire inclinée à leur direction, de manière à les réfléchir polarisés. De là les rayons réfléchis arrivaient à un prisme de spath d'Islande, placé au centre d'un cercle divisé, et porté sur une alidade qui permettait de tourner sa section principale dans toutes les directions possibles autour du plan de polarisation primitif. Dans le trajet des rayons je plaçai une plaque de cristal de roche taillée perpendiculairement à l'axe des aiguilles, qui est aussi celui de la double réfraction. Je la plaçai de manière que la transmission s'opérât bien parallèlement à cet axe; puis, tournant lentement l'alidade qui portait le prisme de spath d'Islande, je cherchais l'angle dans lequel il fallait amener sa section principale, pour que le rayon simple, transmis à travers la plaque, se réfractât tout entier ordinairement. Cette direction était en effet celle dans laquelle le plan de polarisation primitif avait été transporté par la rotation. L'appareil général de polarisation, que j'ai décrit dans les Mémoires de l'Institut et dans mon Traité de physique, est tout disposé pour cette expérience, et permet de la faire avec la plus grande facilité.

En observant ainsi successivement les rotations des différens rayons simples à travers une même plaque, je les trouvai

fort inégales et croissantes avec la réfrangibilité. Les angles observés avec plusieurs plaques d'épaisseurs diverses, furent proportionnels entre eux pour les rayons de même nature ; ce qui attestait la justesse des résultats. Il ne restait donc qu'à comparer les valeurs absolues des rotations dans chaque plaque pour les différens rayons simples. En le faisant, je reconnus qu'elles étaient réciproquement proportionnelles aux quarrés des longueurs de leurs accès, ou aux quarrés des longueurs de leurs vibrations dans le système des ondes.

Ce genre d'observation n'est pas sans difficultés. D'abord la portion de lumière colorée, jetée par le prisme sur la glace réfléchissante, ne s'y polarise jamais complètement : une portion pénètre la substance de la glace à une petite profondeur, puis ressort en rayonnant dans tous les sens; cette portion, qui échappe aux forces réfléchissantes extérieures, échappe aussi à la polarisation qu'elles produisent ; et elle n'est pas insensible quand on emploie un rayon solaire dans la chambre obscure. De-là il résulte qu'en analysant le rayon réfléchi, lorsqu'il a traversé la plaque de cristal de roche, la portion de lumière non polarisée, ou différemment polarisée, qui s'y trouve contenue, empêche qu'on ne le puisse réduire rigoureusement à une seule image, en tournant le prisme cristallisé à l'aide duquel on l'analyse. Cet inconvénient s'accroît si la lumière sur laquelle on opère n'est pas parfaitement simple : car alors les rayons qui la composent étant polarisés par la plaque dans des sens divers, ne peuvent pas être tous réfractés à-la-fois en un seul sens par le prisme cristallisé. Or on sait combien de précautions il faut employer pour obtenir une lumière parfaitement simple. Toutefois, sans atteindre ce degré de perfection, on peut, avec quelque soin,

rendre très-faible la portion de lumière non polarisée, ou irrégulièrement polarisée. Alors, en tournant le prisme cristallisé, on trouve une position où l'image extraordinaire qu'il donne est très-faible aussi. C'est là l'angle où il faut l'arrêter, et qui indique très-approximativement la rotation de la portion principale qui a été polarisée complètement en un sens unique. Ces minima, observés dans une même plaque, pour les différens rayons simples, répondent, comme je viens de le dire, à des rotations d'autant plus considérables, que les rayons sont plus réfrangibles, et sensiblement réciproques aux quarrés des longueurs de leurs accès. J'ai cru quelquefois m'apercevoir que la rotation des derniers rayons violets était un peu plus considérable que ne le supposent les valeurs de leurs accès, telles que Newton les a données. Mais il faut remarquer que l'extrémité violette du spectre est beaucoup plus allongée que l'extrémité rouge; et, en même temps qu'elle s'allonge, elle s'affaiblit jusqu'à n'avoir plus qu'une intensité insensible. Or, en fixant les accès du violet extrême, Newton a dû nécessairement se borner aux parties du spectre où ce violet encore était assez fort pour produire des effets sensibles dans les phénomènes des anneaux. Il ne faut donc comparer ses résultats qu'à des observations faites dans ces mêmes limites; d'autant plus qu'en les dépassant, et opérant sur les faibles traces du dernier violet visible, toutes les causes d'erreur provenant des lumières étrangères accidentellement répandues dans la chambre obscure, ou rayonnées par le prisme réfringent, acquièrent une influence proportionnellement beaucoup plus sensible. Par cette raison, j'ai cru ne pas devoir m'arrêter à des différences de $\frac{1}{35}$ ou $\frac{1}{40}$, qui m'ont quelquefois paru exister entre les rotations observées vers l'extrémité

violette du spectre et les rotations calculées par la voie que j'ai énoncée tout-à-l'heure; et, quoique ces différences n'exigeassent qu'un changement de $\frac{1}{70}$ ou $\frac{1}{80}$ dans les valeurs que Newton a assignées aux accès de ces dernières teintes, il m'a paru préférable de m'en tenir à ses résultats.

Il me reste à indiquer une dernière précaution, indispensable pour la réussite de ces expériences; elle concerne la construction et la disposition du prisme cristallisé dont on fait usage pour analyser la lumière transmise, et déterminer le sens simple ou multiple de sa nouvelle polarisation. Si l'on emploie un pareil prisme au lieu d'un rhomboïde, c'est pour augmenter l'écart des deux images, et en rendre ainsi la distinction plus parfaite. Mais alors il faut tailler et placer le prisme de manière que les rayons, une fois réfractés ordinairement ou extraordinairement, à sa première surface, ne soient plus divisés par la seconde, et suivent à leur émergence la même espèce de réfraction qu'ils ont prise dans son intérieur : car s'il en était autrement, la seconde réfraction, décomposant les faisceaux formés par la première, on serait obligé de tenir compte de cet effet par le calcul pour remonter à leur division primordiale, qui forme le caractère d'après lequel le sens de leur polarisation s'apprécie. Cette permanence de réfraction s'obtient en taillant le prisme de manière que le plan de son angle réfringent contienne l'axe du cristal avec lequel il est construit, et en le présentant aux rayons de manière que sa première surface leur soit toujours perpendiculaire. En effet, dans cette disposition, les deux faisceaux que la double réfraction forme restent toujours dans le plan de l'angle réfringent du prisme; et lorsqu'ils arrivent à sa seconde surface, le sens de la polarisation nouvelle qu'ils ont

acquise dans l'intérieur du cristal, force chacun d'eux à se réfracter simplement à son émergence, et à suivre la même espèce de réfraction qu'il avait subie primitivement. Au contraire, lorsque l'on omet ces précautions, la section principale de la seconde surface diffère nécessairement de celle de la première; et chacun des faisceaux déja divisés en entrant dans le prisme, se divise de nouveau à sa sortie. Cela devrait donner, à la rigueur, quatre images; mais, à cause du peu d'épaisseur qu'a ordinairement le prisme, la division des deux faisceaux dans l'intérieur les a très-peu séparés, de manière que les portions qui subissent une nouvelle réfraction à la seconde surface, se rejoignent sensiblement avec le faisceau principal de réfraction contraire; et l'on n'aperçoit ainsi que deux images, au lieu de quatre, parce qu'elles se superposent deux à deux. Mais on sent que cette superposition les dénature. L'effet de cette altération serait sensible, par exemple, si l'on se proposait de déterminer, par des expériences faites avec un prisme, les intensités relatives des faisceaux réfractés. Il est sur-tout à redouter dans les expériences de coloration, telles que celles qui nous occupent dans ce mémoire : car les teintes réfractées différemment, étant différentes, leur mélange par une réfraction nouvelle doit nécessairement les changer. Le seul moyen d'éviter cet inconvénient, c'est de donner aux prismes cristallisés, dont on fait usage, la forme et la disposition que j'ai plus haut indiquées. J'ai toujours eu cette précaution dans mes appareils. De plus, j'ai eu soin d'achromatiser parfaitement une des deux réfractions du prisme, à l'aide d'un prisme de crown-glass d'un angle convenable, afin d'éviter, au moins sur une d'entre elles, les effets de la dispersion, qui séparent les élémens des teintes,

et empêchent de les reconnaître exactement. Alors l'autre image reste encore un peu irisée, à cause de l'inégalité des deux réfractions; mais c'est un inconvénient inévitable; et l'on y remédie en corrigeant l'observation d'après l'image non dispersée, puisqu'il faut toujours que toutes les deux soient complémentaires l'une de l'autre, et, prises ensemble, forment du blanc.

Le genre d'observation que je viens d'exposer donnait bien les rapports des vîtesses de rotation dans une même plaque; mais il n'aurait pas été aussi convenable pour déterminer la valeur absolue d'une de ces vîtesses, et prouver sa constance dans les diverses épaisseurs : car, pour cela, il aurait fallu être sûr d'employer toujours identiquement la même espèce de lumière, de rouge, par exemple, ou de violet ou de vert, dans les observations comparées; ce qui eût été très-difficile, étant obligé, à chaque changement de plaque, de déplacer l'appareil pour vérifier rigoureusement la direction du rayon transmis. J'ai donc employé, pour ces nouvelles déterminations, une disposition différente. J'ai fait tomber sur la glace réfléchissante, non plus un rayon solaire, mais la lumière blanche et diffuse des nuées; puis, ayant transmis le rayon réfléchi, comme dans les premières expériences, à travers diverses plaques de cristal de roche, et à travers un prisme cristallisé, destiné à analyser la polarisation nouvelle imprimée par ces plaques, j'ai regardé les images ainsi formées, non plus à l'œil nud, mais à travers un verre rouge que M. Arago m'avait prêté, et qui a la propriété de ne transmettre que des rayons de cette couleur, lesquels m'ont paru répondre, dans le spectre, à une position intermédiaire entre le rouge moyen et le rouge extrême, mais

plus près de ce dernier. L'interposition de ce verre ramenait donc les observations au même état que si elles eussent été faites avec de la lumière rouge simple, et avec une espèce de lumière parfaitement identique dans toutes les observations. J'ai successivement étudié de cette manière la rotation de cette espèce particulière de rouge dans des plaques de cristal de roche d'épaisseurs diverses, taillées perpendiculairement à l'axe des aiguilles, et exposées perpendiculairement au rayon polarisé. J'ai eu soin d'en choisir qui exerçassent la rotation dans des sens contraires; puis, divisant la rotation opérée dans chacune d'elles par son épaisseur exprimée en millimètres, et mesurée au sphéromètre jusqu'aux millièmes, j'ai obtenu l'arc de rotation qu'une épaisseur d'un millimètre pouvait faire décrire à l'espèce de rouge que mon verre transmettait. J'ai pris la moyenne de tous ces résultats, afin d'obtenir une valeur plus sûre; et, pour juger de son exactitude, je m'en suis servi pour calculer l'arc total de rotation de chaque plaque, d'après son épaisseur donnée. La comparaison du calcul avec l'observation est contenue dans le tableau suivant; elle montre avec évidence que la rotation est uniforme, comme l'indiquaient déja les différences de rotation observées avec les plaques à rotations opposées.

ÉPAISSEUR de la plaque.	SENS de la rotation.	ARC de rotation.	ROTATION pour un millimètre. (1)	ARC DE ROTATION calculé d'après la moyenne.	EXCÈS de calcul.
1,mm 184	↖	— 22°	18,°581	21,°80	—0,°20
2, 999	↖	— 56	18, 667	55, 24	—0, 76
3, 397	↖	— 62½	18, 399	64, 04	+1, 54
3, 901	↗	+ 72	18, 456	71, 83	—0, 17
4, 005	↖	— 74	18, 476	73, 75	—0, 25
5, 014	↖	— 92	18, 348	92, 33	+0, 33
7, 465	↖	—136	18, 218	137, 46	+1, 46
7, 510	↗	+136	18, 109	138, 29	+2, 29
	Moyenne.......		18, 414		

(1) Le degré employé ici, et dans tout le reste du mémoire, est le degré sexagésimal.

Les écarts des observations sont, comme on voit, fort petits et d'un ordre qu'on ne peut guère éviter dans ce genre d'expérience. Ils sont les plus sensibles sur les deux dernières plaques; et cela doit être : car la rotation dans ces plaques étant fort considérable, à cause de leur grande épaisseur, elle sépare les rayons rouges que le verre transmet, lesquels, quoique presque homogènes, ne le sont pourtant pas en toute rigueur; et cette séparation, donnant à leurs axes de polarisation des directions un peu différentes, empêche

l'image extraordinaire de devenir tout-à-fait nulle dans aucune position du prisme cristallisé; de sorte que l'on peut seulement déterminer l'angle de rotation ou l'intensité de cette image en un minimum. Au reste, quelque réguliers que soient ces résultats, il ne serait pas impossible que l'on vînt à trouver des aiguilles de cristal de roche conformées de manière que la vîtesse de rotation y fût différente, comme il arriverait, par exemple, si les principes quelconques qui déterminent les rotations contraires alternaient successivement dans les couches d'une même aiguille, ou s'y trouvaient mêlées uniformément. Cette opposition ou ce mélange pourraient même produire des aiguilles dans lesquelles il ne se ferait plus du tout de rotation. J'en possède plusieurs où cette particularité singulière a lieu sur les bords des plaques que l'on en tire. Si l'on interpose ces plaques entre deux plaques de tourmaline à axes croisés, et que l'on regarde à travers ce système la lumière des nuées, on ne voit plus d'anneaux continus autour de l'axe de double réfraction, comme toutes les autres plaques de cristal de roche en produisent; mais les anneaux y sont coupés diamétralement par les quatre branches d'une croix noire, comme dans le spath d'Islande, le béril et les autres cristaux à un seul axe, dans lesquels il n'existe point de pouvoir de rotation. Je n'ai pas encore eu le loisir d'examiner si cette particularité est due à une succession de couches de pouvoirs opposés, ou à un mélange intime. Mais, quoi qu'il en puisse être, ces cas très-rares devront être considérés à part; et, dans l'immense majorité des autres, on devra employer pour la rotation, dans un millimètre de cristal de roche, la valeur moyenne que nous venons de déterminer. On verra bientôt avec quelle

fidélité l'application de cette valeur est confirmée par les observations des teintes obtenues, à des épaisseurs diverses, dans un grand nombre de plaques indépendantes de celles que nous avons ici employées pour l'établir.

D'après les expériences de Newton, que j'ai calculées et réduites en table, dans mon traité de physique, la longueur des accès, dans le vide, en millionnièmes de pouces anglais, est, pour le rouge extrême, 6,34628; et pour la limite de l'orangé et du rouge, 5,86586. Admettons que le rouge dont j'ai fait usage réponde au tiers de cet intervalle, du côté du rouge extrême : la longueur des accès de cette espèce de rouge sera 6,18614; et sa rotation, dans un millimètre de cristal de roche, sera, comme on l'a vu tout-à-l'heure, 18°,414. D'après le peu d'intervalle que comprennent les termes extrêmes du rouge, cette évaluation ne saurait être que très-près de la vérité; d'autant que la lumière transmise par notre verre rouge étant reçue à travers les prismes les plus réfringens, ne laisse apercevoir aucune trace d'orangé, mais seulement une faible dilatation du rouge foncé qui la compose. Maintenant, puisque la rotation des divers rayons simples est réciproque au quarré des longueurs de leurs accès, il n'y a qu'à prendre ces longueurs dans la table que j'ai donnée pag. 109 du tome IV de mon Traité de physique; et, en leur appliquant la proportionnalité indiquée, on trouvera, pour les rotations des diverses divisions du spectre, les valeurs suivantes :

Arc de rotation des divers rayons simples, à travers un millimètre de cristal de roche.

DÉSIGNATION DU RAYON SIMPLE.	ARC DE ROTATION EN DEGRÉS SEXAGÉSIM.	LOGARITHMES DE CET ARC EN DEGRÉS.
Rouge extrême	17,°4964	1,2429499
Limite du rouge et de l'orangé	20, 4798	1,3113251
de l'orangé et du jaune	22, 3138	1,3485731
du jaune et du vert	25, 6752	1,4095149
du vert et du bleu	30, 0460	1,4777883
du bleu et de l'indigo	34, 5717	1,5387209
de l'indigo et du violet	37, 6829	1,5761447
Violet extrême	44, 0827	1,6442681

Dans mes premières recherches faites sur des rayons blancs, qui par conséquent renfermaient toutes les couleurs prismatiques, j'avais remarqué que lorsque les plaques de cristal de roche n'avaient pas plus de $3^{mm}\frac{1}{2}$ d'épaisseur, le prisme cristallisé, qui sert pour analyser la lumière transmise, pouvait être tourné dans une direction telle que l'image extraordinaire devînt presque nulle, ou du moins très-faible (1) : dans cet état de faiblesse, elle était d'une teinte bleue ou violette, qui semblait ne contenir que des rayons de cette extrémité du spectre; mais, pour peu que l'on tournât le prisme un peu davantage, elle prenait aussitôt une teinte d'un rouge sombre, qui indiquait évidemment l'introduction de quelques rayons de rouge extrême dans sa couleur. La possibilité de ce mini-

(1) *Mémoires de l'Institut*, pour 1812, 1re part., pag. 245; *Traité de physique*, tom. IV, pag. 508.

mum, et son existence seulement dans les plaques les plus minces, tenait évidemment au peu de dispersion produite, à ces faibles épaisseurs, dans les axes du faisceau transmis, par la rotation inégale des rayons simples qui le composent; ce qui permettait de les réunir, en très-grande partie, en une seule réfraction ordinaire, qui ne laissait échapper sensiblement que les plus extrêmes et les plus obscurs d'entre eux, tels que les violets, les indigos et les bleus. En outre, pour opérer cette réunion le mieux possible, on conçoit qu'il fallait diriger la section principale du prisme cristallisé, suivant la direction d'axes correspondante à la partie la plus brillante du spectre, qui est le jaune; alors l'orangé et le rouge d'une part, le vert et le commencement du bleu de l'autre, étant les plus rapprochés de cette direction, doivent subir presque entièrement la réfraction ordinaire; et les autres rayons, bleus, indigos, violets, fournissant encore à cette réfraction une grande partie de leur lumière, ne laissent, pour l'image extraordinaire, qu'une très-faible portion de leurs rayons. Or ceci nous va fournir une confirmation frappante pour les rapports des rotations que j'ai déterminés tout-à-l'heure : car, en comparant les angles de rotation auxquels répond ce minimum pour des épaisseurs diverses, j'avais trouvé, dans mes premières recherches, qu'ils étaient proportionnels à l'épaisseur des plaques, et qu'en exprimant celles-ci en millimètres, le coëfficient de cette proportionnalité était 23,5372; c'est-à-dire qu'en multipliant l'épaisseur par ce nombre, on avait les degrés de rotation correspondans au minimum de l'image extraordinaire. Or, en effet, en comparant ce nombre à notre tableau de rotation pour les différens rayons simples, on voit qu'il répond au jaune, et presqu'au milieu du jaune, quoiqu'un peu plus près de

8.

l'orangé que du vert : car le milieu exact du jaune aurait pour rotation 23,8945, au lieu de 23,5372. C'était donc réellement la rotation du jaune que j'observais alors; et voilà pourquoi elle se trouvait proportionnelle à l'épaisseur. En général, dans les phénomènes de teintes, les observations faites sur les parties les plus brillantes répondent au jaune, et y répondent avec une précision qui devient très-grande dans des observations nombreuses et comparées. C'est sur l'observation des parties les plus brillantes des anneaux colorés réfléchis, que Newton a d'abord établi la progression de leurs diamètres, et par suite celles des épaisseurs auxquelles ils se forment. Les déterminations ainsi obtenues se sont trouvées donner les mêmes lois qu'une lumière simple, et leurs résultats absolus ont été exactement les mêmes que ceux du jaune simple observé dans la chambre obscure.

Connaissant la rotation des divers rayons simples à travers un millimètre de cristal de roche, nous pouvons calculer la distribution des axes de polarisation d'un faisceau lumineux de composition connue, après sa transmission à travers une plaque d'une épaisseur quelconque. Il suffit, pour cela, de multiplier l'arc de rotation propre à chaque rayon simple, par l'épaisseur de la plaque en millimètres. Si l'on suppose ensuite qu'un système de rayons simples, ainsi distribués, est réfracté par un rhomboïde de spath d'Islande, ou en général par un prisme cristallisé (1), dont la section principale ait une direction connue, on peut calculer la proportion de chaque couleur que ce prisme réfractera ordinairement, et la proportion qu'il réfractera extraordinairement : car, d'après une règle donnée par Malus, et confirmée jus-

(1) C'est ici que toutes les précautions prescrites dans la page 51 deviennent d'une nécessité indispensable.

qu'ici par toutes les expériences, la première partie sera proportionnelle au quarré du cosinus de l'angle formé par la section principale du prisme avec l'axe de polarisation de chaque rayon simple, et la seconde sera proportionnelle au quarré du sinus du même angle. On saura donc, par ce calcul, combien l'image ordinaire, et l'image extraordinaire, contiennent chacune de rayons simples de chaque couleur.

Or, quand on connaît ainsi les élémens prismatiques dont une teinte se compose, on peut définir cette teinte, et la calculer d'après une règle expérimentale que Newton a exposée dans son Optique, et que j'ai réduite en formules dans mon Traité de physique, tom. III, p. 447. En appliquant cette formule aux deux images dans lesquelles le prisme cristallisé résout la lumière transmise, on pourra assigner la teinte que chacune d'elles doit avoir pour chaque plaque, et dans chaque position du prisme cristallisé. Puis on verra si cette teinte répond exactement à l'observation. La comparaison peut déja se faire avec beaucoup de fidélité par l'inspection seule, car la plupart de ces teintes offrent des particularités très-remarquables, qui les distinguent et les caractérisent fort nettement; mais on obtiendra plus de précision et plus de sûreté encore, en rapportant, comme je l'ai fait, les teintes observées des plaques à celles des anneaux colorés, ou du colorigrade, qui leur ressemblent le plus; et cherchant ensuite si leur composition, calculée d'après la loi des rotations, les assimile en effet, non pour leur vivacité, mais pour leur nature, à celle des anneaux auxquels on les a jugées comparables, et dont la composition est également connue d'après les expériences de Newton.

Afin de donner à cette épreuve toute la légitimité, toute la certitude imaginables, je n'ai pas voulu l'appliquer à de

nouvelles expériences; je me suis borné à celles que j'ai autrefois faites, et qui sont consignées dans les Mémoires de l'Institut pour 1812, et dans mon Traité de physique. Elles sont nombreuses, faites avec soin, et depuis long-temps publiées; de sorte que leurs résultats offrent des vérifications entièrement indépendantes. J'ai choisi, dans le nombre, les observations relatives à treize plaques tirées d'une même aiguille très-pure, et d'épaisseurs variées depuis $0,^{mm}4$ jusqu'à $13,^{mm}5$; c'est-à-dire presque dans toute l'étendue des limites où la coloration des images produites par la rotation est sensible. Les épaisseurs de toutes ces plaques avaient été mesurées, à l'aide du sphéromètre, avec une exactitude qui va jusqu'aux millièmes de millimètres. Leurs rotations étaient toutes dirigées de la droite vers la gauche de l'observateur, c'est-à-dire ↖, suivant le caractère que j'ai adopté. Nous avons prouvé plus haut que la loi des rotations est la même pour un sens et pour l'autre.

Avec ces épaisseurs et le tableau de la pag. 58, j'ai calculé la distribution des axes de polarisation dans ces treize plaques, pour les limites des diverses couleurs simples; et les angles de rotation relatifs à ces limites sont rapportés dans le tableau suivant. Mais, avant de le présenter, je ferai observer qu'il y a deux de ces plaques pour lesquelles la réduction des parties du sphéromètre en millimètres n'avait pas été exactement faite dans mes recherches imprimées ; de sorte qu'il en était résulté une erreur de $0,^{mm}08$, pour l'une, et de $0,^{mm}100$, pour l'autre, comme on le peut voir sur les nombres mêmes consignés aux endroits cités (1). J'ai corrigé

(1) *Mémoires de l'Institut* pour 1812, pag. 227 et 233; *Traité de physique*, tom. IV, pag. 507.

ici ces erreurs, comme je devais le faire; mais j'ajouterai que j'en ai été averti par la différence sensible que les teintes calculées sur les premières évaluations en millimètres, offraient avec les teintes observées. Cette remarque peut faire déja connaître quelle est la minutieuse exactitude de la loi de rotation et des autres élemens tirés de l'expérience, qui servent de fondement au calcul des teintes.

Arcs de rotation des divers rayons simples correspondans aux limites des divisions du spectre.

ÉPAISSEUR DES PLAQUES.	ROUGE extrême.	LIMITE DU ROUGE et DE L'ORANGÉ	LIMITE DE L'ORANGÉ et DU JAUNE.	LIMITE DU JAUNE et DU VERT.	LIMITE DU VERT et DU BLEU.	LIMITE DU BLEU et DE L'INDIGO.	LIMITE DE L'INDIGO et DU VIOLET.	VIOLET extrême.
0,mm400	6°. 59'. 50	8°. 11'. 30	8°. 55'. 30	10°.16'.10"	12°. 1'.10"	13°.49'.40"	15°. 4'.20"	17°.38'. 0
1, 184	20. 43. 0	24. 14. 50	26. 25. 10	30.24. 0	35.24.30	40.56. 0	44.36.50	52.11.40
2, 094	36. 38. 20	42. 53. 0	46. 43.30	53.45.50	62.55. 0	72.22.40	78.54.30	92 18.30
3, 397(*)	59. 26. 10	69. 34. 10	75. 48. 0	87.13.10	102. 4. 0	117.26.20	128. 0.30	149.44.50
4, 005	69. 4. 20	82. 1. 20	89. 22. 0	102.49.50	120.20. 0	138.27.30	150.55.10	176.33. 0
5, 044	88. 15. 10	103. 3. 40	112. 33. 0	129.30.20	151.33.10	174.22.45	190. 4.15	222.21.10
5, 985	104. 43. 0	122. 34. 20	133. 32.50	153.40. 0	179.49.30	206.54.40	225.31.50	263.50.10
6, 982(*)	122. 9. 40	142. 59. 20	155. 47.40	179. 9.50	209.46.50	241.22.50	263. 6.10	307.47 20
7, 935	138. 50. 0	162. 30. 20	177. 3.40	203.44. 0	238.24.50	274.19.30	299. 0.50	349.47.40
9, 102	159. 15. 20	186. 24. 30	203. 6. 0	233.41.50	273.28.50	314.40.20	342.59.20	401.14.30
10, 124	177. 8. 0	207. 20. 10	225. 54.20	259.56.10	304.12.10	350. 0.10	381.30.10	446.17.30
11, 971	209. 27. 0	245. 9. 50	267. 7. 0	307.21.30	359.40.50	413.51.30	451. 6.10	527.42.50
13, 416	234. 44. 0	274. 45. 20	299. 21. 0	344.27.30	403. 6. 0	463.48.50	505.33.10	591.24.50

(*) Les épaisseurs marquées d'un astérisque sont celles des deux plaques dont les évaluations ont été corrigées. La première avait été portée, dans mes premières recherches, à 3mm,478, et la seconde à 7,082; tandis que leurs valeurs en parties du sphéromètre, qui étaient 1504 et 3091, donnent réellement 3mm,397, et 6mm,982, comme nous l'employons ici.

La distribution d'axes résultante de ces mesures, est représentée dans les treize premières figures.

Maintenant, pour calculer l'action du prisme cristallisé sur chacune de ces teintes, nommons a, a' les arcs de rotation qui la limitent, et désignons par i son intensité; c'est-à-dire la quantité totale de lumière qui la compose, et qui est répartie sur l'arc total $a'-a$. En considérant cette répartition comme uniforme, il y aura sur l'élément dx de cet arc la quantité de lumière $\frac{i\,dx}{a'-a}$. Supposons que le prisme cristallisé, qui sert pour analyser les rayons, ait sa section principale dirigée suivant l'angle α, cet angle étant compté comme a et a', à partir de la direction de la polarisation primitive ; alors l'élément de lumière $\frac{i\,dx}{a'-a}$, en pénétrant ce prisme, se divisera en deux faisceaux, l'un ordinaire, l'autre extraordinaire : donc les intensités seront

$$\frac{i\,dx}{a'-a}\cos.^2(x-\alpha) \quad \text{et} \quad \frac{i\,dx}{a'-a}\cdot\sin.^2(x-\alpha).$$

En faisant la somme de ces faisceaux élémentaires pour tout l'arc $a'-a$, on aura l'intensité totale des deux faisceaux finis, F_o F_e, dans lesquels i se décompose en pénétrant le prisme. Ce sera donc,

pour l'image ordinaire...... $F_o = \frac{i}{a'-a}\int \cos.^2(x-\alpha)\,dx;$

pour l'image extraordinaire.. $F_e = \frac{i}{a'-a}\int \sin.^2(x-\alpha)\,dx.$

Les intégrales doivent être prises depuis $x=a$ jusqu'à $x=a'$. En les effectuant, on trouve

$$F_o = \frac{i}{2}\left(1 + \frac{R\sin.(a'-a)}{a'-a}\cos.(a'+a-2\alpha)\right);$$

$$F_e = \frac{i}{2}\left(1 - \frac{R\,sin.(a'-a)}{a'-a}\,cos.(a'+a-2\alpha)\right).$$

R représente ici l'arc égal au rayon, c'est-à-dire le rayon du cercle converti en degrés. Lorsqu'on adopte la division sexagésimale, comme je l'ai fait dans ce mémoire, on a $R = 57°,29574$, dont le logarithme tabulaire est 1,7581225. Alors l'arc $a'-a$, qui se trouve hors des signes périodiques, doit être exprimé de même en degrés et fractions décimales de degrés.

Le facteur $\frac{R\,sin.\,(a'-a)}{a'-a}$ exprime réellement le rapport de $sin.\,(a'-a)$ à l'arc $a'-a$ lui-même. Lorsque l'arc est fort petit, ce rapport devient sensiblement égal à l'unité : alors l'expression de F_o se réduit à $i\,cos.^2\left(\frac{1}{2}(a'+a)-\alpha\right)$, et celle de F_e à $i\,sin.^2\left(\frac{1}{2}(a'-a)-\alpha\right)$; c'est-à-dire qu'elles sont les mêmes que si chaque teinte i était concentrée tout entière au milieu de l'arc qu'elle occupe. Dans les calculs qui vont suivre, j'ai employé cette approximation pour les plaques dont l'épaisseur n'excédait pas cinq millimètres. Pour les autres, j'ai employé l'intégrale rigoureuse; mais je me suis assuré, par le fait, qu'au-dessous de cinq millimètres, et même à des épaisseurs un peu plus grandes, il n'y avait pas, pour l'œil, de différence sensible entre les teintes déterminées par le calcul exact et par l'approximation.

Enfin, parmi toutes les positions que l'on pouvait supposer au prisme cristallisé qui sert pour analyser les rayons, j'ai choisi, pour le calcul, celle qui coïncide avec la polarisation primitive. On a alors α nul; et les intensités des deux

faisceaux, ordinaire, extraordinaire, dans lesquels se résout chaque teinte simple, ont pour expression,

$$F_o = \frac{i}{2}\left(1 + \frac{R\, sin.(a'-a)}{a'-a}\, cos.(a'+a)\right),$$

$$F_e = \frac{i}{2}\left(1 - \frac{R\, sin.(a'-a)}{a'-a}\, cos.(a'+a)\right).$$

C'est là la division opérée dans l'intérieur du prisme cristallisé, lorsque la lumière y a pénétré d'une quantité sensible. Maintenant si ce prisme est taillé et disposé comme nous avons recommandé plus haut de le faire, chacun des faisceaux F_o F_e, en sortant par sa seconde surface, suivra tout entier la même espèce de réfraction, et la même espèce de polarisation, qu'il avait subies à la première; et ainsi les deux valeurs de F_o et F_e continueront de les représenter; du moins en faisant abstraction de la perte de lumière occasionnée à la seconde surface par la réflexion partielle, laquelle n'aura aucune influence sensible sur les teintes, si, comme je l'ai pratiqué toujours, la division des deux faisceaux est très-faible; parce qu'alors la perte dont il s'agit s'opère, pour chacun d'eux, sensiblement dans la même proportion, eu égard à son intensité. Comme la somme de ces deux teintes est assujettie à former l'intensité totale i, on voit qu'il suffit de calculer une d'entre elles; l'autre pouvant aussitôt s'en conclure. J'ai choisi pour cela l'image extraordinaire F_e; et, en effectuant le calcul pour chacune des teintes du spectre, d'après les limites que nous leur avons trouvées tout-à-l'heure dans nos treize plaques, j'ai obtenu les résultats suivans:

Proportions des rayons simples de chaque couleur qui entrent dans l'image extraordinaire.

ÉPAISSEUR DES PLAQUES:	ROUGE.	ORANGÉ.	JAUNE.	VERT.	BLEU.	INDIGO.	VIOLET.
0,mm400	0,017466	0,022146	0,027796	0,037358	0,050009	0,062268	0,079271
1, 184	0,152427	0,183084	0,226340	0,295083	0,381911	0,461205	0,559250
2, 094	0,400506	0,496558	0,591023	0,724530	0,855366	0,938433	0,994158
3, 397	0,814698	0,911403	0,978209	0,993438	0,885781	0,707744	0,432526
4, 005	0,937685	0,996658	0,988719	0,864716	0,588590	0,341885	0,078487
5, 044	0,990276	0,906494	0,734307	0,404120	0,085807	0,001507	0,195042
5, 985	0,833698	0,619217	0,355052	0,067998	0,069904	0,351802	0,794037
6, 982	0,541344	0,261145	0,061891	0,083001	0,509626	0,897335	0,886850
7, 935	0,247294	0,036404	0.049284	0,435784	0,915931	0,904924	0,363911
9, 102	0,033504	0,070970	0,391126	0,887213	0,805563	0,277225	0,118635
10, 124	0,065697	0,358332	0,771395	0,912451	0,316140	0,034309	0,622253
11, 971	0,536668	0,931845	0,879109	0,239559	0,245213	0,881148	0,570555
13, 416	0,896562	0,901350	0.392523	0,130155	0,844805	0,661013	0,181693

Dans ces évaluations, chaque nombre de rayons simples est exprimé, en prenant pour unité le nombre total i des rayons de son espèce qui entrent dans la lumière blanche à laquelle on présente la plaque. Maintenant, si l'on veut déterminer la teinte composée qui résulte de leur mélange, il faudra connaître combien la lumière blanche contient de rayons de chaque espèce sur un nombre total donné. C'est à quoi conduisent les expériences de Newton, rapportées dans mon Traité de physique, tom. III, pag. 447. Si la totalité de la lumière qui entre dans un rayon blanc, est représentée par la somme des fractions $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{9}$, chacune de ces fractions représentera la proportion de chaque couleur simple qui entre dans cette lumière, en commençant par le rouge et finissant par le violet. Pour rendre les calculs plus simples,

nous emploierons toutes ces fractions multipliées par 1000. Alors leur somme sera $\frac{79}{120}$. 1000, ou 658 $\frac{1}{3}$; ce qui représentera le nombre total des rayons, parmi lesquels la fraction $\frac{1000}{9}$ représentera le nombre des rouges, $\frac{1000}{16}$ celui des orangés, $\frac{1000}{10}$ celui des jaunes, et ainsi de suite. Si donc nous avons trouvé que, dans la dernière plaque, par exemple, la proportion du rouge qui entre dans l'image extraordinaire, est 0,896562, il faudra multiplier la fraction $\frac{1000}{9}$ par ce rapport ; et le produit $\frac{896,562}{9}$, ou 99,618, sera le nombre absolu de rayons rouges qui entreront dans cette image, le nombre total des rayons de toutes les couleurs qui composent la lumière blanche étant 658 $\frac{1}{3}$. Le même calcul, appliqué successivement à chaque espèce de rayons et à chacune de nos treize plaques, a donné les résultats contenus dans le tableau suivant :

Nombres absolus des rayons simples qui composent l'image extraordinaire.

ÉPAISSEUR DES PLAQUES.	ROUGE.	ORANGÉ.	JAUNE.	VERT.	BLEU.	INDIGO.	VIOLET.	NOMBRE TOTAL DES RAYONS.
0,mm400	1,9407	1,3841	2,7796	4,1509	5,0010	3,8917	8,8079	27,9559
1, 184	16,9360	11,4428	22,6340	32,7870	38,1911	28,8253	62,1389	212,9551
2, 094	44,5007	31,0349	59,1023	80,5032	85,5366	58,6521	110,4620	469,7918
3, 397	90,5220	56,9627	97,8209	110,3820	88,5781	44,2340	48,0585	536,5582
4, 005	104,1850	62,2911	98,8719	96,0794	58,8590	21,3678	8,7208	440,3747
5, 044	110,0310	56,6558	73,4308	44,9022	8,5807	0,0942	21,6714	315,3661
5, 985	92,6331	38,7011	35,5052	7,5553	7,7671	21,9876	88,2263	292,3757
6, 982	60,1493	16,3210	6,1891	9,2232	50,9626	56,0840	98,5389	297,4685
7, 935	27,4771	2,2753	4,9284	48,4250	91,5931	56,5577	40,4345	271,6910
9, 102	3,7227	4,4356	39,1126	98,5793	80,5568	17,3269	13,1811	256,9150
10, 124	7,2997	22,3957	77,1395	101,3830	31,6140	2,1443	69,1392	311,1154
11, 971	59,6296	58,2400	87,9109	26,6186	24,5213	55,0715	63,3945	375,2743
13, 416	99,6185	56,3344	39,2523	14,4611	84,4805	41,3095	20,1881	355,6444

Maintenant, il ne reste plus qu'à appliquer à ces élémens

la construction que Newton a donnée dans son optique, et que j'ai réduite en formule dans mon Traité de physique, pour déterminer la teinte composée qui résulte du mélange d'un nombre donné de rayons simples. En conservant les dénominations que j'ai employées dans cette formule, on trouve les résultats suivans.

ÉPAISSEUR DES PLAQUES.	ÉLÉMENS DE LA TEINTE DE L'IMAGE EXTRAORDINAIRE.				ÉLÉMENS DE LA TEINTE DE L'IMAGE ORDINAIRE.			
	U	Δ	1—Δ	N	U'	Δ'	1—Δ'	N'
0,mm400	284°.43'.40"	0,27232	0,72768	27,9559	104°.43'.40"	0,01213	0,98787	630,3774
1, 184	281.59.50	0,24580	0,76420	212,9551	101.59.50	0,11753	0,88247	445,3782
2, 094	266.24.30	0,17047	0,82953	469,7918	86.24.30	0,42437	0,57563	188,5415
3, 397	148.38.40	0,14418	0,85582	536,5582	328.38.40	0,63534	0,36466	121,7751
4, 005	115.54.40	0,29795	0,70206	440,3747	295.54.40	0,60198	0,29802	217,9586
5, 044	75.46.20	0,45617	0,54383	315,3661	255.46.20	0,41710	0,58290	342,9672
5, 985	17.52.50	0,45448	0,54552	292,3757	197.52.50	0,36310	0,63690	365,9576
6, 982	319. 2.20	0,47815	0,52185	297,4685	139. 2.20	0,39415	0,60585	360,2648
7, 935	257.52.40	0,48590	0,51410	271,6910	77.52.40	0,34144	0,65856	386,6423
9, 102	200.17.40	0,56901	0,43099	256,9150	20.17.40	0,36427	0,63573	401,4183
10, 124	162.27.40	0,28505	0,71495	311,1154	342.27.40	0,25541	0,74459	347,2179
11, 971	51.43.50	0,17927	0,82073	375,2743	231.43.50	0,23767	0,76233	283,0590
13, 416	31.43.30	0,10394	0,89606	355,6444	211.43.30	0,12213	0,87787	302,6889

Pour interpréter ces résultats, il faut se rappeler que Newton, dans sa construction, divise une circonférence de cercle en parties qui se suivent, et sur lesquelles les diverses couleurs simples sont censées distribuées. Alors l'angle U indique l'arc, et par conséquent l'espèce de couleur prismatique à laquelle la teinte de l'image extraordinaire se rapporte, et les valeurs de Δ et 1—Δ indiquent les proportions de couleur simple et de blanc par le mélange desquelles elle pourrait

être imitée. Les valeurs de U', Δ', 1—Δ', ont une signification analogue qui s'applique à l'image ordinaire. Il ne reste plus qu'à rappeler les arcs que chaque couleur occupe sur la circonférence dans la construction de Newton. En voici les valeurs, telles que je les ai calculées dans mon Traité de physique.

DÉSIGNATION DES COULEURS.	VALEURS DES ARCS AUXQUELS ELLES RÉPONDENT.		
Rouge extrême	0°.	0'.	0"
Rouge moyen	30.	22.	47
Limite du rouge et de l'orangé	60.	45.	34
Orangé moyen	77.	50.	53
Limite de l'orangé et du jaune	94.	56.	12
Jaune moyen	122.	16.	42
Limite du jaune et du vert	149.	37.	13
Vert moyen	180.	0.	0
Limite du vert et du bleu	210.	22.	47
Bleu moyen	237.	43.	17
Limite du bleu et de l'indigo	265.	3.	48
Indigo moyen	282.	9.	7
Limite de l'indigo et du violet	299.	14.	26
Violet moyen	329.	37.	13
Violet extrême	360.	0.	0

Comme le violet extrême et le rouge extrême se réunissent dans cette construction, l'un finissant où l'autre commence, Newton fait remarquer que lorsque l'angle U approchera d'être nul ou égal à 360°, la teinte cherchée ne répondra ni à l'une ni à l'autre de ces couleurs prismatiques, mais à

un pourpre tirant sur le rouge ou sur le violet, selon que l'angle U s'écartera vers l'une ou l'autre de ces teintes. Et il ajoute que le rouge violacé ou le violet rougeâtre, ainsi obtenus, auront plus de feu et d'éclat que n'aurait le rouge ou le violet simple.

A l'aide de ces dernières indications, on peut facilement interpréter tous les résultats contenus dans le tableau précédent. C'est ce que nous allons faire successivement pour chaque plaque. Je ferai seulement précéder cette interprétation d'une remarque, c'est que, ne pouvant achromatiser complétement le prisme cristallisé qui sert pour analyser les images, à cause de l'inégalité de ses deux réfractions, j'ai achromatisé complétement l'image extraordinaire, qui, par conséquent, devra être considérée comme plus sûre.

Interprétations des teintes indiquées par le calcul, et leur comparaison avec les observations.

La valeur de U, relative à cette plaque, répond presque au milieu de l'arc qui appartient à l'indigo prismatique. Elle indique donc par-là, que la teinte de l'image extraordinaire sera un indigo; de plus, la valeur de Δ, comparée à celle de 1—Δ, montre que cette teinte serait semblable, pour l'œil, à celle que l'on formerait en mêlant 27 parties d'indigo prismatique avec 73 de blanc. Ce mélange donnerait un indigo d'une assez bonne teinte; mais l'on voit, par la valeur de N, que son intensité sera excessivement faible, puisqu'il ne contiendra en tout que 28 rayons sur 658, c'est-à-dire moins de $\frac{1}{23}$ de la lumière blanche totale transmise à travers la plaque. Ce petit nombre de rayons enlevés au faisceau qui compose

ÉPAISSEUR DES PLAQUES.

$0^{mm},400.$

ÉPAISSEUR DES PLAQUES.

0mm,400. l'image extraordinaire, n'y devra donc pas produire, par son absence, une coloration sensible. Aussi les valeurs de U', Δ' et 1—Δ' indiquent-elles que la teinte de cette image sera un jaune un peu orangé, semblable pour l'œil à celui que l'on formerait en mêlant 1 partie de jaune avec 99 de blanc; ce qui, en effet, ne donnerait aucune coloration sensible. L'observation confirme ces résultats, car elle a donné E bleu sombre, O blanc, comme on peut le voir dans mes recherches anciennement publiées (1). (*Mém.*, pag. 221.)

1mm,184. Ici, la valeur de U indique encore, pour l'image extraordinaire, un indigo; et celles de Δ et 1—Δ montrent que cet indigo sera semblable, pour l'œil, à celui que l'on formerait avec 25 parties d'indigo et 75 de blanc. Il sera donc un peu plus blanchâtre que le précédent ; mais il sera en outre beaucoup moins sombre, parce qu'il contiendra 213 rayons sur 658; c'est-à-dire près du tiers de la lumière transmise à travers la plaque. Aussi les valeurs de U', Δ', 1—Δ', relatives à l'image ordinaire, indiquent-elles pour sa teinte un jaune tel qu'on l'imiterait avec 12 parties de jaune pur et 88 de blanc; ce qui produirait un jaune pâle et blanchâtre, mais toutefois sensiblement coloré. L'observation est ici parfaitement d'accord avec le calcul, car elle a donné E bleu un peu blanchâtre, O blanc légèrement jaunâtre. (*Mém.*, pag. 225.)

2mm,094. Ici la valeur de U annonce l'image extraordinaire sur la limite du bleu et de l'indigo. Les valeurs de Δ et 1—Δ montrent

---

(1) Ces observations, ainsi que toutes celles qui se rapportent aux plaques suivantes, sont consignées dans les *Mémoires de l'Institut pour* 1812, 1re part., pag. 221 et suiv. Plusieurs d'entre elles se trouvent aussi dans mon *Traité de physique*, tom. IV, pag. 501 et suiv.

que sa teinte serait semblable, pour l'œil, à celle que l'on composerait avec 17 parties de bleu foncé et 83 de blanc; ce qui produirait un blanc-bleuâtre. De plus, cette teinte sera abondante en lumière, puisqu'elle contiendra 470 rayons sur 658. Quant à la teinte de l'image extraordinaire, les valeurs de U', Δ', 1—Δ', montrent qu'elle sera un orangé tirant sur le jaune, et tel qu'on l'imiterait en mêlant 42 parties de jaune orangé avec 58 de blanc. Ce sera donc un jaune orangé d'une bonne teinte. L'observation est parfaitement d'accord avec ces résultats, car elle a donné : E blanc-bleuâtre ou bleu-blanchâtre; O jaune-orangé. (*Mémoires*, p. 226; *Traité de phys.*, t. IV, p. 506.) ÉPAISSEUR DES PLAQUES. $2^{mm},094$.

Ici la valeur de U fait répondre l'image extraordinaire à la limite du jaune et du vert. Les valeurs de Δ et 1—Δ indiquent une teinte pareille à celle que l'on composerait avec 14 parties de jaune-verdâtre et 86 de blanc; ce qui, d'après la faible coloration du vert-jaunâtre, et le petit nombre de ses parties, formerait un blanc extrêmement peu coloré. Il n'en est pas ainsi de l'image ordinaire : d'après les valeurs de U', Δ', 1—Δ', on voit que ce sera un violet tel qu'on l'imiterait en mêlant 63 parties de violet pur avec 36 de blanc : ce sera donc un bon violet; et de plus on peut remarquer qu'étant à 30° seulement de la jonction du rouge et du violet dans la construction de Newton, il pourra être un peu différent du violet prismatique, et tirer un peu vers le pourpre. L'observation s'accorde avec ces indications, car elle a donné O blanc sensiblement, E rouge-violacé. (*Mém.*, pag. 227; *Traité*, pag. 507.) On sait, par l'expérience, que lorsque l'une des deux images est presque blanche, il ne faut qu'un mouvement extrêmement petit du prisme cristallisé, 1° ou $3^{mm},397$.

ÉPAISSEUR DES PLAQUES. 2°, par exemple, pour faire passer l'image complémentaire du rouge-violacé au violet et même au violet-bleuâtre.

4mm,005. Ici la valeur de U fait répondre l'image ordinaire presque au milieu du jaune; et celles de Δ et 1—Δ l'assimilent à une teinte formée de 30 parties de jaune prismatique avec 70 de blanc; ce qui formerait un jaune-clair, d'autant que la valeur de N montre qu'il serait fort abondant en lumière, puisqu'il contiendrait 440 rayons sur 658. Quant à l'image extraordinaire, la valeur de U la place presque sur la limite de l'indigo et du violet; et les valeurs de Δ', 1—Δ', montrent qu'elle serait semblable, pour l'œil, à celle qu'on formerait en mêlant 60 parties d'indigo-violacé, avec 30 de blanc; ce qui formerait un indigo-violacé d'une très-bonne teinte. L'observation est parfaitement d'accord avec ces résultats, car elle a donné O jaune-citron (c'est-à-dire jaune-clair), et E bleu un peu violacé (*Mém.*, pag. 240). Cet accord est d'autant plus satisfaisant, que la plaque 4,005 n'était pas tirée de la même aiguille que les précédentes.

5mm,044. Ici la valeur de U indique, pour l'image extraordinaire, un orangé, et les valeurs de Δ et 1—Δ l'assimilent à la teinte que l'on formerait en mêlant 46 parties d'orangé pur avec 54 de blanc; ce qui formerait un bon orangé. En outre, la valeur de N montre qu'il sera abondant en lumière, puisqu'il contiendra presque la moitié de toute celle qui traverse la plaque. Quant à l'image ordinaire, les valeurs de U', Δ', 1—Δ', montrent que ce sera un bleu tirant beaucoup vers l'indigo, par conséquent d'une très-bonne espèce, et tel qu'on l'imiterait en mêlant 42 parties de bleu-indigo pur avec 58 de blanc; ce qui formerait un beau bleu. L'observation est encore ici très-conforme à ces indications, car elle a donné E orangé

brillant; O bleu (*Mém.*, pag. 228.); et, d'après l'éclat de ces teintes, je les avais comparées à celles du second ordre des anneaux de Newton. ÉPAISSEUR DES PLAQUES.

Ici la valeur de U indique, pour l'image extraordinaire, un rouge, qui, étant intermédiaire entre le rouge moyen et la jonction du violet au rouge, doit avoir une teinte un peu pourpre. Les valeurs de Δ et 1—Δ assimilent cette teinte à celle que l'on formerait avec 45 parties de rouge pur et 55 de blanc; ce qui formerait un bon rouge. De plus, la valeur de N montre qu'il sera assez abondant en lumière, parce qu'il contiendra un peu moins de la moitié de toute celle qui traverse la plaque. Quant à l'image ordinaire, d'après les valeurs de U′, Δ′, 1—Δ′, ce sera un vert tirant plutôt un peu vers le bleu que vers le jaune, par conséquent un bon vert, et tel qu'on l'imiterait en mêlant 40 parties de vert prismatique avec 60 de blanc; d'où résultera un vert vif. En outre, d'après la valeur de N, cette teinte sera abondante en lumière. Enfin l'éclat des deux images sera encore rehaussé par leur contraste. Aussi l'observation a-t-elle donné: E rouge éclatant, O vert superbe. 5mm,985.

Ici la valeur de U indique, pour l'image extraordinaire, un violet tirant plutôt sur l'indigo que sur le rouge. Les valeurs de Δ et 1—Δ assimilent sa teinte à celle que l'on composerait en mêlant 48 parties de ce violet-bleuâtre avec 52 de blanc, d'où résulterait une teinte de violet-bleuâtre bien marquée; d'autant plus que, d'après la valeur de N, elle serait abondante en lumière. Les valeurs de U′, Δ′, 1—Δ′, indiquent, pour l'image ordinaire, un jaune tirant un peu sur le vert, et tel qu'on le composerait en mêlant 39 parties de ce jaune-verdâtre avec 61 de blanc. L'observation a donné 6mm,982.

ÉPAISSEUR DES PLAQUES. 6mm,982.

E pourpre, O vert-clair un peu jaunâtre (*Mém.*, pag. 233). Cette dernière indication semble différer de quelques degrés de ce que le calcul nous indique, puisque la teinte devrait plutôt avoir été jugée un peu verdâtre. Mais il est possible que cette petite différence tînt à ce que l'observation aurait été faite par un ciel découvert et sans nuage, dont la lumière contient plus de bleu, et par conséquent moins de rouge et de jaune qu'il n'en entre dans la lumière tout-à-fait blanche. Or, en diminuant un peu dans le calcul le nombre des rayons rouges, et les remplaçant par des bleus, on abaisserait tout de suite la valeur de U à la limite du jaune et du vert dont elle est éloignée seulement de 10°. Ce qui semble confirmer cette explication, c'est que la teinte E, que j'ai appelée un pourpre, a été assimilée dans mon observation au pourpre du second ordre, qui est un gris de lin ou un violet-bleuâtre ; et en effet, en calculant la valeur de U pour le pourpre du second ordre, d'après sa composition déduite de la théorie des anneaux colorés, je la trouve égale à 319° 34′, c'est-à-dire presque exactement pareille à celle que le calcul assigne à notre image extraordinaire. Je ne me suis donc pas trompé en assimilant cette image au pourpre du second ordre; mais alors son complément doit être un jaune un peu verdâtre, et non un vert-jaunâtre, à moins que le contraste des couleurs des deux images, vues à-la-fois à travers le prisme cristallisé, ne fasse juger autrement, par la force de l'illusion. Enfin il faut se rappeler que, par le défaut inévitable d'achromatisme simultané des deux images, l'extraordinaire est celle à laquelle on l'a appliqué, et par conséquent celle à laquelle il faut s'attacher, comme plus sûre. Au reste, on voit combien les différences de ces nuances sont légères; et il faut

que les autres applications du calcul aient été aussi exactes que nous les avons trouvées, pour essayer d'expliquer un si petit écart. ÉPAISSEUR DES PLAQUES.

Ici la valeur de U indique, pour l'image extraordinaire, un bleu tirant beaucoup sur l'indigo, par conséquent un beau bleu; les valeurs de Δ et 1—Δ assimilent la teinte à celle que l'on composerait en mêlant 49 parties de ce bleu avec 51 de blanc, ce qui formerait une belle couleur bleue; et de plus la valeur de N montre qu'elle serait abondante en lumière. Quant à l'image extraordinaire, les valeurs de U′, Δ′, 1—Δ′, montrent que ce sera un orangé tel qu'on l'imiterait en mêlant 34 parties d'orangé pur et 66 de blanc; ce qui formerait un orangé encore assez vif, d'autant que, d'après la valeur de N′, il contiendrait beaucoup de lumière. L'observation est d'accord avec ces indications, car elle a donné E bleu, O orangé-rougeâtre (*Mém.,* pag. 234). Cette dernière dénomination s'entendait probablement de la nature de cet orangé, tirant plutôt au rouge qu'au jaune, comme le véritable orangé doit être. En outre, la plus petite déviation du prisme de la direction fixe que le calcul lui suppose, ou la plus légère inclinaison donnée à l'axe de la plaque cristallisée sur le rayon transmis qui doit lui être parallèle, suffisent pour produire de ces légères variations. 7mm,935.

Ici la valeur de U indique, pour l'image extraordinaire, un vert tirant plutôt vers le bleu que vers le jaune. Les valeurs de Δ, 1—Δ, assimilent sa teinte à celle que l'on formerait en mêlant 57 parties de ce vert pur avec 43 de blanc; et en outre, la valeur de N montre qu'il contiendra entre la moitié et le tiers de toute la lumière transmise. Ce sera, par conséquent, un beau vert. Quant à l'image ordinaire, les 9mm,102.

ÉPAISSEUR DES PLAQUES. 9mm,102. valeurs de U′, Δ′, 1—Δ′, indiquent un rouge tirant un peu vers la limite du rouge et du violet, par conséquent un peu pourpre. Sa teinte sera pareille à celle que l'on formerait en mêlant 36 parties d'un pareil rouge pris dans le spectre, avec 64 parties de blanc; en outre, la valeur de N′ montre qu'il contiendra beaucoup de lumière, et les deux images rehausseront encore leur éclat par leur contraste. L'observation est encore ici d'accord avec le calcul, car elle a donné O rouge-pourpre, E vert superbe. (*Mém.*, pag. 236.)

10mm,124. Ici les valeurs de U, Δ et 1—Δ, indiquent, pour l'image extraordinaire, un vert tirant sur le jaune plutôt que sur le bleu, et tel qu'on l'imiterait en mêlant 29 parties de ce vert jaunâtre avec 71 de blanc; ce qui formerait un vert pâle et blanchâtre. Quant à l'image ordinaire, les valeurs de U′, Δ′, 1—Δ′, indiquent un pourpre-rougeâtre, tel qu'on l'imiterait en mêlant 26 parties de violet-pourpre (non pas de violet prismatique) avec 74 parties de blanc. L'observation est encore ici d'accord avec le calcul, car elle a donné E vert un peu blanchâtre, O rouge de sang. (*Mém.*, pag. 236.)

11mm,971. Ici les valeurs de U, Δ, 1—Δ, indiquent, pour l'image extraordinaire, un rouge tirant sur l'orangé, presque sur la limite de l'orangé et du jaune, et tel qu'on l'imiterait en mêlant 18 parties de ce rouge-jaunâtre avec 82 parties de blanc; ce qui formerait un rouge pâle jaunâtre. Quant à l'image ordinaire, les valeurs de U′, Δ′, 1—Δ′, indiquent un bleu composé de 24 parties de bleu et 76 de blanc. Les observations s'accordent parfaitement avec la teinte extraordinaire, car elles ont donné E rouge-jaunâtre pâle; ce qui est rigoureusement conforme à l'indication du calcul (*Mémoires*, pag. 236.) Mais elles donnent O vert-bleuâtre au lieu

de bleu, ce qui est le complément nécessaire d'un rouge-jaunâtre. Mais peut-être la force du contraste suffit pour faire porter ce jugement; ou peut-être l'achromatisme imparfait de l'image ordinaire occasionne-t-il la différence.

ÉPAISSEUR DES PLAQUES. 13mm,416.

Ici les valeurs de U, Δ, 1—Δ, indiquent, pour l'image extraordinaire, un rouge correspondant au rouge moyen, et tel qu'on l'imiterait en mêlant 18 parties de ce rouge et 82 de blanc; ce qui formerait un rouge pâle. Quant à la teinte ordinaire, les valeurs de U', Δ', 1—Δ', indiquent un vert-bleuâtre exactement sur la limite du vert et du bleu, et tel qu'on l'imiterait en mêlant 24 parties de ce vert avec 76 de blanc. L'observation est d'accord avec ces indications, car elle a donné E rouge, O vert; et ces teintes étaient assez pâles, car je les avais comparées à celles du 4e ordre d'anneaux; ce qui indique que le vert y était plus vif que le rouge, conformément aux indications de notre calcul. (*Mém.*, pag. 226.)

En discutant les teintes des deux premières plaques, qui sont les plus minces, on a vu qu'elles répondent l'une et l'autre presque à une même nuance d'indigo, mêlée seulement avec une proportion de blanc plus ou moins considérable. Ceci est un caractère commun à toutes les plaques très-minces, et l'on peut aisément en faire l'expérience avec les liquides dont les épaisseurs peuvent être successivement graduées en en versant plus ou moins dans un tube vertical, après avoir placé aussi l'appareil de polarisation dans cette position. Car, du moment où l'épaisseur est suffisante pour donner une image extraordinaire sensible, le prisme cristallisé ayant, comme nous le supposons, sa section principale parallèle à la direction de la polarisation primitive, cette image ne commence pas par être violette, comme on

aurait pu le croire ; elle est d'abord d'un bleu sombre et pâle, tel que les calculs précédens l'ont indiqué pour nos deux premières plaques. Cette propriété tient évidemment à la loi des rotations même : car on pourrait imaginer d'autres lois dans lesquelles l'image extraordinaire, correspondante à une épaisseur infiniment petite, et que l'on pourrait appeler naissante, offrirait une teinte composée analogue au violet, au vert, au blanc, ou à toute autre couleur. Puis donc que, dans ces phénomènes, les images naissantes sont d'un indigo sombre et pâle, il est essentiel de montrer que cette propriété est aussi une conséquence de la loi que nous avons assignée aux rotations.

Pour cela, il faut se rappeler d'abord qu'en nommant a, et a', les arcs qui limitent la teinte dont l'intensité totale est i, la proportion de cette teinte qui entre dans l'image extraordinaire pour la position que nous donnons au prisme cristallisé, est exprimée par la formule

$$\frac{i}{2}\left(1-\frac{R\,sin.\,(a'-a)}{a'-a}\,cos.\,(a'+a)\right).$$

Lorsque les arcs a, a', sont extrêment petits, $sin.\,(a'-a)$ devient sensiblement égal à $\frac{a'-a}{R}$, et la formule se réduit à

$$i\,sin.^2\,\frac{1}{2}\,(a'+a).$$

$\frac{1}{2}(a'+a)$ est l'arc moyen qui répond au milieu de chaque couleur. Cet arc, ainsi que a et a', est proportionnel à l'épaisseur des plaques. Conséquemment, si l'on représente par ρ sa valeur dans une plaque épaisse d'un millimètre, ρe représentera sa valeur dans toute autre plaque dont l'épaisseur

en millimètres sera e. Maintenant, si e est très-petit, le produit ρe deviendra très-petit du même ordre : alors on pourra à *sin.* ρe substituer le rapport $\frac{\rho e}{R}$, R étant le rayon réduit en degrés ; et conséquemment, la proportion de la teinte i, qui entrera dans l'image extraordinaire, sera exprimée par

$$\frac{i \rho^2 e^2}{R^2}.$$

i et ρ varieront d'une couleur à une autre ; mais, dans la même plaque, le facteur $\frac{e^2}{R^2}$ sera commun à toutes les couleurs. On pourra donc, en laissant subsister ce facteur, calculer toutes les proportions des couleurs diverses par la formule $i\rho^2$, et même en déduire les nombres absolus des rayons simples qu'il en faudra prendre, en divisant les produits $i\rho^2$ par les nombres 9, 16, 10, etc., conformément à la règle de Newton.

A la vérité, tous ces résultats auront encore pour facteur commun $\frac{e^2}{R^2}$; mais, dans les formules qui servent à calculer U, Δ, et $1-\Delta$, U', Δ', et $1-\Delta'$, les nombres absolus des rayons entrent au numérateur et au dénominateur ; de sorte que, s'ils ont un facteur commun, on peut le faire disparaître. Ici donc on pourra de même faire disparaître le facteur $\frac{e^2}{R^2}$, sans avoir besoin de le calculer ; et, puisqu'il est l'unique chose qui marque l'épaisseur de la plaque, il en résulte que cette épaisseur, supposée infiniment petite, n'entrera pas dans les élémens de la teinte ordinaire et extraordinaire ; de sorte que ces teintes seront les mêmes avec toutes les plaques

dont l'épaisseur sera assez petite pour légitimer cette approximation.

Maintenant, d'après les rotations déterminées plus haut pour les limites des différentes couleurs du spectre, dans l'épaisseur d'un millimètre, je trouve que les milieux de ces couleurs répondent aux arcs suivans.

Arcs de rotation moyens des diverses couleurs prismatiques, à travers une épaisseur de cristal de roche égale à 1 millimètre.

Rouge.....	18°, 9881
Orangé....	21, 3968
Jaune.....	23, 9945
Vert.......	27, 8606
Bleu......	32, 3088
Indigo.....	36, 1273
Violet.....	40, 8828

En partant de ces valeurs, et désignant par *r, o, j, v, b, i, u*, les nombres absolus de rayons de chaque espèce, depuis le rouge jusqu'au violet, on trouve :

$$r=\frac{e^2}{R^2}\cdot 44391{,}6,$$

$$o=\frac{e^2}{R^2}\cdot 28613{,}9,$$

$$j=\frac{e^2}{R^2}\cdot 57573{,}6,$$

$$v=\frac{e^2}{R^2}\cdot 86245{,}9,$$

$$b=\frac{e^2}{R^2}\cdot 104384{,}6,$$

$$i = \frac{e^2}{R^2} \cdot 81573{,}9,$$

$$u = \frac{e^2}{R^2} \cdot 185712{,}0,$$

Somme. . . . . . $N = \frac{e^2}{R^2} 588495{,}5,$

Complément. . $N' = 658{,}\tfrac{1}{3} - \frac{e^2}{R^2} \cdot 588495{,}5.$

Il ne reste plus qu'à substituer ces résultats dans les formules de mon Traité de physique, tom. III, pag. 451 ; et l'on en tire les élémens suivans :

Image extraordinaire.

$U = 286°.31'.0$, $\Delta = 0{,}278735$, $1 - \Delta = 0{,}721265$.

Ce qui indique une teinte indigo, semblable, pour l'œil, à celle que l'on formerait en mêlant 28 parties d'indigo pur et 72 de blanc. Ce sera donc encore un indigo assez bon, quant à sa nature; mais son intensité sera d'une faiblesse extrême, à cause du facteur $\frac{e^2}{R^2}$, qui multiplie le nombre de rayons dont il est composé. Par exemple, si $e = 0^{mm},400$, on aura $N = 28{,}6826$ et $N' = 629{,}6507$, au lieu de $27{,}9559$, et $630{,}3774$, que nous a donné le calcul rigoureux; ce qui montre qu'à cette épaisseur, l'approximation relative aux petits arcs peut être déja employée sans erreur sensible. Aussi les valeurs de U et de U', trouvées pour la plaque $0^{mm},400$, coïncident-elles presque exactement avec les dernières limites que nous venons d'obtenir.

Voilà donc comment les teintes naissent. Pour savoir comment elles finissent, quand les épaisseurs sont suffi-

samment grandes, il faut reprendre la formule générale:

$$\frac{i}{2}\left(1-\frac{\mathrm{R}\,sin.(a'-a)}{a'-a}\cdot cos.(a'+a)\right),$$

laquelle exprime la proportion de chaque couleur qui entre dans la composition de l'image extraordinaire. Alors on voit que, si l'épaisseur est considérable, l'arc $a'-a$, qui croît indéfiniment, deviendra aussi très-considérable, comparativement à son sinus. Et, quand cet accroissement sera tel, que la fraction $\frac{\mathrm{R}\,sin.(a'-a)}{a'-a}$, soit devenue assez petite pour pouvoir être négligée, le terme dépendant des limites a, a' disparaîtra de l'expression précédente, qui se réduira à $\frac{1}{2}i$; c'est-à-dire que la moitié sensiblement de la teinte i entrera dans l'image extraordinaire, et par conséquent l'autre moitié entrera dans l'image ordinaire. Lorsque ce partage égal aura lieu pour toutes les couleurs prismatiques, les deux images deviendront blanches et égales en intensité. Il est vrai, qu'à la rigueur, cette égalité parfaite ne pourrait avoir lieu que pour une épaisseur infinie; mais, bien avant ce terme, l'égalité des images et leur blancheur sera sensible pour l'œil; de même que, dans les anneaux réfléchis par les lames minces des corps, il n'y a déja plus de coloration appréciable après le septième ordre, qui répond encore à des épaisseurs excessivement petites; quoiqu'à la rigueur le blanc définitif, composé par la superposition des anneaux divers de toutes les couleurs, n'ait lieu mathématiquement qu'à des épaisseurs infinies.

On voit, par cette discussion, que la loi de rotation réciproque aux quarrés des longueurs des accès, satisfait à la manière dont les teintes des deux images naissent à des épaisseurs très-petites, et se terminent à des épaisseurs très-

grandes; qu'entre ces limites elle reproduit avec fidélité les couleurs observées, et qu'ainsi, si elle n'est pas la loi de la nature, elle en approche du moins assez pour pouvoir lui être substituée dans toutes les observations. Les nombreuses comparaisons que nous avons faites, fournissent aussi une confirmation décisive de la division des images, proportionnellement aux quarrés du sinus, et du cosinus, de l'angle que l'axe de polarisation de chaque rayon forme avec la section principale du prisme cristallisé qui le réfracte : car le partage des rayons étant un des élémens essentiels de la formation des teintes, elles n'auraient pas pu se trouver aussi exactement conformes à l'expérience, si le mode de partage employé dans le calcul eût été inexact. Enfin on voit de quelle précision admirable est cette construction, que Newton a donnée, pour déterminer la couleur composée produite par la combinaison d'un nombre donné de rayons simples, puisqu'elle suit et représente aussi fidèlement la nature, dans des recherches si éloignées de celles pour lesquelles son auteur l'avait formée. C'est qu'il l'avait établie, comme il le dit, sur des expériences réellement faites avec des proportions connues de rayons simples, et non pas d'après des vues systématiques, comme presque tous les auteurs qui ont écrit sur l'optique se sont avisés de le supposer, contre ses plus formelles assertions. J'ai réuni dans la fig. 14 les diverses valeurs de U obtenues pour nos treize plaques, et j'ai marqué la valeur de Δ sur la direction du rayon du cercle qui convient à chacune d'elles. Si, par les extrémités de ces Δ, on fait passer une courbe sinueuse, on aura l'indication empirique de toutes les couleurs qui se peuvent observer à des épaisseurs diverses, dans la position du prisme cristallisé que nous avons adoptée.

Mais, quoique cette figure nous doive être, par la suite, d'un usage commode, parce qu'elle s'appliquera à toutes les substances qui font tourner la lumière, la limitation à laquelle elle est sujette à cause de la position particulière du prisme qu'elle suppose, m'engage à exposer ici une construction géométrique beaucoup plus générale, qui rassemble tous les phénomènes de ce genre, et permet d'en suivre d'un coup d'œil toute la succession. Cette construction est analogue à celle que Newton a donnée pour les couleurs des anneaux réfléchis, mais elle en diffère par plusieurs points qui tiennent à la différence des deux phénomènes.

Pour en concevoir le principe, imaginons d'abord que nous n'avons à nous occuper que d'un seul faisceau simple, polarisé en un sens unique; supposons qu'un prisme cristallisé réfracte ce rayon en deux images, l'une ordinaire, l'autre extraordinaire, et qu'on demande d'indiquer géométriquement le progrès d'intensité d'une de ces deux images, de l'extraordinaire, par exemple, à mesure que l'on tourne le prisme cristallisé : dans ce cas, nous n'avons qu'à diviser une ligne droite AB, fig. 15, en portions égales, dont chacune nous représentera l'épaisseur du cristal qui imprime au rayon une rotation de 180°; ce qui dépendra, comme nous l'avons vu, de sa réfrangibilité propre. Divisons chacune de ces épaisseurs, ou plutôt la ligne qui la représente, en 180 parties qui répondront chacune à un seul degré de rotation. Alors, si l'on demande de combien de degrés le rayon a tourné à travers une épaisseur donnée; il n'y aura qu'à prendre sur AB, à partir du point A, une longueur AE égale à cette épaisseur, exprimée en parties de l'échelle de grandeur que l'on a adoptée; et la division à laquelle le point E répondra, sur la ligne AB, indiquera le

nombre de degrés de rotation que le rayon aura décrits. Par exemple, ce serait 30, dans la position de E que représente la fig. 15. Maintenant, si le prisme qui sert pour analyser la lumière transmise, a sa section principale dirigée dans le sens de la polarisation primitive, la partie de ce rayon qui subira la réfraction ordinaire sera proportionnelle au quarré du sinus de l'épaisseur AE, exprimée ainsi en degrés; c'est-à-dire, dans notre exemple, au quarré du sinus de 30°, ou au quart de son intensité totale. En général, les points marqués 90° répondront à des épaisseurs auxquelles le rayon se réfractera tout entier extraordinairement; et ceux qui sont marqués 180° répondront aux épaisseurs auxquelles aucune portion du rayon ne subira la réfraction extraordinaire.

Supposons maintenant que le prisme cristallisé ait sa section principale fixée dans une direction différente de la polarisation primitive; par exemple, que cette section en soit écartée de n degrés, en sens contraire de la rotation : dans ce cas, lorsque l'épaisseur sera nulle, le rayon sera dans le même cas que s'il avait déja tourné de n degrés; et, pour toute épaisseur e, il sera dans le même cas, relativement au prisme cristallisé, que s'il avait tourné de n degrés plus l'arc de rotation qui convient à cette épaisseur, et qu'on pourra exprimer par ρe, ρ étant l'arc de rotation pour un millimètre. Dans ce cas, la portion du rayon qui subira la réfraction extraordinaire, sera proportionnelle au quarré du sinus de l'arc $n+\rho e$; la construction précédente, relative à $n=0$, pourra donc nous servir encore dans cette circonstance; seulement il faudra écrire n au lieu de zéro à l'origine de la ligne AB : par exemple, si $n=30°$, on aura le cas représenté fig. 16. Du reste, ici comme dans le cas précédent, les points mar-

qués 90° indiqueront des épaisseurs auxquelles le rayon se réfractera tout entier extraordinairement dans la position adoptée pour le prisme cristallisé; et les points marqués 180°, indiqueront les épaisseurs pour lesquelles aucune portion du rayon ne subira la réfraction extraordinaire.

Essayons maintenant d'étendre ce mode de construction à un système de rayons simples, composant originairement un rayon blanc, polarisé en un seul sens, et commençons par le cas le plus simple, qui est celui où la section principale du prisme cristallisé est fixée dans la direction même de la polarisation primitive. Alors les diverses épaisseurs qui donnent des rotations de 180° aux différens rayons simples, sont directement proportionnelles aux quarrés des longueurs de leurs accès, puisque les vîtesses de rotations mêmes suivent le rapport inverse. Pour lier toutes ces épaisseurs sur une même échelle, prenons sur une droite CZ, à partir d'un même point C, les droites CU, CI, CB, CV, CJ, CO, CR et CZ, proportionnelles aux nombres 2381; 2785; 3037; 3494; 4089; 4705; 5126 et 6000, lesquels sont eux-mêmes comme les quarrés des accès, pour les limites des sept divisions du spectre. Puis, sur chacun des points U, I, B, V, J, O, R, Z, ainsi déterminés, élevons des droites indéfinies, UU', II', BB', VV', JJ', OO', RR', ZZ', et divisons l'une d'entre elles, ZZ', par exemple, en parties égales qui représenteront les épaisseurs correspondantes à un degré de rotation du rouge extrême. Cela posé, si, par chacune de ces divisions on mène des lignes droites dirigées au centre C, ces droites couperont aussi UU', II'...OO', RR', ZZ', chacune en parties égales, proportionnelles aux abscisses CU, CI, CO.... CR, CZ, et par conséquent proportionnelles aux quarrés des longueurs

d'accès qui conviennent aux limites des sept divisions du spectre. Ainsi, la première espèce de divisions faite sur ZZ', exprimant les différences d'épaisseurs qui répondent à un degré de rotation pour le rouge extrême, les autres exprimeront, sur chaque ligne, les épaisseurs qui font tourner d'un degré les espèces de rayons simples correspondantes à ces lignes-là; et il en sera de même pour toutes les lignes intermédiaires que l'on pourrait mener entre les divisions principales, lesquelles répondront à des couleurs intermédiaires aussi. De sorte que les divers quadrilatères obliquangles, formés par les lignes centrales et les limites de chaque couleur simple, correspondront aux différens degrés de cette couleur-là. Maintenant si l'on veut savoir, par exemple, quelles seront les rotations des diverses parties d'un faisceau blanc, après qu'il aura traversé une épaisseur donnée, il n'y aura qu'à placer une règle sur la ligne CZ, qui répond à une épaisseur nulle; puis, faisant mouvoir cette règle parallèlement à elle-même et à CZ, on la fera passer successivement par les points correspondans aux épaisseurs successives, et les divisions qui se trouveront sur sa direction, indiqueront les degrés de rotation éprouvés par chaque rayon simple, à travers les épaisseurs correspondantes; d'où l'on pourra inférer ensuite la couleur résultante, en prenant les élémens proportionnels aux quarrés des sinus des arcs que les divisions indiquent.

Par exemple, si l'épaisseur donnée est $3^{mm},397$, ce qui donne une rotation de $87^{\circ}.13'$ pour la limite du vert et du jaune, on n'aura qu'à mener la ligne MM correspondante à cette épaisseur, et l'on verra qu'elle coupe toutes les droites perpendiculaires à CZ, dans des divisions dont les cosinus

ont tous des valeurs assez considérables. Il y aura donc des proportions notables de toutes les couleurs simples réfractées extraordinairement à cette épaisseur. Et en effet, le calcul de la page 69 fait voir que, sur 658 rayons, l'image extraordinaire en contient 536, dont l'ensemble forme, pour l'œil, une teinte sensiblement blanche, quoique non pas parfaitement blanche, parce qu'il y manque un certain nombre de rayons dont l'ensemble fait un rouge violacé : aussi est-ce dans le violet et dans le rouge, que la ligne MM s'éloigne le plus de 90°. On verra de même, qu'à l'épaisseur $9^{mm},102$, qui donne 273°28′ pour la rotation de la limite du bleu et du vert, l'image extraordinaire doit avoir une teinte verte très-prononcée : car, en menant la ligne NN correspondante à cette épaisseur, on voit qu'elle passe presque au milieu du vert, sur les deux tiers du bleu et du jaune, et seulement sur les confins des autres couleurs; mais ici, comme dans la construction que Newton a donnée pour les anneaux, on ne peut, par ce procédé, que prévoir par aperçu la couleur résultante; et, pour en déterminer sûrement la nature, il faut recourir à la composition rigoureuse fondée sur le calcul, d'après la règle de Newton, comme nous l'avons fait précédemment.

Enfin la même construction peut aussi servir pour le cas où la section principale du prisme cristallisé formera un angle de n degrés avec la polarisation primitive, ces degrés étant comptés en sens contraire de la rotation des rayons : car alors, la rotation correspondante à une épaisseur quelconque étant exprimée par $n + \rho e$, pour chaque rayon simple, il n'y a qu'à écrire n au lieu de zéro sur la ligne CZ, au bas de la ligne qui correspond à chaque rayon simple; puis, achevant

la construction comme tout-à-l'heure, les divisions déterminées par les lignes centrales donneront, pour chaque épaisseur, e, la valeur de la rotation ρe correspondante. Ainsi, en faisant mouvoir une règle parallélement à CZ, les divisions sur lesquelles passera cette ligne dans chacune de ses positions, donneront les rotations décrites par chaque rayon à ces épaisseurs-là; d'où l'on pourra prévoir la couleur qui devra résulter de leur ensemble, selon les valeurs des sinus des angles auxquels ces divisions répondent. Mais, pour avoir une détermination plus précise, il faudra recourir au calcul exact. Je ne donnerai point d'exemple de ce cas, qui n'a aucune difficulté après celui qui précède; mais on peut l'appliquer à la recherche des teintes que devaient présenter nos treize plaques, selon les diverses positions du prisme cristallisé qui servait à les observer, et l'on trouvera les indications de la construction géométrique parfaitement conformes aux indications que j'ai autrefois données et publiées sur ces teintes, d'après l'expérience, dans mon Traité de physique et dans les Mémoires de l'Institut.

§ II.

Extension de la même loi de rotation à toutes les substances.

La loi de rotation étant connue et vérifiée pour le cristal de roche, il faut chercher à la déterminer également dans d'autres substances. Je commence par l'essence de térébenthine.

D'abord, conformément à la marche que nous avons adoptée, il faut commencer par chercher l'arc de rotation d'une

espèce particulière de rayons simples, à travers des épaisseurs diverses. Nous choisirons pour type celle que transmet le même verre rouge dont nous avons déja fait usage pour le cristal de roche. Voici les arcs de rotation observés avec ce verre, dans deux séries d'expériences dont la première a été faite avec divers échantillons d'essence de térébenthine telle qu'on la trouve dans le commerce, et la seconde avec une même qualité de cette essence, purifiée par plusieurs distillations. Dans celle-ci, chaque résultat est conclu d'une moyenne entre dix essais consécutifs.

ÉPAISSEURS.	ARCS DE ROTATION observés.	ROTATION pour UN CENTIMÈTRE, conclue.	ARCS DE ROTATION calculés d'après la moyenne.	EXCÈS DU CALCUL.
151mm,5	40°.0	2°.6403	40°.99	+0°.99
163, 5	45.	2. 7523	44. 23	—0. 77
315, 0	82. 5	2. 6190	85. 22	+2. 72
338, 5	87.	2. 5701	91. 58	+4. 58
338, 5	94.	2. 9249	91. 58	—2. 42
1730, 0	472.	2. 7283	468. 09	—3. 91
Moyenne............		2. 7057		
152mm,00	42°. 10	2°. 7697	43°.514	+1°.414
164, 25	46. 67	2. 8406	47.021	+0. 354
305, 50	87. 10	2. 8511	87.458	+0. 358
509, 5	146. 61	2. 8775	145. 859	—0. 751
Moyenne............		2. 8628		

(La moyenne de cette série est calculée pour donner le minimum du quarré des erreurs.)

La température moyenne de l'essence, dans la première série, peut être évaluée à 20° centésimaux ; dans la seconde, à +3°. Du reste, cet élément n'a d'influence sur les rotations qu'à cause des dilatations qu'il cause, et par conséquent du plus ou moins grand nombre de particules qu'il fait entrer dans une longueur donnée; de sorte que l'effet a dû en être insensible dans les expériences partielles qui ont été faites à la température ordinaire. Les petites différences que l'on remarque dans les résultats ne sont donc pas dues à cette cause, mais, en grande partie, à la difficulté de fixer bien exactement la nouvelle direction de polarisation imprimée au faisceau coloré, et aussi à la petite quantité d'eau et de résine qui reste ordinairement dans l'essence de térébenthine du commerce, telle que celle dont j'ai fait usage dans la première série : car l'eau n'exerçant par elle-même aucune force rotatoire sensible, du moins dans les épaisseurs auxquelles je l'ai éprouvée, sa présence dans l'essence ne fait que diminuer le nombre des particules agissantes dans une longueur donnée ; ce qui affaiblit, par conséquent, l'action du système.

Quoi qu'il en soit, on voit, par ce tableau, que, pour l'essence de térébenthine, comme pour le cristal de roche, l'arc de rotation est proportionnel à l'épaisseur que le rayon traverse. Mais la vîtesse absolue de la rotation, comparée à celle du cristal de roche, est beaucoup plus faible, et seulement dans le rapport de 0,27057 à 18,414, ou de 1 à 68,55, pour l'essence la plus commune, les épaisseurs traversées étant les mêmes : ainsi, comme le cristal de roche a une densité presque exactement triple de celle de l'essence, le rapport des rotations, pour des masses égales, serait de 1 à 22,85; d'où il suit que, si cette propriété appartient aux

molécules mêmes des substances, comme toutes les analogies l'indiquent, elle existe avec une énergie environ vingt-trois fois plus grande dans les molécules du cristal de roche que dans celles de l'essence de térébenthine.

Maintenant, si l'on considère la série des teintes successives que présentent les images ordinaires et les images extraordinaires formées par la lumière blanche, transmise, soit à travers des épaisseurs diverses, la position du prisme cristallisé restant constante, soit à travers une épaisseur constante en tournant le prisme cristallisé, on reconnaît qu'ici comme dans le cristal de roche, les axes de polarisation de tous les rayons simples tournent avec des vîtesses inégales, croissantes avec la réfrangibilité, mais qui sont toujours dirigées dans un même sens, de la droite vers la gauche de l'observateur.

Pour trouver le rapport de ces vîtesses, relativement aux différens rayons simples, on pourrait employer la méthode d'observation dont nous avons fait usage pour le cristal de roche. Mais, sans répéter cette épreuve, on peut s'assurer que la même relation des vîtesses est commune à ces deux substances. En effet, on pourrait considérer d'abord que la rotation dans le cristal de roche s'étant trouvée réciproque aux carrés des longueurs des accès des divers rayons simples, cette loi se présente comme une propriété des rayons mêmes, et non comme un résultat dépendant de la nature des corps qui agissent sur eux. On doit donc s'attendre, d'après cette remarque, que la même loi subsistera dans toutes les substances, comme on y voit se maintenir les rapports des accès mêmes dont la seule longueur absolue varie. Mais on peut confirmer cette induction par deux épreuves décisives,

dont la première est qu'une épaisseur donnée d'essence de térébenthine produit exactement les mêmes teintes, soit ordinaires, soit extraordinaires, que produirait une plaque de cristal de roche perpendiculaire à l'axe, et 69 fois moins épaisse, en conservant pour l'une et l'autre la même position au prisme cristallisé; ce qui n'aurait pas lieu si la rotation des rayons simples de couleurs diverses se faisait suivant des rapports différens dans les deux substances; et la seconde preuve est que chaque longueur donnée de térébenthine peut être compensée par une plaque de cristal de roche 69 fois moins épaisse, et à rotation opposée, de manière que tous les rayons simples qui composent le rayon blanc, transmis à travers le système, se trouvent ramenés à-la-fois à leur direction primitive et commune de polarisation. Pour établir ces deux importantes propriétés, je rapporterai ici quelques expériences.

J'ai pris un tube de cuivre étamé terminé par deux glaces, et dont la longueur extérieure était 151^{mm},5. J'y ai versé une quantité d'essence de térébenthine du commerce, qui l'a rempli dans une longueur de 143^{mm},5, et j'ai achevé de le remplir avec de l'huile d'olive devenue parfaitement incolore par une longue exposition à l'air. L'essence de térébenthine se mêle, comme on sait, très-bien avec les huiles grasses : en effet, après quelques instans d'agitation, le mélange est devenu aussi transparent que si la térébenthine eût été seule. Alors, en le fixant sur mon appareil, je l'ai fait traverser par un rayon blanc polarisé, précisément comme je l'ai expliqué plus haut pour les plaques de cristal de roche; et, en tournant successivement le prisme cristallisé dans différens angles autour du rayon transmis, j'ai observé ainsi les résultats suivans :

AZIMUTH DE LA SECTION PRINCIPALE DU PRISME.	TEINTE DE L'IMAGE ORDINAIRE. O.	TEINTE DE L'IMAGE EXTRAORDINAIRE. E.
0	Jaune-orangé.	Blanc-bleuâtre ou bleu-blanchâtre.
10.	Jaune.	Bleu-blanchâtre plus foncé.
20.	Jaune-pâle.	Bleu plus foncé.
30.	Jaune très-pâle.	Bleu très-beau.
40.	Blanc-jaunâtre.	Bleu sombre et très-beau.
50.	Blanc à peine jaunâtre.	Indigo-violacé ; minimum.
55.	Blanc presque parfait.	Violacé-rougeâtre.
60.	Blanc presque parfait.	Rouge-violacé sombre.
65.	Blanc sensiblement.	Orangé-rougeâtre.
70.	Blanc-bleuâtre.	Jaun-eorangé.
75.	Blanc-bleuâtre.	Jaune-foncé.
80.	Blanc-bleuâtre.	Jaune.
90.	blanc-bleuâtre ou bleu-blanchâtre.	Jaune-orangé.

Maintenant, si l'on ouvre les Mémoires de l'Institut pour 1812, pag. 226, ou mon Traité de physique, t. IV, p. 506, on verra que cette succession de teintes est identiquement la même que celle d'une plaque de cristal de roche d'une épaisseur égale à $2^{mm},094$, dont j'ai rapporté alors les observations. Cela devait être : car, $143^{mm},5$, longueur de la colonne de térébenthine introduite dans le tube, étant divisés par 68,55, donnent pour quotient $2^{mm},094$. En observant cette colonne avec le verre rouge, j'ai trouvé que le faisceau transmis étant polarisé tout entier dans l'angle —38° vers la gauche, ou ↖, selon le mode d'indication que j'ai adopté.

Cela est encore une conséquence de l'identité de la loi des rotations : car si l'on multiplie 18°,414, arc de rotation de notre rouge dans un millimètre de cristal de roche, par l'épaisseur réduite 2^{mm},094, on trouve, pour produit, 38°,559, au lieu de 38. La différence est de l'ordre des erreurs inévitables que comportent ces observations.

Voici une autre expérience du même genre. J'ai pris un tube pareil au précédent, mais dont la longueur intérieure était 338^{mm},5; je l'ai rempli de la même térébenthine, et en le portant sur mon appareil de polarisation, il m'a donné les résultats suivans :

SENS DE LA ROTATION DU PRISME.	DIRECTION DE LA SECTION PRINCIPALE DU PRISME.	TEINTE DE L'IMAGE ORDINAIRE. O.		TEINTE DE L'IMAGE EXTRAORDINAIRE. E.
De droite à gauche. ↖	0.	Bleu-céleste très-beau.		Jaune-brillant un peu orangé.
	10.	Bleu plus sombre.		Jaune plus clair.
	20.	Indigo-sombre.		Jaune-serin un peu verdâtre.
	30.	Indigo-violacé.		Jaune-verdâtre ou vert-jaunâtre.
	40.	Rouge (la teinte du geranium sanguineum).		Vert.
	50.	Rouge de sang.		Vert assez beau.
	60.	Rouge-orangé.		Vert-bleuâtre.
	70.	Orangé-rougeâtre.		Bleu-verdâtre.
	80.	Orangé.		Bleu.
	90.	Jaune-brillant.		Bleu superbe.

Après ces observations, j'ai placé le verre rouge derrière le tube, et j'ai trouvé que la lumière de cette espèce, qui se transmettait à travers la colonne liquide, était polarisée dans une direction qui formait, avec celle de la polarisation primitive, un angle de 94° vers ma gauche. Tel était donc l'arc de rotation pour cette espèce de lumière; et, en consultant le tableau de la pag. 92, on voit qu'elle convient en effet à l'épaisseur et à l'espèce de l'essence de térébenthine employée.

Maintenant, puisque l'action de cette essence sur cette espèce particulière de rayon, a été trouvée, par une moyenne, plus faible que celle du cristal de roche, dans le rapport de 1 à 68,55 ; il n'y a qu'à diviser par 68,55 la longueur de la colonne employée; et le quotient, qui sera $\frac{338,5}{68,55}$, ou $4^{mm},938$, exprimera l'épaisseur de cristal de roche qui produirait, sur la lumière du verre rouge, la même rotation que $338^{mm},5$ de notre térébenthine. Par conséquent, si la loi de la rotation est la même dans les deux substances, la plaque de cristal de roche dont l'épaisseur sera $4^{mm},938$, devra produire absolument les mêmes teintes et dans les mêmes azimuths que nous venons de trouver. Je n'ai point observé autrefois de plaque qui eût exactement cette épaisseur; mais, parmi celles dont j'ai décrit les effets, il en est une qui en approche beaucoup, son épaisseur étant $5^{mm},014$. (*Mémoires*, pag. 241.) La différence $0^{mm},076$ ne serait pas insensible, mais pourtant n'aurait que très-peu d'influence pour changer les teintes, sur-tout à cette épaisseur : aussi les couleurs observées alors sont-elles énoncées presque absolument dans les mêmes termes que celles-ci.

Pour compléter la démonstration de cette identité, j'ai

placé derrière le tube de térébenthine une plaque de cristal de roche, qui faisait tourner les axes de polarisation de gauche à droite, ↗, par conséquent en sens contraire du liquide. L'épaisseur de cette plaque était $3^{mm},901$. Puis donc que notre longueur de térébenthine équivaut à $4^{mm},938$ de cristal de roche, il s'ensuit que le système de ces deux longueurs équivaut à une épaisseur de cristal de roche égale à $4^{mm},938 - 3^{mm}901$, ou $1^{m},037$, agissant dans le sens de la térébenthine c'est-à-dire ↖. Or, en analysant la lumière transmise, elle a donné les teintes suivantes :

SENS DE LA ROTATION DU PRISME.	DIRECTION DE SA SECTION PRINCIPALE.	TEINTE DE L'IMAGE ORDINAIRE. O.	TEINTE DE L'IMAGE EXTRAORDINAIRE. E.
De droite à gauche. ↖	0.	Blanc sensiblement.	Bleu-blanchâtre.
	10.	Blanc sensiblement.	Bleu.
	20.	Blanc.	Bleu plus sombre.
	25.	Blanc.	Violet-rougeâtre-sombre; minimum.
	30.	Blanc.	Rouge-orangé-sombre.
	40.	Blanc sensiblement.	Orangé-sombre.
	50.	Blanc sensiblement.	Jaune.
	60.	Blanc à peine bleuâtre.	Jaune-pâle.
	70.	Blanc un peu bleuâtre.	Jaune-pâle.
	80.	Blanc-bleuâtre.	Jaune très-pâle.
	90.	Bleu-blanchâtre.	Blanc sensiblement.

Si l'on veut jeter les yeux sur les Mémoires de l'Institut pour

1812, pag. 239, on verra que cette série de teintes est en effet exactement pareille à celle qu'a présentée une plaque de cristal de roche d'une épaisseur égale à $1^{mm},032$; et la variation des teintes de l'image extraordinaire, à mesure que le prisme cristallisé tourne, offre des indices de comparaison extrêmement délicats.

Voici encore une épreuve où la compensation a pu être opérée dans des limites encore plus resserrées. J'ai pris une plaque de cristal de roche d'une épaisseur égale à $7^{mm},510$, laquelle faisait tourner les axes de polarisation de gauche à droite, ou dans le sens ↗. Je lui ai superposé une autre plaque de même nature, mais de $2^{mm},997$ d'épaisseur, et tournant dans le sens contraire, c'est-à-dire ↖. Ces deux plaques ensemble agissaient donc dans le sens de la première ↗, comme si celle-ci eût été diminuée de l'épaisseur de la seconde, c'est-à-dire réduite à $7^{mm},510—2^{mm},997$, ou $4^{mm},513$. Je l'ai disposée bien perpendiculairement au rayon polarisé, ce dont on s'assure en tournant les plaques dans leur plan et voyant si les couleurs restent les mêmes. Cette condition remplie, j'ai observé ces couleurs, le prisme cristallisé ayant sa section principale dirigée dans le sens de la polarisation primitive, et j'ai trouvé

L'image ordinaire...... O, indigo superbe,
L'image extraordinaire E, jaune brillant.

La lumière transmise par le verre rouge se trouvait polarisée dans l'angle de 82°.

Ces dispositions faites, j'ai pris deux tubes terminés par des glaces, qui se trouvaient être $151^{mm},5$ et $163^{mm},5$; ce qui faisait ensemble 315^{mm}. Je les ai remplis tous deux d'essence

de térébenthine du commerce; et, les plaçant l'un à la suite de l'autre dans mon appareil, après le système des deux plaques, la lumière transmise s'est trouvée ramenée presque totalement à sa polarisation primitive : car, en plaçant la section principale du prisme cristallisé dans cette direction, on avait

L'image ordinaire..... O, blanc-jaunâtre, tel que le transmet une grande longueur de térébenthine;

L'image extraordinaire E, bleu si excessivement sombre, qu'il est à peine visible.

Cette faible teinte E disparaissait complètement à travers le verre rouge; mais, à l'œil nud, on voyait qu'elle tenait à un excès de rotation dans le sens de la térébenthine, c'est-à-dire ↖, car elle diminuait de plus en plus quand on tournait le prisme cristallisé dans ce sens; et elle s'évanouissait tout-à-fait quand il avait tourné ainsi de 2 ou 3 degrés. Or tout cela est rigoureusement conforme avec une loi commune de rotation pour le cristal de roche et la térébenthine : car l'épaisseur de térébenthine 315^{mm}, étant divisée par 68,55, se trouve équivalente à $4^{mm},595$ de cristal de roche tournant dans le sens ↖; et puisque le système des plaques opposées était de $4^{mm},513$ tournant dans le sens ↗, on voit qu'il restait, dans le sens de la térébenthine, un excès de force qui, exprimé en épaisseur de cristal de roche, était $4^{mm}595 - 4^{mm},513$, ou 0,082; ce qui, d'après les rotations des couleurs simples dans le cristal, produit une rotation de 1°,51 sur le rouge extrême, et de 3°,6 sur l'extrême violet. D'où l'on voit qu'il est juste qu'il soit resté une faible image extraordinaire; que cette image soit d'un bleu sombre, et qu'elle ait disparu quand on a tourné le prisme cristallisé de 2 ou 3° dans le sens de la rotation qui la produisait.

Enfin je rapporterai une dernière épreuve du même genre relative à de plus grandes épaisseurs. J'ai compensé partiellement une longueur d'essence de térébenthine égale à 1730 millimètres, avec une plaque de cristal de roche perpendiculaire à l'axe, et de 21^{mm} de longueur, dont la rotation lui était opposée. Il est resté un excès de rotation dans le sens de la térébenthine; et, en plaçant la section principale du prisme cristallisé dans la direction de la polarisation primitive, l'image ordinaire s'est trouvée d'un bleu-verdâtre sombre, et l'image extraordinaire d'un beau jaune. Cela devait en effet arriver, d'après les rapports de rotation des deux substances : car l'épaisseur 1730^{mm} de térébenthine équivaut, en cristal de roche, à $\frac{1730}{68,55}$, ou $25^{mm},237$, de laquelle, retranchant 21 millimètres, épaisseur de la plaque opposée, il reste pour différence, en faveur de la térébenthine, $4^{mm},237$. Or, si l'on consulte les Mémoires de l'Institut, pour 1812, pag, 267, on y trouvera des observations faites avec une plaque d'une épaisseur presque pareille, car elle était égale à $4^{mm},110$. La différence $0^{mm},127$ aurait sans doute une influence qui pourrait être appréciable dans une observation faite avec exactitude; mais, d'après les valeurs des rotations des différens rayons simples, on voit qu'elle ne peut pas déplacer beaucoup la teinte. Or cette plaque donnait en effet des teintes pareilles à celles qui restaient dans le système de la térébenthine, excepté que l'image ordinaire présentait un indigo sombre, au lieu d'un bleu-verdâtre sombre; soit que la légère différence de ces nuances vienne de la petite différence $0^{mm},127$, soit qu'elle résulte de la faculté absorbante de la térébenthine, laquelle s'exerce beaucoup plus fortement sur les rayons bleus que sur les autres, puisqu'en l'obser-

vant par transmission sur des longueurs même moins considérables que 1730^{mm}, elle verdit sensiblement la lumière blanche des nuées. Ce qui fortifie cette présomption, c'est que l'image extraordinaire jaune, qui ne dépend nullement des rayons bleus, était d'un beau jaune, à travers la térébenthine comme à travers la plaque $4^{mm},110$ que nous lui avons assimilée. Au reste, même sans recourir aux observations de cette plaque, la succession des couleurs données pour le cristal de roche par les lois précédentes elles-mêmes, et représentée fig. 14, montre que l'image extraordinaire doit être un jaune, et un beau jaune, à l'épaisseur $4^{mm},110$, d'où il suit nécessairement que l'image ordinaire, comme en étant complémentaire, doit être un bleu ou un indigo très-beau, s'il n'y a pas de rayons absorbés.

Il me semble qu'un pareil accord, se soutenant si exactement à des épaisseurs si diverses, suffit pour prouver que la loi des rotations des divers rayons simples, est la même dans la térébenthine qu'elle était dans le cristal de roche, sauf la différence absolue des intensités des vîtesses. Car si ces lois étaient différentes, l'opposition des rotations troublerait nécessairement l'arrangement des axes de polarisation des faisceaux partiels; et ainsi, en se réfractant ensuite dans le prisme cristallisé, ils ne pourraient plus y donner les teintes qui conviennent seulement au système de rotation primitif.

Extension de la même loi de rotation au sucre de cannes.

Des épreuves absolument pareilles m'ont prouvé que le même système de rotation a lieu aussi dans le sucre : c'est ce que montrent les expériences que je vais rapporter.

J'ai pris un tube de cuivre étamé, terminé par des glaces, et dont la longueur intérieure était $151^{mm},5$: c'était un de ceux que j'avais employés pour la térébenthine. Je l'ai rempli avec une dissolution de sucre très-concentrée, mais toutefois transparente et presque incolore à ce degré d'épaisseur. Je l'ai fait traverser par un rayon blanc, polarisé en un seul sens, et j'ai analysé la lumière transmise suivant les procédés que j'ai expliqués plus haut, c'est-à-dire à l'aide d'un prisme rhomboïdal achromatisé, dont j'ai tourné successivement la section principale dans des directions diverses autour de la direction de la polarisation primitive. Voici les résultats que j'ai obtenus :

SENS DU MOUVEMENT DU PRISME.	AZIMUTH DE SA SECTION PRINCIPALE.	TEINTE DE L'IMAGE ORDINAIRE. O.		TEINTE DE L'IMAGE EXTRAORDINAIRE. E.
De gauche à droite. ↗	0.	Bleu superbe, un peu verdâtre.		Jaune un peu orangé.
	10.	Gris-de-lin, ou bleu-violacé.		Jaune-serin.
	20.	Rouge-violacé.		Jaune un peu verdâtre.
	30.	Rouge du géranium sanguineum.		Vert-jaunâtre.
	40.	Rouge de brique, ou rouge-orangé.		Vert tendre.
	50.	Orangé-rougeâtre, ou rouge-orangé.		Vert un peu bleuâtre.
	60.	Orangé-rougeâtre.		Vert un peu bleuâtre.
	70.	Orangé.		Bleu-céleste un peu verdâtre.
	80.	Orangé jaune et brillant.		Bleu un peu verdâtre.
	90.	Jaune un peu orangé.		Bleu très-beau, un peu verdâtre.

Sans rien changer aux dispositions de l'expérience, j'ai placé derrière le prisme rhomboïdal le même verre rouge qui m'avait servi pour le cristal de roche et la térébenthine; et, regardant à travers, de manière à n'avoir plus à observer que des rayons rouges, j'ai trouvé que le plan de polarisation de ces rayons était transporté par le tube de sirop de sucre, dans l'angle de 84°, vers la droite de l'observateur, ou ↗; d'où il suit que le sucre, dans l'état de dissolution, fait tourner la lumière de gauche à droite, en sens contraire de l'essence de térébenthine.

Or nous avons trouvé qu'un millimètre de cristal de roche perpendiculaire à l'axe, faisait tourner la même lumière rouge de 18°,414. Si donc on divise 84° par ce nombre, le quotient exprimera l'épaisseur de cristal de roche qui produirait, sur les rayons rouges, la même rotation que le tube de sirop de sucre a produite : ce sera $4^{mm},562$. Maintenant, s'il est vrai que l'action rotatoire du cristal de roche et celle du sucre suivent des lois pareilles, pour toutes les espèces de rayons simples, les arcs de rotation de ces rayons devront conserver entre eux le même rapport pour la même épaisseur. Conséquemment, les teintes composées, produites par le tube de sucre dans chaque position du prisme rhomboïdal, devront être les mêmes que donnerait une plaque de cristal de roche dont l'épaisseur serait $4^{mm},562$. Je n'ai point observé de plaque qui eût rigoureusement cette épaisseur. Mais on en trouve une dans mon Mémoire de 1812, p. 266, qui s'en rapproche extrêmement, car son épaisseur était $4^{mm},510$, plus faible seulement de $0^{mm},05$ que l'évaluation précédente. Or le tableau des teintes successives que j'ai rap-

portées alors est tout-à-fait conforme à celui que nous venons de trouver, sauf de très-légères modifications de nuances qu'exige la petite différence des épaisseurs. On peut aussi s'assurer que cette similitude n'est pas due au hasard, mais à la loi même du phénomène, car la figure 14, qui exprime la succession des teintes données par l'expérience et par le calcul à des épaisseurs diverses, montre qu'entre les épaisseurs de 4^{mm} et 5^{mm}, la teinte extraordinaire qui s'observe dans l'azimuth zéro, est toujours un beau jaune, dont le complément est un bleu plus ou moins foncé; ce qui est en effet conforme au résultat que notre tube de sucre a produit.

Pour confirmer ces comparaisons, j'ai successivement placé, avant la dissolution du sucre, diverses plaques de cristal de roche, perpendiculairement à l'axe, et dont les rotations lui étaient opposées. Elles ont donné les résultats suivans :

1re *Plaque :* Épaisseur, $5^{mm},014$. Il reste un excès de rotation dirigé dans le sens de cette plaque, c'est-à-dire ↖. Le prisme cristallisé placé dans l'azimuth zéro, donne O blanc légèrement jaunâtre, E bleu-blanchâtre sombre; en le tournant de droite à gauche ↖, E s'affaiblit, et devient enfin un minimum vers—14°; à travers le verre rouge, E devient nul à —10° dans le même sens.

2e *Plaque :* Épaisseur, $4^{mm},005$; rotation, ↖, comme la précédente. Il reste un excès de rotation dans le sens du sucre, c'est-à-dire ↗. E devient un minimum à l'œil nud vers + 8 ou + 9°, ↗. A travers le verre rouge, il devient nul vers 5° ou 6°, dans le même sens.

3e *Plaque :* Épaisseur, $2^{mm},997$; rotation, ↖. Il reste un

excès de rotation dans le sens du sucre. E devient un minimum à l'œil nud, vers +33° dans le sens ↗ ; et il est nul à travers le verre rouge, vers +26° dans le même sens.

Ces résultats sont parfaitement concordans avec une loi de rotation commune : car, d'abord, pour la première plaque, son épaisseur étant $5^{mm},014$, et celle du tube de sucre équivalant à $4^{mm},562$, il devait rester un excès de rotation proportionnel à $5^{mm},014 - 4^{mm},562$, ou $0,^{mm}452$, dans le sens de la plaque, c'est-à-dire ↖. De plus, cette différence d'épaisseur étant très-petite, l'image E, vue dans l'azimuth zéro du prisme, devait, d'après la manière même dont les couleurs naissent, être un bleu-blanchâtre sombre, comme nous l'avons vu pag. 71, pour la plaque dont l'épaisseur était $0^{mm},400$; et le complément de ce bleu-blanchâtre devait donner pour O un blanc dont la coloration aurait été insensible, si la dissolution du sucre, qui, à 338^{mm} d'épaisseur, jaunissait très-sensiblement la lumière blanche, n'avait pas déja, à l'épaisseur de notre tube, absorbé quelques rayons bleus. En répétant le même calcul pour chacune des deux autres plaques, on trouvera des résultats également conformes à l'observation.

Les angles auxquels E est devenu nul à travers le verre rouge, ne sont pas moins bien d'accord avec la nature opposée des rotations et leurs intensités respectives : car, en ajoutant l'angle de ce minimum avec la rotation propre de chaque plaque, ou l'en retranchant, selon son signe, on retrouve toujours, à très-peu de chose près, la rotation propre au tube de sucre, telle que je l'avais d'abord observée. C'est ce que montre le tableau suivant.

ÉPAISSEUR DES PLAQUES.	LEUR ROTATION PROPRE OBSERVÉE.	AZIMUTH DE E NUL OBSERVÉ.	ROTATION DU TUBE DE SUCRE CONCLUE DE LA DIFFÉRENCE.
5,^{mm}014	— 92.°	— 10.°	+ 82.°
4, 005	— 74.	+ 6.	80.
2, 997	— 56.	+ 26.	82.

La rotation ainsi conclue pour le tube de sucre, sera donc de 82°, au lieu de 84° que j'avais trouvés d'abord; ce qui donne, pour son action exprimée en épaisseur de cristal de roche, 4^{mm},453, au lieu de 4^{mm},562. La petite différence de 2°, entre ce résultat et l'évaluation directe, est de l'ordre de celles que l'on ne peut éviter dans des observations de ce genre; d'autant que la dissolution de sucre, à cause de sa densité, n'étant pas douée d'une limpidité parfaite, me paraît arrêter une petite portion de la lumière qui la traverse, et la ramener à l'état rayonnant. Voilà pourquoi j'ai cru devoir placer les plaques de cristal de roche avant le tube de sucre plutôt qu'après lui, quoique la différence des effets soit assez faible pour être aisément inaperçue.

J'ai ensuite substitué à ces plaques un tube rempli d'essence de térébenthine commune, dont la longueur intérieure était 163^{mm},5; ce qui, d'après les rapports déterminés plus haut, représente une épaisseur de cristal de roche égale à $\frac{163^{mm},5}{68,55}$, ou 2^{mm},384. L'action de l'essence étant opposée à celle du sucre, c'est-à-dire dirigée dans le sens ↖, il devait rester un excès de rotation égal à leur différence, c'est-à-dire 4^{mm},453 — 2^{mm},384, ou 2^{mm},069; lequel excès devait être

dirigé dans le sens de l'action du sucre, par conséquent ↗. C'est aussi ce qui a eu lieu, comme le montre le tableau suivant des teintes observées à travers le système.

SENS DE LA ROTATION.	AZIMUTH DE LA SECTION PRINCIPALE DU PRISME CRISTALLISÉ.	TEINTE DE L'IMAGE ORDINAIRE. O.		TEINTE DE L'IMAGE EXTRAORDINAIRE. E.
De gauche	0.°	Jaune-orangé.		Blanc-bleuâtre.
à droite.	10.	Jaune.		Bleu-pâle.
↗	20.	Jaune-pâle.		Bleu.
	30.	Jaune très-pâle.		Bleu.
	40.	Jaune-pâle presque blanc.		Indigo très-sombre.
	42.	Blanc.		Indigo-violacé presque nul.
	50.	Blanc sensiblement.		Rouge sombre et violacé.
	60.	Blanc sensiblement.		Rouge-orangé.
	70.	Blanc sensiblement.		Orangé-rougeâtre.
	80.	Blanc un peu bleuâtre.		Orangé.
	90.	Blanc-bleuâtre ou bleu-blanchâtre.		Jaune-orangé.

Ces résultats confirment parfaitement l'identité de la loi des rotations dans les deux substances : car la série des teintes ainsi obtenues est presque absolument pareille à celle qu'on trouve dans mon Mémoire de 1812, pag. 226, pour une épaisseur de cristal de roche égale à $2^{mm},094$. Seulement, le minimum de E se trouvait alors dans l'azimuth de 50° au lieu qu'il arrive ici un peu plus tôt, parce que l'épaisseur est un peu plus faible, et peut-être aussi parce qu'une partie des

rayons bleus les plus sombres sont absorbés par la somme des épaisseurs de l'essence et de la dissolution.

Peu de jours après l'expérience que je viens de décrire, j'ai repris la même dissolution de sucre, dans laquelle il s'était déja formé quelques cristaux dont la séparation devait probablement avoir un peu affaibli l'action primitive de la partie demeurée liquide, et j'ai rempli de celle-ci un tube dont la longueur intérieure était $338^{mm},5$. La lumière transmise, étant vue directement, à l'œil nu et sans prisme, paraissait d'un jaune-orangé éclatant; ce qui dénote une absorption de rayons bleus considérable. En l'analysant avec le prisme cristallisé, la section principale placée dans le sens de la polarisation primitive, elle se résolvait en deux images; l'une ordinaire, O, d'un rouge très-orangé; l'autre extraordinaire, d'un vert un peu bleuâtre. En interposant le verre rouge, celle-ci devenait nulle, lorsque le prisme cristallisé avait tourné de 175° dans le sens ↗, qui est celui de la rotation du sucre. Ces résultats sont parfaitement d'accord avec ceux qu'avait donnés le premier tube, dont la longueur était $151^{mm},5$. La rotation qu'il imprimait aux rayons rouges, ayant été de 82°, aurait dû proportionnellement être, pour le long tube, $\frac{82^{\circ}.338,5}{151,5}$, ou 183°, si l'état de la dissolution fût resté le même. Mais nous avons vu qu'elle s'était un peu affaiblie; et en conséquence la rotation a dû s'affaiblir aussi, comme en effet nous l'observons, puisqu'elle est réduite à 175°. En outre, une rotation de 175°, rapportée au cristal de roche, répondrait à une épaisseur de $\frac{175^{mm}}{18,414}$, ou $9^{mm},503$. Or, en consultant le Mémoire de 1812, pag. 236, ou même

simplement la loi des rotations, calculée, et représentée fig. 14, on voit qu'une pareille épaisseur doit donner, dans l'azimuth zéro du prisme, une image extraordinaire verte, ayant pour complément un rouge plus ou moins foncé; ce qui est en effet le résultat observé à travers notre tube de sucre. Seulement, la nuance de vert et de rouge ne peut pas être rigoureusement la même de part et d'autre, puisque la totalité de la lumière transmise à travers le tube de sucre est jaune, au lieu d'être blanche comme elle l'était dans les expériences faites avec le cristal.

L'observation précédente étant faite, j'ai placé devant le tube de sucre une plaque de cristal de roche à rotation contraire, c'est-à-dire ↖, et dont l'épaisseur, mesurée au sphéromètre, était $7^{mm},465$; ce qui donne, pour la lumière rouge, une rotation de 136°. Il est resté un excès de rotation dans le sens du sucre; et l'image E, vue à travers le verre rouge, est devenue nulle lorsque la section principale du prisme cristallisé tournée s'est trouvée de 40° dans le sens ↗, à partir de la direction de la polarisation primitive. En observant sans verre rouge, on avait deux images colorées des teintes suivantes :

SENS DE LA ROTATION.	AZIMUTH DU PRISME.	TEINTE DE L'IMAGE ORDINAIRE. O.		TEINTE DE L'IMAGE EXTRAORDINAIRE. E.
De gauche à droite. ↗	0.°	Jaune-rougeâtre.		Blanc-bleuâtre.
	45.	Blanc sensiblement.		Violet-rougeâtre; minimum.
	60.	Blanc sensiblement.		Rouge-jaunâtre.
	70.	Blanc-bleuâtre.		Jaune-rougeâtre.

Ces résultats confirment encore l'identité des lois de rotation. En effet, notre tube de sucre, équivalant, comme nous l'avons trouvé, à une épaisseur de cristal de roche égale à $9^{mm},503$, si on lui oppose une plaque de ce cristal ayant pour épaisseur $7^{mm},465$, il doit rester un excès de rotation dirigé dans le sens du sucre, et tel que le produirait la différence des épaisseurs, c'est-à-dire $9^{mm},503 - 7^{mm},465$, ou $2^{mm},038$. En effet, les teintes données par le système sont presque exactement les mêmes que celles qui sont consignées dans mon Mémoire de 1812, pag. 226 et 239, pour des plaques dont l'épaisseur était $2^{mm},094$ et $2^{mm},084$. En outre, la rotation du rouge à travers le tube était de $+175°$ ↗, et celle que produit la plaque de cristal de roche étant $-136°$, ↖ : il est clair que, lorsqu'on les superpose, le reste de la rotation doit être $+175° - 136°$, ou $+39°$ ↗, précisément comme l'a donné l'observation.

Pour approcher plus près de la compensation exacte, j'ai ajouté à la plaque $7^{mm},465$ une autre plaque à rotation de même signe, et dont l'épaisseur était $2^{mm},997$; laquelle, par conséquent, faisait tourner la lumière du verre rouge de $-56°$ ↖. La somme de ces deux plaques produisait ainsi une rotation totale de $-136° - 56°$, ou $-192°$ ↖; de sorte qu'en plaçant derrière elles le tube de sucre, il devait rester un excès de rotation dirigé dans leur sens, et égal à $-192° + 175°$, ou $-17°$ ↖. En effet, l'observation réellement faite sur ce système a donné $-17°$. En outre, lorsque la section principale du prisme cristallisé coïncidait avec la direction de la polarisation primitive, on avait, à l'œil nu, une image ordinaire sensiblement blanche, de l'espèce de

blanc-jaunâtre que transmettait directement le tnbe, et une image extraordinaire blanc-bleuâtre, teintes qui conviennent en effet à la différence des épaisseurs $7^{mm},465 + 2,^{mm}997 - 9^{mm},503$, c'est-à-dire $0^{mm},959$.

J'ai obtenu une compensation plus approchée encore en employant deux plaques dont les épaisseurs étaient $5^{mm},014$ et $4^{mm},005$, en somme $9^{mm},019$. Le rouge transmis a été presque entièrement ramené à la polarisation primitive; il n'est resté qu'une image extraordinaire bleue, excessivement faible, qui disparaissait en tournant le prisme de 7° ou 8° dans le sens du sucre, c'est-à-dire ↗ : en effet, la différence d'action était alors réduite à $-9^{mm},503 + 9,019$ ou $0,^{mm}484$.

Il aurait été extrêmement curieux d'observer et de mesurer le pouvoir de rotation dans le sucre solide, après l'avoir étudié ainsi dans le sucre liquide. Malheureusement, le sucre solide et cristallisé, condition nécessaire à sa transparence, a deux axes rectilignes de polarisation très-énergiques, qui, pour peu qu'on s'écarte de leur direction, enlèvent les particules lumineuses à la rotation, pour les soumettre à la polarisation qu'ils exercent, comme j'ai fait voir depuis long-temps que cela arrive dans les plaques de cristal de roche, quand les rayons transmis sont inclinés de quelques degrés sur leur axe. Néanmoins, en regardant avec attention les anneaux colorés formés par la polarisation dans les plaques de sucre, taillées perpendiculairement à un de ces axes, on remarque que la bande noire qui les sépare diamétralement, et qui marque la série des points où la polarisation primitive n'est point troublée, au lieu d'être absolument noire, comme elle l'est dans le mica, par exemple, offre quelques

indices de coloration très-faibles, mais pourtant indubitables, lesquels doivent être l'effet de la rotation, devenue sensible dans les parties où la résultante des forces polarisantes est presque nulle.

Les épreuves que je viens de rapporter me semblent suffisantes pour prouver que la loi de rotation des différens rayons simples, est la même pour le sucre liquide que pour le cristal de roche et l'essence de térébenthine. Je l'ai également retrouvée dans toutes les autres substances que j'ai soumises à des expériences pareilles, et l'on en verra plus bas de nouveaux exemples; de là on peut inférer, avec une grande probabilité, qu'elle est générale : car, autrement, ses différences auraient déja dû se manifester et devenir sensibles, dans des cas aussi dissemblables que ceux que nous venons d'examiner.

§ III.

Sur l'existence de la faculté rotatoire dans les particules mêmes des corps, indépendamment de leur état d'aggrégation.

Après avoir établi les véritables lois de la rotation qu'éprouvent les axes de polarisation des rayons lumineux, en traversant certaines substances, je vais montrer que la faculté en vertu de laquelle cette rotation est produite, réside dans les particules mêmes des corps qui en jouissent, et ne dépend en aucune manière de leur état d'aggrégation accidentel et momentané.

Remarquons d'abord que cette conséquence est déja indiquée avec une vraisemblance extrême par plusieurs particularités saillantes du phénomène. Il ne se montre, dans les corps solides, que suivant les directions où les forces dépen-

dantes de l'état d'aggrégation deviennent nulles ou très-faibles. Il existe encore dans des fluides, c'est-à-dire dans des corps dont les particules sont libres et indépendantes les unes des autres; il y subsiste même sans altération quand on change l'ordre et la juxtaposition de ces particules en les agitant; enfin, dans ce dernier cas comme dans tous les autres, la rotation imprimée aux axes des rayons est proportionnelle à l'épaisseur, par conséquent au nombre des particules. Tout cela semble bien évidemment indiquer un pouvoir appartenant aux particules mêmes; c'est ce que les expériences suivantes vont confirmer.

J'ai d'abord cherché si les teintes produites par une épaisseur donnée d'essence de térébenthine changeraient quand on rendrait les particules plus ou moins distantes. Des différences de température étendues depuis 10° au-dessous de zéro jusqu'à plus de 100° au-dessus, ne m'ont pas paru y apporter de modification appréciable; mais de pareilles dilatations étant encore bien faibles, j'ai étendu l'essence en la mêlant avec des huiles grasses qui, comme on sait, se combinent très-bien avec elle, et qui, en outre, n'exercent sur la lumière aucun pouvoir de rotation (1). Or, quoique j'aie employé ainsi des proportions d'essence très-diverses, telles que 1; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$, les teintes sont encore restées les mêmes pour la même masse de ce fluide, lorsqu'elle a été ainsi répartie sur une plus grande longueur, et les rotations, pour une même longueur du mélange, se sont toujours trouvées

(1) Pour obtenir ces huiles dans un état parfait de limpidité et de blancheur, il faut les laisser long-temps exposées à l'air et à la lumière, qui, à la longue, les décolorent complétement.

proportionnelles au nombre des particules d'essence de térébenthine qu'elle contenait. Pour donner toute la rigueur possible à cette épreuve, j'ai versé des quantités égales d'essence de térébenthine dans deux tubes de même calibre, mais de longueur inégale, l'un ayant $163^{mm},5$, l'autre $338^{mm},5$; j'ai achevé de remplir celui-ci avec de l'éther sulfurique bien rectifié, qui, dans cet état, se mêle parfaitement avec l'essence, et qui n'a aucun pouvoir propre de rotation sensible, au moins dans ces limites d'épaisseur. J'avais ainsi, dans mes deux tubes, un nombre égal de particules d'essence de térébenthine, avec la seule différence que, dans l'un, ces particules étaient à leur distance naturelle, au lieu que, dans l'autre, elles étaient amenées à des distances plus que doubles par l'interposition de l'éther. Ces dispositions faites, j'ai exposé les deux tubes l'un à côté de l'autre à la lumière polarisée, en les fixant sur deux appareils semblables, de manière à pouvoir observer simultanément leurs teintes; mais je n'ai pas pu découvrir entre elles la moindre différence dans aucune position du prisme cristallisé, quoique les variations de nuances produites par le mouvement de ce prisme fussent très-nombreuses et très-délicates dans la longueur particulière que j'avais choisie. Comme cette précaution est ici d'une grande importance, puisque c'est d'elle que dépend toute la sûreté de l'épreuve, j'ai cru devoir rapporter la série même des teintes observées.

SENS DU MOUVEMENT DU PRISME CRISTALLISÉ.	AZIMUTH DE SA SECTION PRINCIPALE.	TEINTE DE L'IMAGE ORDINAIRE. O.		TEINTE DE L'IMAGE EXTRAORDINAIRE. E.
De droite à gauche.	0.	Orangé-foncé.		Blanc légèrement bleuâtre ou verdâtre.
	10.	Orangé moins foncé.		Blanc plus bleuâtre.
	20.	Jaune.		Bleu-blanchâtre.
	30.	Jaune-pâle.		Bleu plus beau.
	40.	Jaune plus pâle		Indigo.
	50.	Blanc-jaunâtre.		Indigo sombre.
	60.	Blanc à peine jaunâtre.		Violacé.
	70.	Blanc un peu verdâtre.		Rouge-sombre, rouge de sang.
	80.	Blanc très-légèrement bleuâtre		Rouge-orangé, ou orangé-rougeâtre.
	90.	Blanc légèrement bleuâtre.		Orangé-foncé.

E nul à travers le verre rouge dans l'azimuth — 45°

On trouve encore une preuve du même genre dans les compensations de rotations que l'on peut produire par le mélange de fluides à rotations opposées. Dès mes premières recherches, j'avais ainsi compensé l'essence de térébenthine, en la mêlant à chaud avec une dissolution alcoholique de camphre, en proportion réciproque aux intensités des deux actions. J'ai obtenu plus aisément, depuis, le même résultat par le mélange de l'huile essentielle de citron avec celle de térébenthine. Ayant pris un tube dont la longueur intérieure était $151^{mm},5$, je l'ai successivement rempli de ces deux

liquides; et, en les exposant tour-à-tour à un rayon polarisé, afin de déterminer les intensités de leurs actions, j'ai eu d'abord les résultats suivans :

Essence de citron : Rotation dirigée de gauche à droite, ou ↗. La section principale du prisme cristallisé étant placée dans la direction de la polarisation primitive, on a O rouge sombre, E jaune-verdâtre. En interposant le verre rouge, E devient nul quand la section principale du prisme est tournée dans l'angle de 66°, ↗. A l'œil nu et sans prisme, la lumière transmise est sensiblement colorée en vert par l'absorption qu'elle éprouve en traversant la liqueur.

Essence de térébenthine : Rotation dirigée de droite à gauche, ou ↖. La section principale du prisme cristallisé étant placée dans la direction de la polarisation primitive, on a O orangé, E blanc-bleuâtre. En interposant le verre rouge, E devient nul quand la section principale du prisme est tournée dans l'angle de 38°, ↖.

D'après les observations faites à travers le verre rouge, on voit qu'à longueur égale, la force rotatoire de l'essence de citron est à celle de térébenthine, comme 66 à 38 : conséquemment, si l'on mêle 66 parties de la seconde avec 38 de la première, on aura un mélange en proportion réciproque des intensités, dans lequel les pouvoirs de rotation devront se compenser, si toutefois ils appartiennent individuellement aux particules. C'est en effet ce que j'ai essayé, et la compensation s'est trouvée parfaite : toute la lumière transmise à travers le mélange a été ramenée à la polarisation primitive, sans laisser la moindre trace d'image extraordinaire, lorsque la section principale du prisme cristallisé a été pla-

cée dans la direction de cette polarisation. On peut remarquer aussi que les teintes observées avec l'huile essentielle de citron, quand la section principale du prisme cristallisé était dirigée dans la direction de la polarisation primitive, sont en effet celles qui conviennent à une rotation de 66° à travers le verre rouge, d'après la constance de la loi des rotations. En effet, en divisant 66° par 18°,414, on aura l'épaisseur de cristal de roche qui produirait, à travers le verre rouge, la même rotation que notre tube d'huile essentielle; et cette épaisseur sera 3^{mm},584. Or, d'après la construction des expériences exécutées fig. 14, on voit qu'une telle épaisseur doit donner pour E, dans l'azimuth zéro, un jaune-verdâtre pâle et abondant en lumière, puisqu'à 3,397, E est un vert-jaunâtre de cette espèce, et qu'il est encore un beau jaune à 4,^{mm},005. Mais le complément de ce jaune-verdâtre, au lieu d'être un indigo violacé, comme il devrait l'être si la lumière transmise était blanche, devra, à travers notre tube, tirer davantage sur le rouge, à cause de l'absorption considérable exercée principalement sur les rayons violets et bleus.

Ces expériences achevant de prouver que la faculté de faire tourner les axes de polarisation appartient aux particules mêmes des substances qui en jouissent, j'ai voulu savoir si elles la conserveraient encore dans les combinaisons chimiques où l'on pourrait les engager. J'ai choisi pour cette épreuve la combinaison solide que l'essence de térébenthine forme avec l'acide hydrochlorique. Cette composition a été nommée camphre artificiel, parce qu'elle a en effet plusieurs des propriétés extérieures du camphre naturel, par exemple la constitution granuleuse, la blancheur, l'odeur, et la fa-

culté de se dissoudre dans l'alcohol. M. Thenard a depuis long-temps émis l'opinion que les élémens de l'essence de térébenthine ne sont point désunis dans ce produit ; qu'ils y sont encore au même état de combinaison qui constitue l'essence, et que cette essence seule s'y trouve combinée avec l'acide (1). Cette opinion a été fortement confirmée par une analyse très-soignée que M. Houtou-Labillardière a faite de l'essence de térébenthine et du camphre artificiel : car il a retrouvé, dans ce produit, les proportions précises de charbon et d'hydrogène qui constituent l'essence, plus une certaine proportion d'acide hydrochlorique qu'il a déterminée (2). L'observation du pouvoir de rotation offrait ici une épreuve décisive : car l'essence de térébenthine seule, fait, comme nous l'avons vu, tourner les axes de polarisation de droite à gauche, ou ↖ ; et l'acide hydrochlorique ne produit sur eux aucun effet. En conséquence, M. Houtou-Labillardière a bien voulu me préparer une quantité considérable de camphre artificiel très-pur et privé autant que possible de tout acide libre. Nous avons dissous ce produit dans l'alcohol, qui, par lui-même ne possède aucun pouvoir de rotation, et nous avons rempli de la dissolution un tube de 1357 millimètres de longueur, terminé par des bouchons de glace. Alors nous avons transmis dans toute cette longueur un rayon primitivement polarisé en un seul sens ; et, en analysant ce rayon après son émergence, nous avons trouvé qu'en effet la dissolution agissait sur les axes de polarisation de ses particules, et qu'elle les faisait tourner de droite à gauche, ou ↖, c'est-

(1) *Mémoires d'Arcueil*, tome II.

(2) *Journal de Pharmacie*, janvier 1818.

à-dire dans le même sens que l'essence de terébenthine liquide. Nous avons mesuré l'arc de rotation parcouru ainsi, par l'espèce particulière de lumière rouge qui se transmet à travers le même verre dont j'ai parlé dans les précédentes expériences, et nous avons trouvé cet arc de 24°. Or, maintenant si l'on calcule le poids d'essence de térébenthine contenue dans la dissolution, en partant de l'analyse faite antérieurement par M. Houtou-Labillardière, et tenant compte de la densité de cette dissolution, ainsi que de la proportion d'alcohol qui y était contenue, on trouve que la rotation observée à travers le verre rouge, sur la longueur employée de 1357 millimètres, aurait dû être de 26°.36′, au lieu de 24° qu'avait donnés l'expérience; ce qui est une différence assez petite pour qu'on puisse l'attribuer, en très-grande partie, aux erreurs réunies de l'analyse chimique, et à celles de l'observation. Comme ce calcul peut être utile pour d'autres expériences pareilles, et qu'il aura en outre l'avantage de montrer le nombre et la nature des données chimiques sur lesquelles le résultat repose, j'en rapporterai ici les détails.

D'après l'analyse faite par M. Houtou-Labillardière, le camphre artificiel peut être considéré comme formé par la combinaison de trois volumes de vapeur d'essence de térébenthine, avec deux volumes de vapeur d'acide hydrochlorique : or, d'après les expériences de M. Gay-Lussac sur le poids des vapeurs, rapportées dans mon Traité de physique, tom. I[er], p. 383, si l'on prend pour unité le poids d'un volume donné d'air atmosphérique sec, sous une pression et pour une température déterminées, on trouve que, dans les mêmes circonstances de pression et de température, un volume de vapeur d'essence de térébenthine pèse 5,0130, et un volume

de vapeur d'acide hydrochlorique pèse 1,24740; conséquemment, trois volumes de la première vapeur peseront 15,0390, et deux volumes de la seconde peseront 2,4948. Ces nombres expriment donc les rapports des poids d'essence et d'acide qui entrent dans un poids donné de camphre artificiel, selon l'analyse de M. Houtou-Labillardière. Ainsi, dans un poids de ce camphre, égal à l'unité, les quantités absolues ε, α, d'essence et d'acide, seront déterminées, en poids, par les deux conditions

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}=\frac{15,0390}{2,4948}, \qquad \varepsilon+\alpha=1;$$

d'où l'on tire $\varepsilon=0,857715$ $\alpha=0,142285.$

Maintenant la dissolution alcoholique dont nous avons fait usage contenait : Alcohol........................ 1735,$^{gr.}$ 93
Camphre artificiel............ 175, 30
Poids total............... 1911, 20.

La proportion de camphre artificiel dans cette dissolution était donc $\frac{175,30}{1911,20}$; et, par suite, celle de l'essence de térébenthine y était $\frac{175,30 . 0,857715}{1911,23}=0,0786705.$

Désignons maintenant par ρ l'arc de rotation qui serait imprimé à une espèce particulière de molécule lumineuse, par une épaisseur d'essence de térébenthine liquide égale à 1 centimètre. Cette rotation deviendrait moindre si le nombre des particules d'essence contenues dans la même longueur était diminué par un moyen quelconque. Or, en mesurant les densités de notre dissolution alcoholique et de l'essence de térébenthine liquide avec laquelle j'avais fait mes expériences, M. Houtou-Labillardière a trouvé, pour la pre-

mière, 0,845521, et pour la seconde, 0,87221; celle de l'eau distillée étant 1, et la température 18°,5 du thermomètre centésimal. D'après cela, si notre dissolution alcoholique eût été tout entière composée d'essence à la densité 0,845521, la rotation qu'elle aurait produite pour une épaisseur d'un centimètre aurait été moindre que ρ, et égale à $\frac{\rho . 0{,}845521}{0{,}87221}$; mais nous venons de trouver que cette dissolution ne contient en essence de térébenthine qu'une proportion de son poids exprimée par 0,0786705; le reste étant sans aucun pouvoir. Conséquemment, la rotation qu'elle produira pour une épaisseur d'un centimètre, devra encore être affaiblie dans cette proportion, c'est-à-dire qu'elle deviendra $\frac{\rho . 0{,}845521 . 0{,}0786705}{0{,}87221}$; et, puisque la longueur totale du tube était de

1357 millim.,

qui font............. 135c,7,

l'arc total de rotation produit par cette longueur devra être

$$\frac{\rho . 0{,}845521 . 0{,}0786705 . 135{,}7}{0{,}87221}, \text{ ou } \rho . 10{,}3489.$$

Il ne reste plus qu'à substituer dans cette expression la valeur de l'arc de rotation ρ, qui convient à l'espèce de lumière transmise à travers le verre rouge et notre dissolution alcoholique. D'après les expériences rapportées plus haut sur la mesure de cette rotation, ρ serait égal à 2°,7057, si l'on considérait le verre rouge comme la seule substance absorbante; mais la dissolution seule, observée à l'œil nu, éteignait aussi par elle-même, à cause de sa grande épaisseur, une quantité de lumière considérable, et colorait l'image transmise en rouge sombre; d'où l'on peut conclure, avec vraisemblance, qu'elle absorbait une proportion notable des

rayons rouges les plus réfrangibles : de sorte que l'arc de rotation, observé ensuite à travers le verre rouge, devait se rapprocher plutôt de celui qui appartient au rouge extrême, que de celui qui convient au rouge moyen. D'après cette considération, nous emploierons pour ρ la valeur de rotation relative au rouge extrême, laquelle, par un calcul analogue à celui que nous avons fait, page 55, pour le cristal de roche, sera $2^{\circ},5718$, par conséquent un peu plus faible que la précédente. Multipliant donc cette valeur par le coëfficient numérique 10,3489, on aura pour produit $26^{\circ},60$ dans le sens de l'essence de térébenthine, c'est-à-dire ↘. Ainsi, en admettant comme parfaitement exactes toutes les données physiques et chimiques dont nous avons fait usage, cette valeur exprimerait l'arc de rotation que l'on aurait dû observer avec le verre rouge à travers les 1357 millimètres de notre dissolution alcoholique, si l'essence de térébenthine, lorsqu'elle se combine avec l'acide hydrochlorique pour former le camphre artificiel solide, conserve sa constitution primitive et son pouvoir primitif de rotation. L'accord presque parfait de ce résultat avec l'expérience directe, malgré la complication des données dont il dérive, montre avec évidence que cette permanence d'action et de constitution chimique est au moins extrêmement approchée, si elle n'est tout-à-fait rigoureuse.

Pour en suivre les effets, j'ai soumis le camphre artificiel à une autre épreuve : je l'ai dissous dans l'essence de térébenthine même, dans la proportion de 20 grammes sur 100 de liquide. L'action du système s'est trouvée sensiblement la même que si l'essence eût été pure; ce qui montre qu'en se dissolvant dans ce liquide, le camphre artificiel, et par conséquent l'essence combinée qui en fait partie, conservait

toujours son pouvoir. J'ai ensuite dissous dans la même espèce d'essence de térébenthine le camphre naturel, en proportion pareille, c'est-à-dire 20 grammes sur 100 grammes d'essence. Mais alors le résultat a été bien différent : car le pouvoir de ce camphre étant opposé à celui de la térébenthine, comme je l'ai depuis long-temps observé, son introduction dans ce liquide a diminué considérablement la rotation qu'il produisait; et cette diminution s'est manifestée, tant sur la mesure directe de l'arc de rotation à travers le verre rouge, que sur l'espèce même des teintes composées, qui paraissaient à une épaisseur donnée du système, lorsque la lumière transmise était blanche.

Pour achever ces épreuves, il ne me restait plus qu'à essayer si le pouvoir de rotation propre à l'essence de térébenthine liquide se conserverait encore quand elle serait réduite à l'état de vapeur. Ce résultat, quel qu'il fût, offrait une conséquence utile : car, ou la térébenthine en vapeur perdrait son pouvoir, et alors il en résultait que les particules d'un liquide changent de forme en devenant vapeur; ou bien elle le conserverait, et alors il en résultait démonstrativement que cette propriété appartient en effet à ses particules, et de plus que celles-ci ne changent point de forme en se vaporisant. Mais, par cela même que la rotation imprimée à un rayon lumineux par une substance, est proportionnelle au nombre des particules de cette substance qui agissent, on conçoit qu'il fallait employer une grande longueur de vapeur pour produire des effets appréciables; en conséquence, les appareils nécessaires pour cette expérience devenaient nécessairement compliqués et dispendieux. Le ministre de l'intérieur, M. Lainé, toujours rempli d'intérêt pour les sciences, me donna les moyens de lever ces difficultés;

et, grace à sa bienveillance, je me trouvai, au milieu de l'été dernier, en état d'effectuer l'observation.

Mon appareil, établi dans une ancienne église qui sert aujourd'hui d'orangerie à la chambre des pairs, consistait en un double système de tuyaux de fer-blanc terminés par des bouchons de glace, et s'enveloppant l'un l'autre concentriquement sur une longueur de trente mètres. (*Voy.* fig. 16.) Une chaudière établie à l'une des extrémités de cette ligne, sur un fourneau de brique, et remplie en partie d'essence de térébenthine, était destinée à fournir la vapeur à travers laquelle on devait observer. Mais cette vapeur, si elle eût été introduite d'abord dans un tube exposé à l'air libre, s'y serait refroidie et précipitée : la seconde enveloppe était destinée à empêcher cet effet. La vapeur de l'essence y devait circuler d'abord ; et, pour connaître sa température, on avait fixé dans son intérieur, à l'extrémité la plus distante de la chaudière, plusieurs thermomètres dont les échelles seules sortaient au dehors. Quand ces thermomètres indiquaient une température suffisamment haute, un robinet, placé à cette extrémité éloignée, ouvrait une communication entre l'enveloppe extérieure et le tuyau intérieur ; de sorte que la vapeur, étant entraînée ainsi dans le tuyau avec la plus basse température qu'elle pût avoir dans tout le système, elle ne pouvait, en s'y répandant, que s'y dilater par l'accroissement de sa température, mais nullement s'y précipiter et retourner à l'état liquide. Il n'en était pas ainsi du tube extérieur. Celui-ci étant exposé nu au contact de l'air, une portion de la vapeur qu'on y faisait circuler se condensait et se précipitait en liquide, auquel il fallait donner une issue, sans quoi tout le tube se serait bientôt rempli. C'est à quoi l'on était parvenu très-simplement, et avec la moindre perte possible de cha-

leur, en donnant au système des tuyaux une légère inclinaison à l'horizon, de manière que la partie la plus basse se trouvât du côté de la chaudière. Alors le liquide formé par précipitation retournait de lui-même dans la chaudière, avec une très-grande portion de sa chaleur acquise; de sorte que la chaudière n'avait nullement besoin d'être alimentée par de nouveau liquide, et pouvait être entretenue avec très-peu de combustible dans un état permanent d'ébullition. Des tubes recourbés, placés de distance en distance, étaient destinés à laisser échapper la vapeur sous une pression de quelques centimètres d'eau, et servaient ainsi de soupape de sûreté. Enfin un autre tube plus gros, plongé dans une cuve d'eau par son orifice inférieur, et muni d'un robinet, était destiné à l'absorption de la vapeur que l'on jugerait à propos de détruire si elle devenait trop abondante. Ces dispositions faites, l'expérience fut tentée; mais elle le fut d'abord deux fois sans succès, quoique sans aucun inconvénient grave. La portion inférieure du tuyau d'enveloppe recevant le liquide produit par la précipitation de la vapeur, s'échauffait plus fortement que la supérieure exposée à la vapeur seule; de-là une dilatation inégale, qui faisait courber la colonne comme les lames compensatrices d'un chronomètre; et cette courbure empêchant le rayon lumineux de se transmettre à travers le tube intérieur. On essaya ainsi de chauffer la colonne entière de 30 mètres; puis on la coupa au milieu, et on en chauffa seulement une moitié, sans pouvoir éviter sa torsion. Enfin, dans une troisième épreuve, on parvint à maintenir cette moitié en l'assujettissant de distance en distance sur ses appuis, par des cordes chargées de poids, qui tendaient à la fixer dans une direction rectiligne sans l'empêcher de s'allonger. D'ailleurs l'inégalité de température des deux faces supé-

rieure et inférieure du tuyau, qui d'abord était très-considérable, diminua à mesure que la circulation de la vapeur commença à être régulièrement établie ; et, par l'effet de ces diverses circonstances, la vision à travers le tube intérieur ne fut pas interrompue un seul instant.

Avant d'allumer le feu, et lorsque tout l'appareil était encore dans son immobilité première, j'avais placé à l'une des extrémités de la colonne, du côté de la chaudière, un miroir de verre non étamé, noirci à sa surface postérieure, et dont le plan était presque vertical. La direction de ce plan avait été tournée de telle sorte, que le miroir renvoyait dans l'axe du tube la lumière d'une lampe à courant d'air, et l'y renvoyait complètement polarisée en un seul sens. J'étais parvenu à le placer ainsi par quelques essais que les personnes habituées à ce genre d'expériences concevront facilement. Devant l'autre extrémité de la colonne, et sur un support fixe, indépendant d'elle, j'avais placé un cercle divisé dont le plan était perpendiculaire à sa direction, par conséquent presque vertical; et, sur ce cercle, une alidade mobile portait un prisme de spath d'Irlande achromatisé, dont la section principale pouvait ainsi tourner autour du rayon transmis, et être successivement amenée dans toutes les directions possibles, autour du plan de polarisation primitif du rayon transmis à travers le tube. Avant de commencer l'expérience, et lorsque le tube antérieur n'était rempli que d'air, je déterminai soigneusement la position qu'il fallait donner au prisme cristallisé, pour que le rayon réfléchi et polarisé par le miroir de glace, s'y réfractàt tout entier ordinairement; et je le fixai dans cette position, après avoir, pour plus de sûreté, noté le point de la division auquel correspondait l'alidade mobile. Dans cette situation, l'image ordinaire était

parfaitement nulle. Ces dispositions terminées, le feu fut allumé sous la chaudière, et bientôt la vapeur commença à circuler dans l'espace qui servait d'enveloppe au tube intérieur.

Lorsque le thermomètre le plus éloigné de la chaudière marqua 100° centésimaux, j'ouvris la communication établie en cette partie, entre le tuyau extérieur qui servait d'enveloppe et le tuyau intérieur terminé par des glaces, à travers lequel se transmettait le rayon polarisé. J'ouvris en même temps un autre robinet situé à l'extrémité opposée de ce même tube intérieur, et communiquant au dehors, afin de laisser échapper par cette ouverture l'air que le tube renfermait, et qui se trouvait chassé par le courant de vapeur. La vapeur entrant ainsi dans le tube intérieur par sa partie la plus froide, et en sortant par sa partie la plus chaude, ne pouvait jamais s'y précipiter en liquide, ni même former aucun nuage qui pût altérer sa transparence. D'ailleurs les bouts du tube étaient terminés par de doubles fonds de glaces, entre lesquels circulait un courant d'air chaud; ce qui maintenait les surfaces des glaces, du côté de la vapeur, à une température assez haute pour qu'elles ne se chargeassent point de gouttes liquides, comme elles l'auraient fait infailliblement si leur autre surface eût été immédiatement exposée au contact de l'air extérieur. Aussi, à l'aide de ces précautions, la transparence ne fut pas un moment troublée; et l'on put se tenir assuré de saisir la première apparition d'une image extraordinaire. En effet, à mesure que la vapeur commença à se répandre dans le tube intérieur, et à y prendre la place de l'air ordinaire, le rayon lumineux transmis, qui d'abord était parfaitement polarisé en un sens unique, commença à donner quelques faibles traces d'une seconde image. Cette image, comme celles que le pouvoir de rotation pro-

duit dans le cristal de roche, la térébenthine, le sirop de sucre, etc, fut d'abord d'un bleu sombre et à peine sensible. Mais, à mesure que la vapeur devint plus abondante dans le tube intérieur, tant par l'expulsion de l'air que par l'élévation toujours croissante de la température, la teinte de cette nouvelle image devint plus prononcée et plus abondante en lumière. Enfin elle devint tout aussi forte et distincte qu'à travers un liquide même. Pour constater son existence d'une manière indubitable, avant de toucher au prisme cristallisé, j'appelai deux personnes qui m'assistaient, dont l'une était M. Obeliane, préparateur de physique à la faculté des sciences, et l'autre M. Blanc, un de mes élèves, jeune homme aussi zélé qu'instruit. Ils l'observèrent tous deux, et reconnurent, comme moi, que sa teinte était un bleu légèrement verdâtre; tandis que celle de l'image ordinaire, qui d'abord était blanche, s'était changée en un rouge-jaunâtre. Cette seule apparition d'une double image, ainsi colorée, décidait la question pour laquelle l'expérience était faite, et montrait que le pouvoir de rotation qui existe dans l'essence de térébenthine liquide, subsiste encore quand cette essence passe à l'état de vapeur : car, dans un fluide élastique où il ne peut exister aucune force dépendante d'un mode d'aggrégation fixe, le pouvoir de rotation seul, qui est propre aux particules mêmes, peut produire de doubles images. De là il suit encore que les particules de l'essence de térébenthine ne changent point de constitution ni de forme en devenant vapeurs, puisqu'elles conservent cette même faculté individuelle qu'elles possédaient dans l'état liquide, et qui, ne cessant pas de leur appartenir dans les combinaisons chimiques où on les engage, se montre ainsi inhérente à leur constitution même. Toutefois, pour vérifier cette identité par une épreuve peut-être surabondante, mais qui se présentait

d'elle-même, j'allais tourner le prisme cristallisé de droite à gauche, afin de vérifier l'identité du sens de la rotation, lorsque, tout-à-coup, une explosion a eu lieu par quelque cause que j'ignore et malgré toutes les précautions qu'on avait prises. Le couvercle de la chaudière a sauté en l'air, la vapeur et le liquide se sont enflammés, et une colonne de feu produite par leur combustion s'est élevée à une hauteur considérable. Ce feu, que rien ne pouvait éteindre, a cessé de lui-même après quelques minutes, par l'épuisement des matières qui l'alimentaient, et qui consistaient principalement dans la quantité de liquide que contenait la chaudière. Mais ce peu de momens qu'il avait duré avait suffi pour enflammer un plancher trop élevé au-dessus du sol pour que nous pussions l'atteindre et y porter remède. Les secours publics devinrent nécessaires. Leur promptitude, jointe à l'habileté qui les dirige, arrêtèrent le feu avant qu'il se fût propagé au-dehors, et bornèrent ses dégâts au-dedans. Il ne causa aucun malheur personnel; et, quelque peine que j'aie ressentie en me trouvant la cause involontaire de cette alarme, je n'en aurais pas rappelé ici les circonstances, si ce n'eût été, pour moi, un devoir d'exprimer ma gratitude envers l'administration, qui, voyant dans les suites de cet accident moins l'effet d'une tentative privée que les conséquences imprévues d'une recherche scientifique, a bien voulu ne pas se souvenir que c'eût été à moi de les réparer.

Cette dernière et importante expérience, en confirmant toutes les indications que nous avons tirées des précédentes, achève de montrer que le singulier pouvoir que certaines substances possèdent pour faire tourner les axes de polarisation des rayons lumineux, est une faculté individuelle à leurs particules; faculté qu'elles ne peuvent perdre que lors-

qu'elles cessent d'être elles-mêmes, par leur décomposition. Toutefois, si quelque autre physicien, aussi favorablement secondé que je l'ai été moi-même, se trouve avoir les moyens et le désir de la répéter, il sera intéressant de constater le sens de la rotation et son identité avec celui qui convient à l'essence de térébenthine liquide. Il sera plus intéressant encore d'en mesurer la quantité, et d'en déduire, par le calcul, l'énergie du pouvoir de rotation, en ayant égard à la densité actuelle de la vapeur dans la colonne : par là on connaîtra si, comme il est extrêmement vraisemblable, les particules vaporisées conservent entièrement leur pouvoir. Cette dernière détermination présentera des difficultés dépendantes de l'inégale température, et par conséquent de l'inégale densité que possédera la vapeur dans les diverses parties de la colonne; mais, en y plaçant d'avance des thermomètres de distance en distance, et notant leurs indications au moment où l'on fera la mesure de la rotation par le mouvement du prisme ou par l'observation seule des teintes, on pourra connaître les densités d'une manière suffisamment approchée, sur-tout si l'on peut, en laissant à la vapeur l'issue libre et constante qui lui est nécessaire, parvenir à avoir dans la colonne un état de température et de densité permanent. Mais, ce que je ne saurais trop recommander, et ce que je me reprocherais de ne pas représenter ici d'une manière spéciale, c'est l'indispensable nécessité de conduire le tube d'écoulement de la vapeur jusqu'à une grande distance de la chaudière, et, s'il se peut, au-dehors du bâtiment où se fait l'expérience, de peur que cette vapeur, si elle se répandait autour des fourneaux ou de la lampe, ne vînt à s'enflammer et à déterminer une explosion générale; c'est aussi de tenir le fourneau et la chaudière même séparés de tout le reste de l'appareil par des abris imperméables, tels qu'un mur à travers lequel

on fera passer un tube d'introduction : car si, malgré toutes les précautions que nous venons d'expliquer, la chaudière venait à éclater, l'explosion de la vapeur, son inflammation et celle du liquide pourraient faire périr misérablement, et de la manière la plus inévitable comme la plus cruelle, les personnes qui se trouveraient à quelque distance. Il s'en est bien peu fallu que cet affreux malheur ne soit arrivé à moi ou aux deux personnes qui m'assistaient, puisque nous allions incessamment d'une extrémité de l'appareil à l'autre; et elles auraient toutes deux péri infailliblement, si la pensée, je dirais presque l'inspiration, qui me vint de m'aider de leur témoignage, pour constater le phénomène, ne m'avait fait les rappeler près de moi à l'extrémité de l'appareil la plus éloignée de la chaudière, quelques instans avant que celle-ci éclatât.

NOTE.

Je me suis borné, dans ce mémoire, à exposer, d'après l'expérience, les lois des déplacemens que l'on observe dans les plans de polarisation des rayons lumineux, lorsque la lumière qui les compose a traversé certaines substances solides, ou liquides. Si la lumière est une matière émise, les plans de polarisation appartiennent aux molécules lumineuses mêmes; et leur sens indique des propriétés de position, ou de mouvement, ou d'action ou de forme, communes à toutes les molécules qui composent un même rayon polarisé. Alors il faut admettre que, dans le progrès du rayon à travers ces substances, les propriétés dont il s'agit s'exercent successivement dans différens sens, et tournent autour de la direction de translation du rayon, suivant les rapports de vîtesses établies dans ce mémoire; soit par l'effet d'une rotation réelle des particules lumineuses, soit par un changement progressif dans la direction de leurs mouvemens latéraux. Si la lumière n'est pas une matière émise, mais le simple effet d'ondulations propagées dans un éther très-élastique, toutes les modifications que nous venons d'attribuer aux molécules lumineuses, devront être remplacées par des modifications équivalentes, appliquées aux ondulations.

J'ai montré autrefois que toutes les lames minces cristallisées produisent dans les rayons lumineux qui les traversent, des alternatives de polarisation relatives à des limites fixes, dépendantes de la polarisation de l'axe des lames autour de la direction primitive de polarisation du rayon transmis. Ce mouvement alternatif a été lié à la rotation progressive par M. Fresnel, au moyen d'une très-belle suite d'expériences consignées dans plusieurs mémoires présentés à l'Institut en 1817 et 1818. Je vais essayer d'en donner une idée succincte.

M. Fresnel a découvert le nœud de jonction des deux classes de phénomènes, dans les modifications que la réflexion totale imprime à la lumière polarisée. Parmi les procédés dont il a fait usage, il a employé des parallélipipèdes obliquangles de verre, tels que A, B, C, D, fig. 17, dans lesquels un rayon polarisé, SI, introduit d'abord par la face AB, sous l'incidence perpendiculaire, ressort de même perpendiculairement par la face opposée et parallèle CD, après avoir subi intérieurement deux réflexions totales en I et I'. En disposant deux parallélipipèdes de ce genre, de manière que les plans de réflexions successifs dans l'un et dans l'autre fussent rectangulaires; puis, plaçant entre deux une lame cristallisée, parallèle à l'axe, de manière que la direction de son axe formât un angle de 45° avec chacun des plans rectangulaires de réflexion, M. Fresnel a trouvé que le rayon transmis à travers ce système, présentait des apparences analogues à celles des rayons qui ont traversé une plaque de cristal de roche perpendiculaire à l'axe, ou une certaine épaisseur d'essence de térébenthine. Il a déterminé les conditions nécessaires pour que le sens de cette rotation devînt contraire à celui que produit l'essence; et alors, par une conséquence naturelle, mais décisive, il a trouvé que la modification ainsi imprimée à la lumière, pouvait être compensée par sa transmission à travers une certaine épaisseur de térébenthine dépendante de l'épaisseur de la lame cristallisée employée.

Cette belle expérience établit donc une liaison de fait entre les deux classes de phénomènes. M. Fresnel est parvenu à découvrir, et à exprimer par des formules, les rapports qu'elle indiquait. Alors les épaisseurs des lames cristallisées et de térébenthine, nécessaires pour établir la compensation de rotation, lui ont indiqué la quantité de ces dernières pour chaque rayon simple. En calculant deux expériences faites de cette manière sur des colonnes d'essence de térébenthine, dont l'une avait de longueur $0^m,500$, et l'autre $2^m,030$, il en a tiré les valeurs suivantes des rotations des différens rayons simples, pour un centimètre d'épaisseur :

	1re EXPÉRIENCE.	2e EXPÉRIENCE.
Rouge moyen..........	2,° 59	2,° 71
Orangé..............	2, 99	3, 07
Jaune................	3, 36	3, 42
Vert.................	3, 90	3, 91
Bleu.................	4, 48	4, 44
Indigo...............	4, 96	4, 87
Violet moyen..........	5, 49	5, 35

Pour comparer ces résultats aux valeurs que j'ai rapportées dans mon Mémoire, d'après l'observation directe, je choisis dans la seconde expérience, que M. Fresnel regarde comme la plus exacte, la rotation du rouge moyen 2°,71, et je la compare à la rotation du même rouge dans un centimètre de cristal de roche, laquelle est 189°,881, d'après les valeurs rapportées pag. 82. Le rapport de ces deux nombres est 70,0678 : tel est donc le facteur par lequel il faut multiplier les résultats de M. Fresnel, pour en déduire les rotations des divers rayons dans un centimètre de cristal de roche, ou dans un millimètre, en divisant les produits par 10. C'est ce que j'ai fait; et, en déduisant aussi de mes résultats les rotations pour les moyennes de chaque couleur simple, je les ai comparées les unes aux autres dans le tableau suivant :

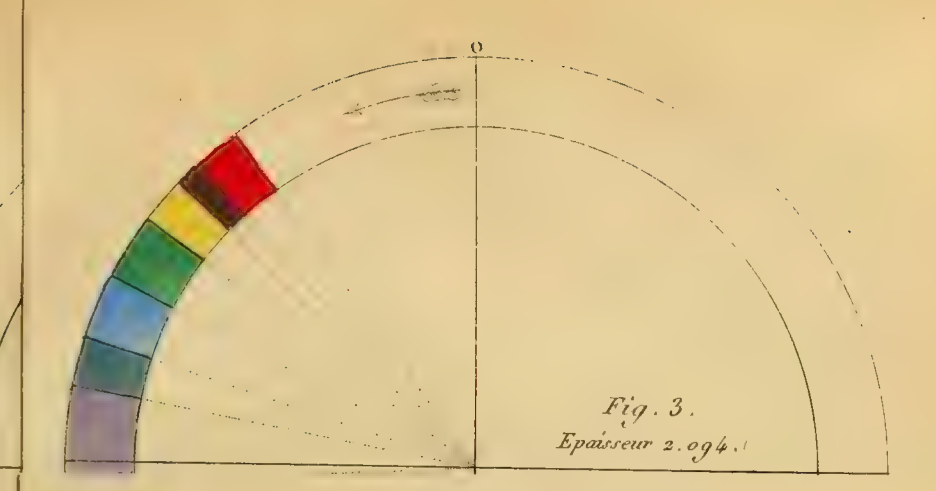
	OBSERVATION.	FORMULE DE M. FRESNEL.	EXCÈS DE LA FORMULE.
Rouge moyen..........	18,°9881	18,°9881	+ 0,°0000
Orangé..............	21, 3968	21, 5105	+ 0, 1137
Jaune...............	23, 9945	23, 9628	— 0, 0317
Vert................	27, 8606	27, 3960	— 0, 4646
Bleu................	32, 3088	31, 1097	— 1, 1991
Indigo..............	36, 1273	34, 1225	— 2, 0048
Violet..............	40, 8828	37, 4860	— 3, 3968

On voit d'abord, par cette comparaison, que les résultats auxquels le calcul a conduit M. Fresnel, quoique agrandis par la multiplication dans une proportion considérable, s'accordent à très-peu-près avec ceux que j'ai tirés de l'expérience directe, et qui sont réciproquement proportionnels

aux quarrés des accès. L'accord est même parfait pour la portion du spectre qui s'étend depuis le rouge jusqu'au vert; c'est seulement aux rayons bleus que la divergence commence à être sensible, et elle devient plus sensible pour les rayons indigos et violets. Enfin on peut remarquer qu'elle semble dépendre en quelque chose de la longueur de la colonne traversée par la lumière : car elle serait moins forte en employant les résultats de la première expérience. D'après cela, si ce petit écart ne tient pas à quelque légère altération dans l'uniformité de la rotation, ce qui n'est pas impossible, ne pourrait-il pas dépendre de la faculté absorbante de l'essence de térébenthine, laquelle s'exerce avec plus d'énergie sur les rayons les plus réfrangibles du spectre; ce qui, altérant la blancheur de la lumière transmise, permettrait d'admettre comme suffisantes des compensations dont l'imperfection se ferait sentir avec une lumière plus pure.

Quoi qu'il en soit, l'accord de ces résultats est beaucoup trop intime pour que la liaison que M. Fresnel a établie entre eux puisse être révoquée en doute. Les considérations qu'il a employées pour la découvrir, sont fondées sur l'application de la théorie des interférences à la lumière qui a traversé des milieux jouissant de la double réfraction ; application que M. Young a le premier indiquée, mais que M. Fresnel a complétée en y introduisant les conditions dépendantes de l'état de polarisation, et en déterminant, par la mécanique, la résultante d'un nombre quelconque de systêmes d'ondes lumineuses; ce qui l'a conduit à des expressions générales des intensités des rayons de diverses couleurs dans les images ordinaires et extraordinaires. Les principes sur lesquels ces calculs reposent ne sauraient être exposés en détail; mais il était impossible de ne pas en indiquer au moins les heureux et importans résultats.

En construisant les deux figures 14 qui indiquent les teintes ordinaires et extraordinaires, produites par les plaques de cristal de roche d'épaisseurs diverses, on a calculé plusieurs points de la courbe, qui n'étaient point compris dans les treize plaques observées, et qui offriront de nouveaux points de vérification à des expériences futures. On a ainsi reconnu une erreur de calcul relative à la treizième plaque, de l'épaisseur $13^{mm},416$, pour laquelle les élémens véritables des teintes sont $U=21°.4'.55'$, $\Delta=0,124884$; $1-\Delta=0,875116$; $U'=201°.4'.55''$, $\Delta'=0,146735$; $1-\Delta'=0,853265$; ce qui indique une image ordinaire rouge et une image ordinaire verte, beaucoup plus conformes à l'observation, que celles qui résultaient des évaluations fautives rapportées pour cette plaque dans le texte. Cette correction et les autres calculs relatifs à ces deux figures, ont été faits par M. Blanc, que j'ai déjà cité.


O
Fig. 3.
Epaisseur 2.094.

ır la portion du spectre
ıment aux rayons bleu
e devient plus sensible
marquer qu'elle semble
olonne traversée par la
résultats de la première
s à quelque légère alté-
as impossible, ne pour-
sence de térébenthine,
les plus réfrangibles du
transmise, permettrait
nt l'imperfection se fe-

beaucoup trop intime
e eux puisse être rétro-
rès pour la découvrir,
erférences à la lumière
refraction ; application
Fresnel a complétée en
de polarisation, et en
n nombre quelconque
à des expressions géné-
s dans les images ordi-
els ces calculs reposent
npossible de ne pas en
ats.

ntes ordinaires et extraord-
rs diverses, on a calculé plu
s treize plaques observées, et
ences futures. On a ainsi r-
e l'épaisseur 13mm,416, pour
=0,124384; 1—Δ=0,8[illegible]
ndique une image ordinaire
es à l'observation, que celle
e plaque dans le texte. Cette
t été faits par M. Blanc, qui

Mémoire de M. Biot

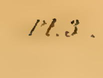
Fig. 1

Fig. 3

Fig. 4.

Fig. 5

Fig. 6



B J′ O′ R′ Z′

Fig. 7
Épaisseur [illegible]

Fig. 8
Épaisseur [illegible],98

Fig. 9
Épaisseur [illegible],92

0

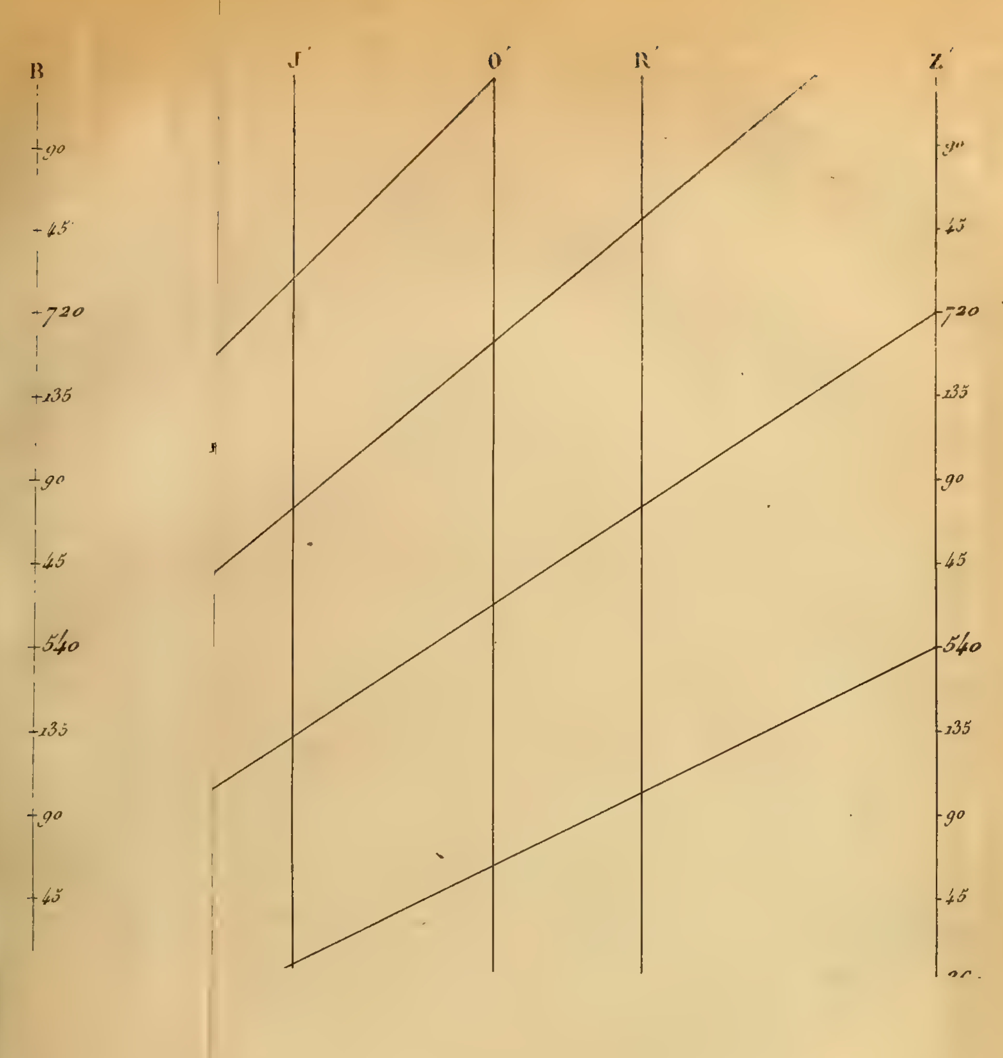
Fig. 10
Épaisseur 9,102

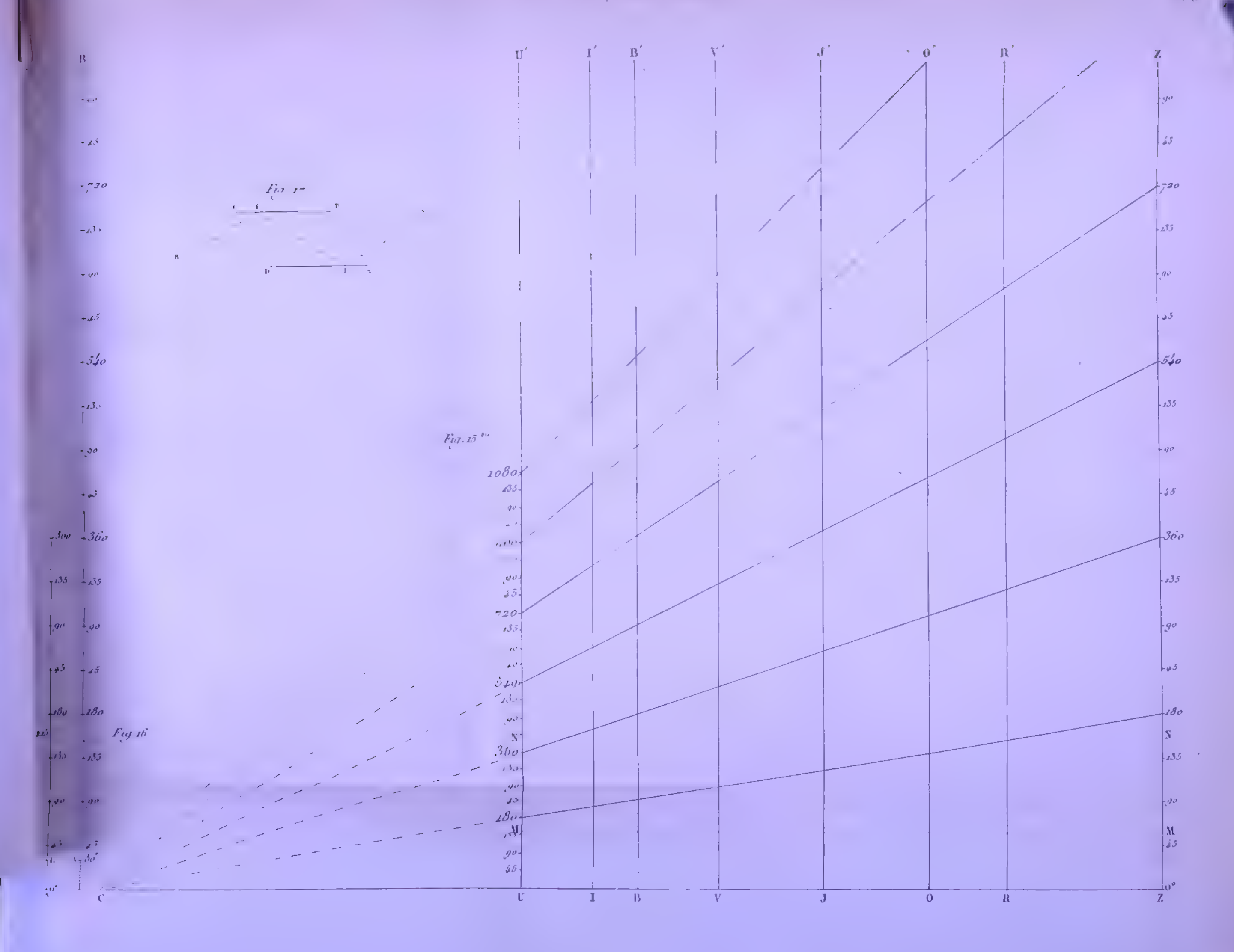
0

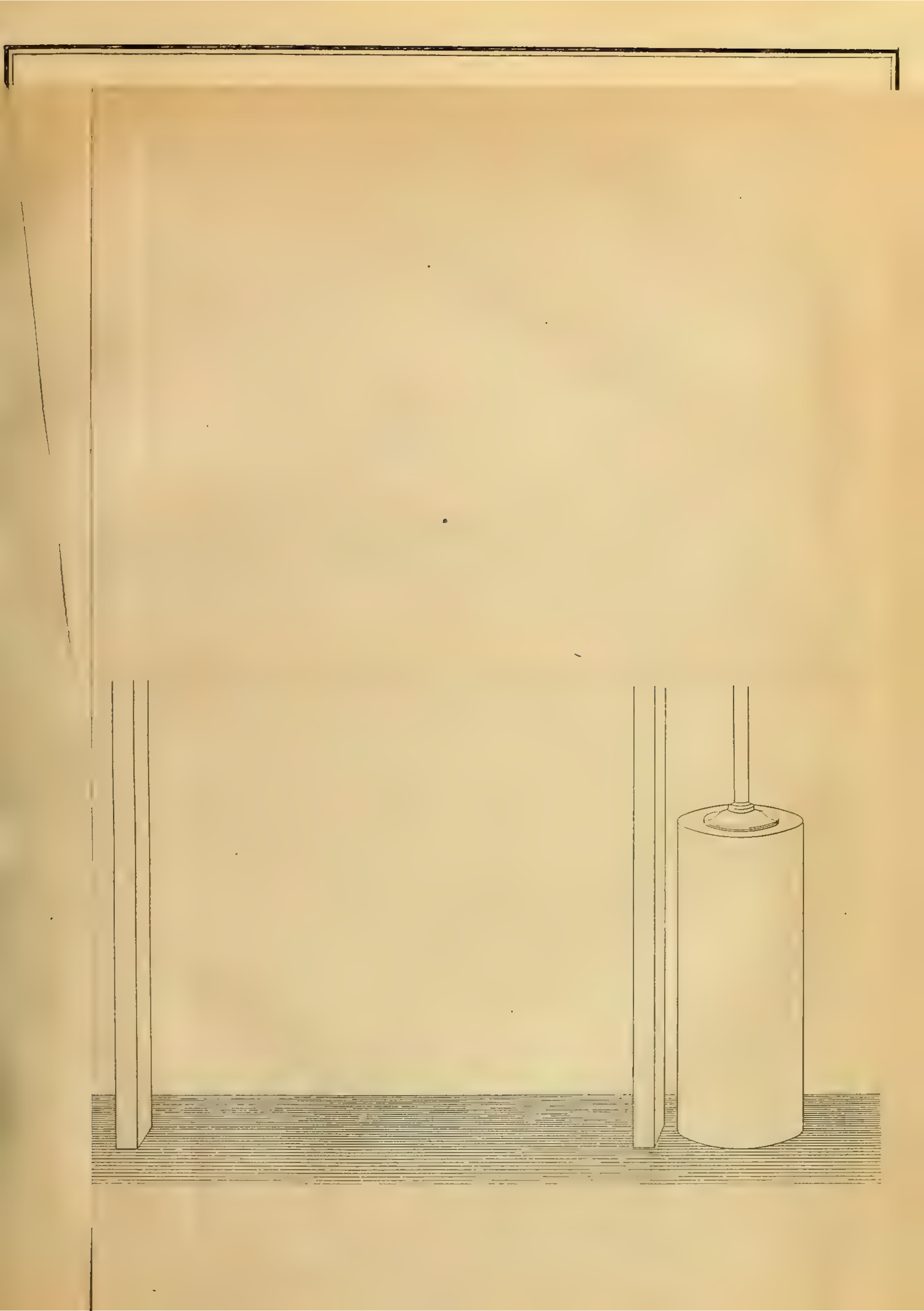
Fig. 11
Épaisseur 10,124

0

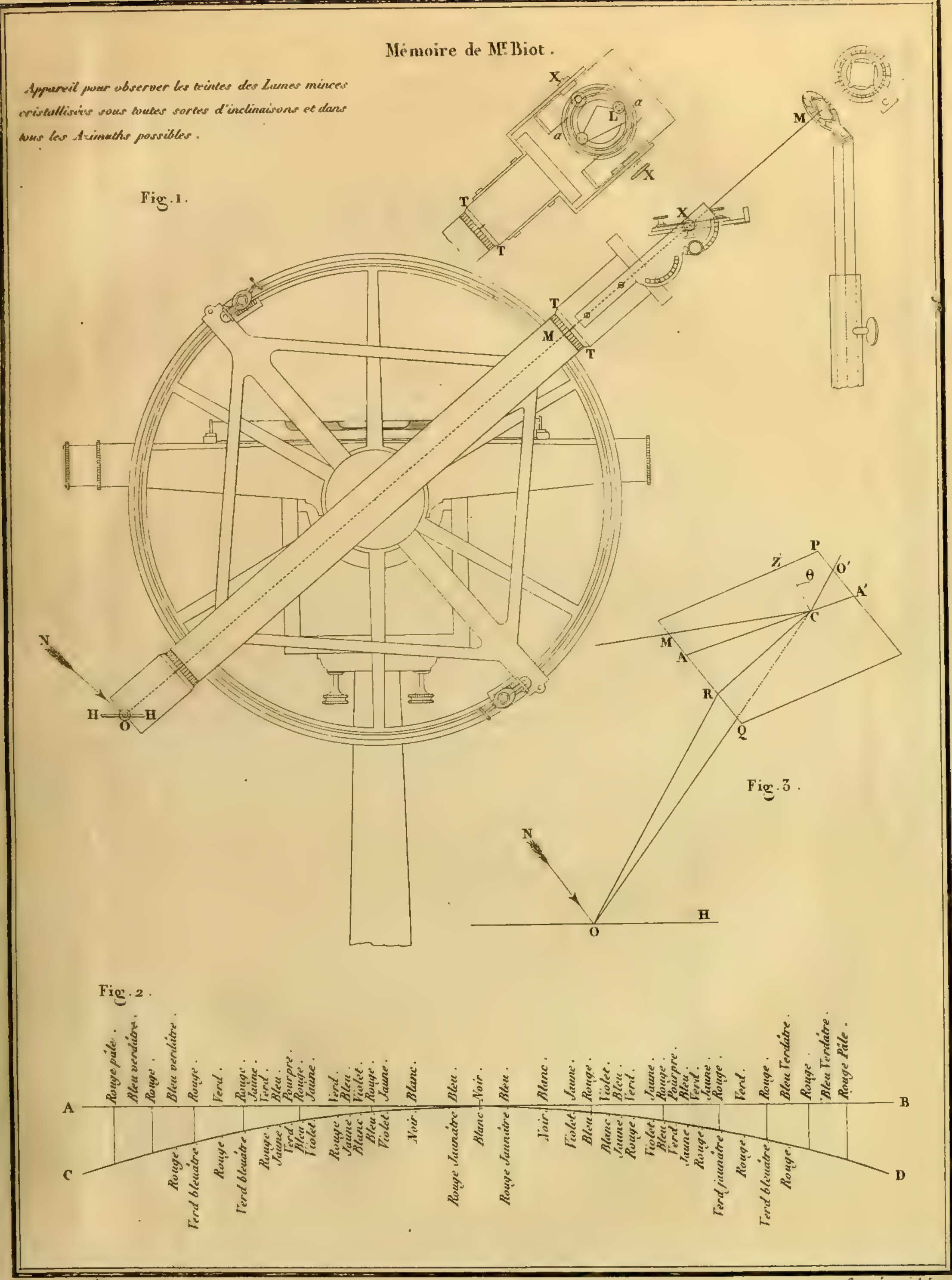
Fig. 12
Épaisseur 11,972


B
J′
O′
R′
Z′
90
45
720
135
90
45
540
135
90
45
90
45
720
135
90
45
540
135
90
45


Fig. 15 bis
Fig. 16
U′
I′
B′
V′
J′
O′
R′
Z
U
I
B
V
J
O
R
Z
C
M
N
1080
720
540
360
180
0°



Construction Géométrique des valeurs de U, U′, Δ, Δ′



Gravé par Adam.



MÉMOIRE

SUR LA FIGURE DE LA TERRE;

PAR M. DE LAPLACE.

Lu à l'Académie des Sciences, le 4 août 1818.

Les géomètres ont, jusqu'à présent, considéré la terre comme un sphéroïde formé de couches de densités quelconques, et recouvert en entier d'un fluide en équilibre. Ils ont donné les expressions de la figure de ce fluide, et de la pesanteur à sa surface; mais ces expressions, quoique fort étendues, ne représentent pas exactement la nature. L'Océan laisse à découvert une partie du sphéroïde terrestre; ce qui doit altérer les résultats obtenus dans l'hypothèse d'une inondation générale, et donner naissance à de nouveaux résultats. A la vérité, la recherche de la figure de la terre présente alors plus de difficultés; mais le progrès de l'analyse, sur-tout dans cette partie, fournit le moyen de les vaincre, et de considérer les continens et les mers, tels que l'observation nous les présente. C'est l'objet de l'analyse suivante, qui, comparée aux expériences du pendule, aux mesures des degrés et aux observations lunaires, conduit à ces résultats :

1° La densité des couches du sphéroïde terrestre croît de la surface au centre ;

2° Ces couches sont à très-peu-près régulièrement disposées autour de son centre de gravité;

3° La surface de ce sphéroïde, dont la mer recouvre une partie, a une figure peu différente de celle qu'elle prendrait en vertu des lois de l'équilibre, si la mer cessant de la recouvrir, elle devenait fluide;

4° La profondeur de la mer est une petite fraction de la différence des deux axes de la terre;

5° Les irrégularités de la terre et les causes qui troublent sa surface, ont peu de profondeur;

6° Enfin, la terre entière a été primitivement fluide.

Ces résultats de l'analyse, des observations et des expériences, me semblent devoir être placés dans le petit nombre des vérités que nous offre la géologie.

I. La figure de chaque couche du spheroïde terrestre étant à fort-peu-près sphérique, j'exprimerai, comme dans le troisième livre de la Mécanique céleste, son rayon par $a.(1+\alpha y)$, α étant un très-petit coëfficient constant. Je désignerai par ρ la densité de cette couche, ρ étant fonction de a. Je nommerai V la somme des quotiens de chaque molécule du sphéroïde terrestre, divisée par sa distance à un point extérieur attiré; r étant la distance de ce point, à l'origine des rayons terrestres, placée très-près du centre de gravité de la terre. Enfin je nommerai μ le cosinus de l'angle que r fait avec l'axe du sphéroïde, et ϖ l'angle que le plan passant par cet axe et par r, forme avec un méridien fixe sur la surface du sphéroïde. On peut supposer y développé dans une série de cette forme :

$$y = Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + \text{etc};$$

$Y^{(i)}$ étant une fonction de a, μ, $\sqrt{1-\mu^2}.\sin.\varpi$, $\sqrt{1-\mu^2}.$

cos. ω, rationnelle et entière de l'ordre i, relativement à ces trois dernières quantités, et telle que l'on ait généralement :

$$o = \left(\frac{d.(1-\mu^2).\left(\frac{dY^{(i)}}{d\mu}\right)}{d\mu}\right) + \frac{\left(\frac{ddY^{(i)}}{d\omega^2}\right)}{1-\mu^2} + i.\overline{i-1}.Y^{(i)}.$$

La formule (5) du nº 14. du troisième livre de la Mécanique celeste, devient ainsi

$$V = \frac{4\pi}{3r}.\int \rho.d.a^3 + 4\alpha\pi.\int \rho.d.\left(\frac{a^4Y^{(1)}}{3r^2} + \frac{a^5Y^{(2)}}{5r^3} + \frac{a^6Y^{(3)}}{7r^4} + \text{etc.}\right);$$

π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon : les différentielles et les intégrales étant relatives à la variable a; celles-ci étant prises depuis a nul jusqu'à sa valeur à la surface du sphéroïde, valeur que je prendrai pour l'unité.

Concevons maintenant la mer en équilibre sur ce sphéroïde doué d'un mouvement de rotation. Soit $\alpha\varphi$ le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur; et désignons par V′ la somme de toutes les molécules de la mer, divisées par leurs distances respectives au point attiré. Si l'on suppose ce point à la surface de la mer, on aura par le nº 23 du troisième livre de la Mécanique céleste, pour l'équation de l'équilibre,

$$\text{Constante} = \frac{4\pi}{3r}.\int \rho.d.a^3 + 4\alpha\pi.\int \rho.d.\left(\frac{a^4Y^{(1)}}{3r^2} + \frac{a^5Y^{(2)}}{5r^3} + \frac{a^6Y^{(3)}}{7r^4} + \text{etc.}\right)$$
$$+ V' - \frac{4}{3}\pi.\int \rho.d.a^3.\frac{\alpha\varphi.r^2}{2}\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right); \qquad (1)$$

Pour déterminer V′, je supposerai que le rayon mené de l'origine des rayons terrestres à la surface de la mer, soit $1 + \alpha\bar{y} + \alpha y'$, $\bar{y}$ étant la valeur de y à la surface du sphéroïde : $\alpha y'$ sera, à très-peu-près, la profondeur de la mer. Je supposerai ensuite,

18.

$$y' = Y'^{(0)} + Y'^{(1)} + Y'^{(2)} + Y'^{(3)} \text{ etc};$$

$Y'^{(i)}$ étant une fonction rationnelle et entière de μ, $\sqrt{1-\mu^2}$. sin. ω, $\sqrt{1-\mu^2}$. cos. ω, assujettie à la même équation aux différences partielles, que $Y^{(i)}$. On peut considérer la mer comme égalant un sphéroïde dont le rayon est $1+\alpha\bar{y}+\alpha y'$, moins un second sphéroïde dont le rayon est $1+\alpha\bar{y}$, plus la partie de ce second sphéroïde, qui se relève au-dessus du premier, et où, par conséquent, $\alpha y'$ est négatif. La somme des molécules du premier sphéroïde, divisées par leurs distances au point attiré, est, par ce qui précède, en prenant pour unité la densité de la mer,

$$\frac{4\pi}{3r} + 4\alpha\pi.\left(\frac{Y'^{(0)}}{r} + \frac{(\bar{Y}^{(1)} + Y'^{(1)})}{3r^2} + \frac{(\bar{Y}^{(2)} + Y'^{(2)})}{5r^3} + \text{etc.}\right);$$

$\bar{Y}^{(1)}$, $\bar{Y}^{(2)}$, etc, étant ce que deviennent $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$, etc, à la surface du sphéroïde terrestre. La même somme relative au second sphéroïde, est

$$\frac{4\pi}{3r} + 4\alpha\pi.\left(\frac{\bar{Y}^{(1)}}{3r^2} + \frac{\bar{Y}^{(2)}}{5r^3} + \frac{\bar{Y}^{(3)}}{7r^4} + \text{etc.}\right).$$

La différence de ces deux quantités est

$$4\alpha\pi.\left(\frac{Y'^{(0)}}{r} + \frac{Y'^{(1)}}{3r^2} + \frac{Y'^{(2)}}{5r^3} + \text{etc.}\right);$$

En nommant donc V'' la somme des molécules de la partie du second sphéroïde qui se relève au-dessus du premier, et divisées par leurs distances respectives au point attiré, on aura

$$V' = V'' + 4\alpha\pi.\left(\frac{Y'^{(0)}}{r} + \frac{Y'^{(1)}}{3r^2} + \frac{Y'^{(2)}}{5r^3} + \text{etc.}\right);$$

L'équation precédente de l'équilibre deviendra donc,

$$\text{Constante} = \frac{4\pi}{3r} \cdot \int \rho . d . a^3 + 4\alpha\pi . \int \rho . d . \left(\frac{a^4 Y^{(1)}}{3r^2} + \frac{a^5 Y^{(2)}}{5r^3} + \frac{a^6 Y^{(3)}}{7r^4} + \text{etc.}\right);$$

$$+ 4\alpha\pi . \left(\frac{Y'^{(0)}}{r} + \frac{Y'^{(1)}}{3r^2} + \frac{Y'^{(2)}}{5r^3} + \text{etc.}\right); \quad (2)$$

$$+ V'' - \frac{\alpha\varphi}{2} . r^2 . \frac{4\pi}{3} . \int \rho . d . a^3 . \left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right);$$

r devant être supposé égal à $1 + \alpha\bar{y} + \alpha y'$, et par conséquent égal à l'unité dans les termes multipliés par α, puisqu'on néglige les termes de l'ordre α^2. Cette équation a cela de remarquable, savoir que la différentielle de son second membre, prise par rapport à r, et divisée par $-dr$, est l'expression de la pesanteur, comme il résulte du n° 33 du troisième livre de la Mécanique céleste. En nommant donc p, la pesanteur, on aura

$$p = \frac{4\pi}{3r^2} \cdot \int \rho . d . a^3 + 4\alpha\pi . \int \rho . d . \left(\frac{2a^4 Y^{(1)}}{3r^3} + \frac{3a^5 Y^{(2)}}{5r^4} + \text{etc.}\right);$$

$$+ 4\alpha\pi . \left(\frac{Y'^{(0)}}{r^2} + \frac{2Y'^{(1)}}{3r^3} + \frac{3Y'^{(2)}}{5r^4} + \text{etc.}\right); \quad (3)$$

$$- \left(\frac{dV''}{dr}\right) + \alpha\varphi . r . \frac{4\pi}{3} . \int \rho . d . a^3 . \left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right).$$

On a, par le n° 10 du troisième livre de la Mécanique céleste, à la surface de la mer,

$$0 = \left(\frac{dV''}{dr}\right) + \frac{1}{2} . V''; \quad (a)$$

Cette équation remarquable étant très-utile pour ce qui va suivre, je vais en rappeler ici la démonstration. Si l'on conçoit une sphère homogène du rayon a, et dont la densité soit exprimée par l'unité ; la somme de ses molécules divisées par leurs distances respectives à un point extérieur attiré dont r soit la distance à son centre, sera la masse de

la sphère divisée par r. En désignant donc par V cette somme, on aura

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{a^3}{r}.$$

Maintenant, si l'on imagine à la surface de la sphère, une molécule dm, sa distance au point attiré sera $\sqrt{r^2 - 2ar\cos.\gamma + a^2}$, γ étant l'angle compris entre le rayon r mené au point attiré, et le rayon a mené à la molécule dm; V, ou la somme des molécules divisées par leurs distances au point attiré, sera donc, relativement à cette molécule,

$$\frac{dm}{\sqrt{r^2 - 2ar.\cos.\gamma + a^2}};$$

et la valeur de $\left(\frac{dV}{dr}\right)$ sera

$$\frac{-dm.(r - a.\cos.\gamma)}{(r^2 - 2ar.\cos.\gamma + a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si le point attiré est à la surface de la sphère, on aura $r = a$, et alors $\left(\frac{dV}{dr}\right)$ devient

$$\frac{-dm}{2a.\sqrt{2a^2.(1 - \cos.\gamma)}},$$

ou $-\frac{V}{2a}$; ce qui donne

$$a.\left(\frac{dV}{dr}\right) + \frac{1}{2}V = 0; \quad (b)$$

et, comme cette équation a lieu pour chaque molécule d'un système de molécules disséminées à la surface de la sphère, elle aura lieu pour le système entier, en supposant V relatif à ce système.

Cette équation cesse d'avoir lieu, si l'on suppose la molécule dm très-près du point attiré, et très-peu élevée

au-dessus de la sphère, en sorte qu'en désignant par a' son rayon, la différence $r - a'$ soit fort petite. La fonction $a'\left(\frac{dV}{dr}\right) + \frac{1}{2}V$ étant égale à

$$\frac{(r-a')}{2} \cdot \int \frac{dm \cdot (r - a' - 2a' \cdot \cos.\gamma)}{(r^2 - 2a' r. \cos.\gamma + a'^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad (f)$$

cette intégrale, à cause de la grandeur de son diviseur, pourrait alors ne pas devenir insensible par la petitesse du facteur $r - a'$; mais on voit que si, près du point attiré, la molécule dm diminue comme le quarré $r^2 - 2a' r. \cos.\gamma + a'^2$, de la distance de ce point à cette molécule, alors l'intégrale (f) devient insensible, et l'équation (b) subsiste.

Si l'on conçoit maintenant un sphéroïde très-peu différent d'une sphère, et si l'on suppose le point attiré à sa surface, et à ce point, une sphère osculatrice d'un rayon a fort peu différent du rayon du sphéroïde; alors V désignant la somme des molécules de l'excès du sphéroïde sur la sphère, divisées par leurs distances au point attiré, l'intégrale (f) deviendra nulle; parce que les molécules dm de cet excès sont nulles au point de contact, et que, près de ce point, elles croissent comme le quarré de leur distance à ce point. L'équation (b) subsiste donc pour ce point. Relativement à la sphère, on a

$$a\left(\frac{dV}{dr}\right) + \frac{1}{2}V = -\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot \frac{a^3}{r};$$

en supposant donc V relatif au sphéroïde entier, on aura, pour le point situé à ce contact,

$$a\left(\frac{dV}{dr}\right) + \frac{1}{2}V = -\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot a^2: \quad (c)$$

c'est l'équation que j'ai donnée dans le n° 10 du troisième livre de la Mécanique céleste.

Ici, l'origine de r est fixée au centre de la sphère osculatrice du rayon a. Fixons cette origine à un point quelconque très-proche du centre de gravité du sphéroïde, et désignons par $a.(1+\alpha y)$ le rayon du sphéroïde, α étant un très-petit coëfficient. L'attraction du sphéroïde, décomposée vers l'origine des r, est $-\left(\frac{dV}{dr}\right)$; et il est facile de voir qu'elle est la même, aux quantités près, de l'ordre α^2, quelle que soit cette origine, pourvu qu'elle ne s'écarte du centre de gravité du sphéroïde, que d'une quantité de l'ordre α; puisque ces attractions partielles sont les résultantes de l'attraction totale composée avec des forces de l'ordre α, qui lui sont perpendiculaires. Ainsi l'équation précédente (c) subsiste, en fixant l'origine des r à un point quelconque pris très-près du centre de gravité.

Telle est la démonstration que j'ai donnée de cette équation dans l'endroit cité de la Mécanique céleste. Quelques géomètres ne l'ayant pas bien saisie, l'ont jugée inexacte. Lagrange, dans le tome VIII du Journal de l'École polytechnique, a démontré cette équation par une analyse à-peu-près semblable à celle qui me l'avait fait découvrir. (*Mémoires de l'Académie des sciences,* année 1775, pag. 83.) C'est pour simplifier cette matière, que j'ai préféré de donner, dans la Mécanique céleste, la démonstration précédente.

Si le point attiré est élevé d'une quantité $\alpha a y'$ au-dessus du sphéroïde, V étant de la forme $\frac{4}{3}\pi.\frac{a^3}{r}+\alpha Q$, il ne variera par ce déplacement du point, et en négligeant les quantités de l'ordre α^2, que de la quantité $-\frac{4}{3}\pi.a^2.\alpha y'$: la différence partielle $a\left(\frac{dV}{dr}\right)$, variera de la quantité $\frac{8}{3}\pi.a^2.\alpha y'$. La va-

variation du premier membre de l'équation (c) sera donc $2\pi.a^2.\alpha y$, et cette équation deviendra

$$a\left(\frac{dV}{dr}\right)+\frac{1}{2}.V=-\frac{2a^2\pi}{3}+2a^2\pi.\alpha y'.$$

Mais l'équation (a) subsistera toujours, malgré ce déplacement du point attiré, parce que V'' étant de l'ordre α, ce déplacement ne peut y produire que des termes de l'ordre α^2.

Cela posé, si l'on substitue dans les équations (2) et (3), $1+\alpha\bar{y}+\alpha y'$ au lieu de r; elles deviendront, en négligeant les termes de α^2,

$$Constante=\alpha\bar{y}+\alpha y'-\frac{3\alpha}{\int\rho.d.a^3}.\int\rho.d.\left(\frac{a^4Y^{(1)}}{3}+\frac{a^5Y^{(2)}}{5}+\frac{a^6Y^{(3)}}{7}+\text{etc.}\right)$$
$$-\frac{3\alpha}{\int\rho.d.a^3}.\left(Y'^{(0)}+\frac{Y'^{(1)}}{3}+\frac{Y'^{(2)}}{5}+\text{etc.}\right);\quad(4)$$
$$-\frac{V''}{\frac{4}{3}\pi.\int\rho.d.a^3}+\frac{\alpha\varphi}{2}.\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right);$$

$$p=\frac{4}{3}\pi.\int\rho.d.a^3.\left(1-2\alpha\bar{y}-2\alpha y'\right)+4\alpha\pi.\int\rho.d.\left(\frac{2a^4Y^{(1)}}{3}+\frac{3a^5Y^{(2)}}{5}+\frac{4a^6Y^{(3)}}{7}+\text{etc.}\right)$$
$$+4a\pi.\left(Y'^{(0)}+\frac{2Y'^{(1)}}{3}+\frac{3Y'^{(2)}}{5}+\frac{4Y'^{(3)}}{7}+\text{etc.}\right),$$
$$+\frac{1}{2}V''+\frac{4\pi}{3}.\int\rho.d.a^3.\alpha\varphi.\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right);\quad(5)$$

Si l'on ajoute cette dernière équation à la précédente multipliée par $\frac{2}{3}\pi.\int\rho.d.a^3$, on aura

$$p=Const.-2\pi.\alpha.\left(\bar{y}+y'\right).\int\rho.d.a^3$$
$$+2\alpha\pi.\int\rho.d.\left(a^4Y^{(1)}+a^5Y^{(2)}+a^6Y^{(3)}+\text{etc.}\right),$$
$$+2\alpha\pi.y'+\frac{4}{3}\pi.\int\rho.d.a^3.\frac{5}{4}\alpha\varphi.\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right)\quad(6)$$

Si l'on suppose la terre homogène, ou ρ constant, on aura

$$p = Const. - 2\alpha\pi.\left(\rho - 1\right).y' + \frac{4}{3}\pi\rho.\frac{5}{4}\alpha\varphi.\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right);$$

où l'on doit observer que $\frac{4}{3}\pi\rho$ est à très-peu-près la pesanteur à l'équateur. On a donc, dans le cas de $\rho = 1$, ce qui donne à la mer la densité du sphéroïde terrestre,

$$p = \text{P}.\left(1 + \frac{5}{4}\alpha\varphi.\mu^2\right);$$

P étant la pesanteur à l'équateur.

Cette valeur de p subsisterait encore dans le cas où des plateaux d'une densité quelconque et de hautes montagnes recouvriraient les continens. Ces corps ajouteraient à l'équation (1) un terme V''', qui serait la somme de leurs molécules divisées par leurs distances respectives au point attiré. En supposant ce point à la surface de la mer, on aurait

$$\left(\frac{dV'''}{dr}\right) + \frac{1}{2}V''' = 0 :$$

Ainsi V'' disparaîtrait de l'expression de p, par le même procédé qui a fait disparaître V'' de cette expression qui se réduirait ainsi à la précédente ; le terme V''' changerait donc la figure de la mer, sans altérer la loi de la pesanteur.

II. Pour déterminer la figure de la mer, lorsque celle du sphéroïde terrestre est donnée ; la méthode la plus simple consiste à ordonner les approximations suivant les puissances du rapport de la densité de la mer à la moyenne densité de la terre, rapport égal à $\frac{1}{5}$, à fort-peu-près. Nous allons donc considérer d'abord la figure de la mer, en négligeant

ce rapport, ou en supposant la mer, un fluide infiniment rare. Cela revient à négliger les termes qui ont pour dénominateur $\frac{4}{3}\pi.\int\rho.d.a^3$, et qui n'ont pas ρ au numérateur, dans l'équation (4) qui donne alors, en ne négligeant, pour plus d'exactitude, que le terme dépendant de V'',

$$\alpha y' = \text{Const.} - \alpha\bar{y} + \frac{3\alpha}{\int\rho.d.a^3}.\int\rho.d.\left(\frac{a^4 Y^{(1)}}{3} + \frac{a^5 Y^{(2)}}{5} + \frac{a^6 Y^{(3)}}{7} + \text{etc.}\right),$$

$$+ \frac{3\alpha}{\int\rho.d.a^3}.\left(\frac{Y'^{(1)}}{3} + \frac{Y'^{(2)}}{5} + \text{etc.}\right),$$

$$-\frac{\alpha\varphi}{2}.\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right).$$

En substituant pour y' et $\bar{y}$, leurs valeurs $Y'^{(0)} + Y'^{(1)} + \text{etc}$, $\bar{Y}^{(1)} + \bar{Y}^{(2)} + \text{etc}$, et comparant les termes semblables ; on aura généralement

$$Y'^{(i)}.\left(1 - \frac{3}{\overline{2i+1}.\int\rho.d.a^3}\right) = -\bar{Y}^{(i)} + \frac{3.\int\rho.d.(a^{i+3}.Y^{(i)})}{(2i+1).\int\rho.d.a^3}.$$

Dans le cas de $i=2$, il faut ajouter au second membre de cette équation, le terme $-\frac{\alpha\varphi}{2}.\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right)$. L'équation (6), dans laquelle rien n'est négligé, donnera ensuite la pesanteur p à la surface de la mer.

Les expériences du pendule font voir que $Y^{(3)}$, $Y^{(4)}$, etc, $\bar{Y}^{(3)}$, $\bar{Y}^{(4)}$, sont des quantités très-petites relativement à $Y^{(2)}$ et $\bar{Y}^{(2)}$, et que ces deux dernières fonctions se réduisent à fort-peu-près aux suivantes, $-h.\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right)$, et $-\bar{h}.\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right)$, h et $\bar{h}$ étant des constantes; ce qui donne aux couches du sphéroïde terrestre, la figure d'un ellipsoïde de révolution.

Examinons donc ce cas particulièrement. L'expression précédente donne alors

$$Y'^{(2)}.\left(1-\frac{3}{5.\int\rho.d.a^3}\right)=\left(\bar{h}-\frac{3\int\rho.d\,(a^5h)}{5.\int\rho.d.a^3}-\frac{\varphi}{2}\right).\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right);$$

En faisant donc h' égal à

$$\frac{-\bar{h}+\frac{3.\int\rho.d\,(a^5h)}{5.\int\rho.d.a^3}+\frac{\varphi}{2}}{1-\frac{3}{5.\int\rho.d.a^3}},$$

on aura $$\alpha y'=\alpha l-\alpha h'.\mu^2,$$

l étant une constante. h' serait nul si, en supposant la mer anéantie, la surface du sphéroïde, supposée fluide, était en équilibre. En supposant donc cette surface moins aplatie que dans ce cas, h' sera positif, et la mer recouvrira l'équateur du sphéroïde. Sa profondeur sera $\alpha l-\alpha h'\mu^2$: elle s'étendra vers les deux pôles, à des latitudes égales. Soit ε le sinus de ces latitudes; la profondeur de la mer étant nulle à ces points, on aura

$$\alpha l=\alpha h'.\varepsilon^2;$$

et en fixant l'origine des rayons terrestres au centre de gravité du sphéroïde, ce qui rend $Y^{(1)}$ nul, la profondeur de la mer sera

$$\alpha h'.(\varepsilon^2-\mu^2);$$

la masse de la mer sera $\frac{8}{3}\alpha\pi h'\varepsilon^3$. Cette masse étant donnée, fera donc connaître ε. L'équation (6), combinée avec l'ex-

pression précédente de h', donnera pour l'expression de la pesanteur à la surface de la mer,

$$P.\left(1+\left(\frac{5}{2}\alpha\varphi-\alpha.(\bar{h}+h')\right).\mu^2\right),$$

P étant la pesanteur à l'équateur, qui est, aux quantités près de l'ordre α, égale à $\frac{4}{3}\pi.\int\rho.d.a^3$.

Si la surface du sphéroïde a un aplatissement plus grand que celui qui convient à son équilibre, en la supposant fluide, et qui résulte de l'égalité à zéro du numérateur de l'expression de h'; h' devient négatif, et la mer ne peut plus recouvrir l'équateur. Alors elle se portera vers les deux pôles, et elle formera deux mers distinctes, dont les masses pourront être dans un rapport quelconque. En faisant $h'=-g$, g étant positif, la profondeur de la mer boréale sera, en supposant que μ et ε se rapportent à cette mer,

$$\alpha g.(\mu^2-\varepsilon^2).$$

La profondeur de la mer située vers le pôle austral sera

$$\alpha.g.(\mu'^2-\varepsilon'^2),$$

μ' exprimant le sinus de la latitude australe. Les masses des deux mers seront, respectivement,

$$\frac{2\alpha\pi.g.}{3}\left(1-\varepsilon\right)^2.\left(1+2\varepsilon\right);\quad \frac{2\alpha\pi.g.}{3}\left(1-\varepsilon'\right)^2.\left(1+2\varepsilon'\right).$$

Leur somme étant donnée, on voit qu'elle peut se partager d'une infinité de manières. La pesanteur, à la surface de la mer boréale, sera

$$P'+\left(\frac{5}{2}\alpha\varphi-\alpha(\bar{h}-g)\right).P.\mu^2,$$

P étant la pesanteur à la surface et au pôle du sphéroïde. Au pôle et à la surface de la mer, la pesanteur est égale à $P.\left(1-2\alpha g(1-\varepsilon^2)\right)$, $\alpha g(1-\varepsilon^2)$ étant à ce point la profondeur de la mer; on a donc

$$P'=P.\left(1-2\alpha g.(1-\varepsilon^2)-\frac{5}{2}\alpha\varphi+\alpha(\bar{h}-g)\right).$$

La pesanteur à un point quelconque de la surface de cette mer, sera donc

$$P.\left(1-2\alpha g.(1-\varepsilon^2)-\left(\frac{5}{2}\alpha\varphi-\alpha(\bar{h}-g)\right).(1-\mu^2)\right).$$

A la surface de la mer australe, la pesanteur sera

$$P.\left(1-2\alpha g.(1-\varepsilon'^2)-\left(\frac{5}{2}\alpha\varphi-\alpha(\bar{h}-g)\right).(1-\mu'^2)\right).$$

Pour avoir une seconde approximation, il faut déterminer la valeur analytique du terme $\frac{V''}{\frac{4}{3}\pi.\int\rho.d.a^3}$, de l'équation (4), pour l'ajouter à la première valeur approchée de $\alpha y'$: or on a,

$$V''=\alpha.\int\frac{y_{,}.d\mu'.d\omega'}{\sqrt{2.(1-cos.\gamma)}}; \qquad (o)$$

$-y_{,}$ étant ce que devient l'expression trouvée par une première approximation pour y', et dans laquelle on change μ en μ', μ' et ω' étant relatifs au point attirant, tandis que μ et ω se rapportent au point attiré. γ est l'angle compris entre les rayons terrestres menés à ces deux points, en sorte que l'on a

$$Cos.\gamma=\mu\mu'+\sqrt{1-\mu^2}.\sqrt{1-\mu'^2}.Cos.(\omega'-\omega):$$

l'intégrale précédente est relative à toute la surface des conti-

nens. Développons le radical

$$\frac{1}{\sqrt{r^2-2r.\cos.\gamma+1}},$$

suivant les puissances de $\frac{1}{r}$. En nommant $P^{(i)}$ le coëfficient de $\frac{1}{r^{i+1}}$ dans ce développement, on aura par le n° 23 du troisième livre de la Mécanique céleste, en faisant $\cos.\gamma=\lambda$,

$$P^{(i)}=\frac{1.3.5...\overline{2i-1}}{1.2.3...i}.\left(\lambda^i-\frac{i.\overline{i-1}}{2.\overline{2i-1}}.\lambda^{i-2}+\frac{i.\overline{i-1}.\overline{i-2}.\overline{i-3}}{2.4.\overline{2i-1}.\overline{2i-3}}.\lambda^{i-4}-\text{etc.}\right).$$

Si l'on fait $\frac{1}{r}=x$, ce coëfficient sera celui de x^i, dans le développement de la fonction $\left(1-2x.\lambda+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, fonction que l'on peut mettre sous cette forme

$$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}.\sqrt{1+\frac{(x-\lambda)^2}{1-\lambda^2}}}.$$

Le coëfficient de x^i dans le développement de

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(x-\lambda)^2}{1-\lambda^2}}},$$

est égal à

$$\frac{\frac{d^i}{dx^i}.\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(x-\lambda)^2}{1-\lambda^2}}}}{1.2.3...i},$$

en faisant $x=o$ après les différentiations. J'ai fait voir dans le n° 38 du livre I[er] de ma Théorie des probabilités, que l'on a

$$\frac{d^i.\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}}{d\zeta^i}=\frac{1}{\pi(1-\zeta^2)^{i+\frac{1}{2}}}.\frac{\int d\omega.(\zeta+\cos.\omega)^i}{1.2.3...},$$

l'intégrale étant prise depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \pi$. En faisant donc

$$\frac{x - \lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} = \zeta . \sqrt{-1};$$

on aura

$$\frac{d^i . \frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda x + x^2}}}{1.2.3 \ldots i . dx^i} = \frac{1}{\pi . (\sqrt{-1})^i} . \int d\omega . \left(\lambda\sqrt{-1} + \sqrt{1 - \lambda^2} . \cos . \omega\right)^i .$$

L'intégrale précédente est égale à cette même intégrale prise depuis ω nul jusqu'à $\omega = \frac{\pi}{2}$, plus à l'intégrale

$$\int d\omega' . \left(\lambda\sqrt{-1} - \sqrt{1 - \lambda^2} . \cos . \omega'\right)^i,$$

prise dans les mêmes limites ; comme il est facile de s'en assurer en changeant ω en $\pi - \omega'$, au-delà de $\omega = \frac{\pi}{2}$. Soit donc $\gamma = \frac{\pi}{2} - \gamma'$; ce qui donne $\lambda = \sin . \gamma'$: on aura

$$\frac{d^i . \frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda x + x^2}}}{1.2.3 \ldots i . dx^i} = \frac{1}{\pi . (\sqrt{-1})^i} . \int d\omega . \left(\begin{array}{l} (\sqrt{-1} . \sin . \gamma' + \cos . \gamma' \cos . \omega)^i \\ + (\sqrt{-1} . \sin . \gamma' - \cos . \gamma' \cos . \omega)^i \end{array}\right),$$

l'intégrale étant prise depuis ω nul, jusqu'à $\omega = \frac{\pi}{2}$. On peut mettre le second membre de cette équation, sous cette forme,

$$\frac{1}{\pi . (\sqrt{-1})^i} . \int d\omega . \left\{ \begin{array}{l} (\cos . i\gamma' + \sqrt{-1} . \sin . i\gamma') . \\ \quad \left(1 - 2 . (\cos . \gamma' - \sqrt{-1} . \sin . \gamma') . \cos . \gamma' . \sin^2 . \tfrac{1}{2}\omega\right)^i \\ + (-1)^i . (\cos . i\gamma' - \sqrt{-1} . \sin . i\gamma') . \\ \quad \left(1 - 2 . (\cos . \gamma' + \sqrt{-1} . \sin . \gamma') . \cos . \gamma' . \sin^2 . \tfrac{1}{2}\omega\right)^i \end{array} \right\} . \qquad (q)$$

On a généralement :

$$(1 - q)^i = c^{-i . \log . (1 - q)} = c^{-iq . \left(1 + \frac{q}{2} + \frac{q^2}{3} + \text{etc.}\right)},$$

c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. i étant infini, cette exponentielle est nulle, ou se réduit à c^{-iq} : en effet, lorsqu'elle n'est pas nulle, iq est une quantité finie, ou infiniment petite, que nous désignerons par q'; alors cette exponentielle devient

$$c^{-q'} \cdot c^{-\frac{q'^2}{2i}-\frac{q'^3}{3i^2}-\text{etc.}},$$

ou $c^{-q'}$; le facteur $c^{-\frac{q'^2}{2i}-\frac{q'^3}{3i^2}-\text{etc.}}$ devenant l'unité, parce que son exposant est infiniment petit.

Il suit de là que i étant un grand nombre, on peut supposer dans l'intégrale précédente,

$$\left(1-2.\ (\cos.\gamma'-\sqrt{-1}.\ \sin.\gamma').\ \cos.\gamma'.\sin.^2\tfrac{1}{2}\omega\right)^i$$
$$=c^{-2i.\cos.\gamma'.\ (\cos.\gamma'-\sqrt{-1}.\sin.\gamma').\ \sin.^2\frac{1}{2}\omega},$$
$$\left(1-2.\ (\cos.\gamma'+\sqrt{-1}.\ \sin.\gamma').\ \cos.\gamma'.\sin.^2\tfrac{1}{2}\omega\right)^i$$
$$=c^{-2i.\cos.\gamma'.\ (\cos.\gamma'+\sqrt{-1}.\sin.\gamma').\ \sin.^2\frac{1}{2}\omega};$$

d'où il est facile de conclure que la fonction (q), dans le cas de i, un nombre pair et très-considérable, devient

$$\frac{2}{\pi.(-1)^{\frac{i}{2}}}.\int d\omega.c^{-2i.\cos.^2\gamma'.\sin.^2\frac{1}{2}\omega}.\cos.(i\gamma'+2i.\sin.\gamma'.\cos.\gamma'.\sin.^2\tfrac{1}{2}\omega),$$

et que dans le cas de i impair, cette fonction devient

$$\frac{2}{\pi.(-1)^{\frac{i-1}{2}}}.\int d\omega.c^{-2i.\cos.^2\gamma'.\sin.^2\frac{1}{2}\omega}.\sin.(i\gamma'+2i.\sin.\gamma'.\cos.\gamma'\sin.^2\tfrac{1}{2}\omega).$$

Si l'on a $\lambda=1$, ce qui donne $\gamma'=\frac{\pi}{2}$, ces deux quantités

se réduisent à l'unité, comme cela doit être : car alors $\sqrt{1-2\lambda x+x^2}$ devient $1-x$, et l'on a, en faisant x nul après les différentiations,

$$\frac{d^i.\frac{1}{1-x}}{1.1.3\ldots i.dx^i}=1=P^{(i)}.$$

Mais, quelque petit que l'on suppose $\sqrt{1-\lambda^2}$, ou $cos.\gamma'$, on peut toujours supposer i assez grand pour que $2i.cos.^2\gamma'$ soit fort grand; et alors on a, à-fort-peu-près, l'intégrale

$$\int d\omega.\ c^{-2i.cos.^2\gamma'.sin.^2\frac{1}{2}\omega\pm 2i.sin.\gamma.cos.\gamma'.sin.^2\frac{1}{2}\omega},$$

égale à cette même intégrale dans laquelle on change $sin.^2\frac{1}{2}\omega^2$, dans $\frac{1}{4}\omega^2$, et que l'on prend depuis ω nul jusqu'à ω infini. Il est facile d'en conclure que, dans le cas de i pair, on a, lorsque i est un très-grand nombre,

$$P^{(i)}=\frac{2.(-1)^{\frac{i}{2}}.cos.(i+\frac{1}{2}).\gamma'}{\sqrt{2i\pi}.(1-\lambda^2)^{\frac{1}{4}}};$$

et dans le cas de i impair et très-grand, on a

$$P^{(i)}=\frac{2.(-1)^{\frac{i-1}{2}}.sin.(i+\frac{1}{2}).\gamma'}{\sqrt{2i\pi}.(1-\lambda^2)^{\frac{1}{4}}}.$$

Pour peu que λ soit moindre que l'unité, on peut supposer i assez grand pour que ces expressions de $P^{(i)}$ soient fort approchées : elles deviennent exactes, lorsque i est infini.

Considérons maintenant l'intégrale $\alpha.\int\frac{y_1.d\mu'.d\omega'}{\sqrt{r^2-2\lambda r+1}}$, qui devient V'', ou l'intégrale (o), lorsqu'on suppose $r=1$. Cette intégrale développée par rapport aux puissances de $\frac{1}{r}$, de-

vient, en ne considérant que la puissance $\frac{1}{r^{i+1}}$, i étant un nombre pair,

$$\frac{2.(-1)^{\frac{i}{2}}}{\sqrt{2i\pi}}.\int \alpha.\frac{y_1 d\mu'.d\omega'.\cos.(i+\frac{1}{2})\gamma'}{(1-\lambda^2)^{\frac{1}{4}}}.$$

En intégrant cette fonction, par rapport à μ', on a

$$\frac{2.(-1)^{\frac{i}{2}}}{(i+\frac{1}{2}).\sqrt{2i\pi}}.\int \alpha.\frac{y_1 d\omega'.\sin.(i+\frac{1}{2}).\gamma'.\left(\frac{d\mu'}{d\gamma'}\right)}{(1-\lambda^2)^{\frac{1}{4}}},$$

$$-\frac{2.(-1)^{\frac{i}{2}}}{(i+\frac{1}{2}).\sqrt{2i\pi}}.\int \alpha.\,d\omega'.\sin.\,(i+\tfrac{1}{2})\gamma'.\frac{d}{d\mu'}.\left(\frac{y_1\left(\frac{d\mu'}{d\gamma}\right)}{(1-\lambda^2)^{\frac{1}{4}}}\right).$$

Si i est un nombre impair, il suffit de changer dans cette expression, le sinus en $-$cosinus, et $(-1)^{\frac{i}{2}}$ dans $(-1)^{\frac{i-1}{2}}$. On voit ainsi que, quel que soit y_1, on arrivera toujours, par le développement du radical, suivant les puissances de $\frac{1}{r}$, à une série convergente et finie, à cause du diviseur $\frac{1}{(i+\frac{1}{2})\sqrt{2i\pi}}$.

Or $P^{(i)}$ étant le coëfficient de $\frac{1}{r^{i+1}}$ dans ce développement, on a, par le n° 15 du troisième livre de la Mécanique céleste,

$$P^{(i)}=2.\left(\frac{1.3.5\ldots\overline{2i-1}}{1.2.3\ldots i}\right)^2.$$

$$\Sigma.\left\{\frac{i.\overline{i-1}.\overline{i-2}\ldots\overline{i-n+1}}{\overline{i+1}.\overline{i+2}\ldots\overline{i+n}}.(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.\left(\mu^{i-n}-\frac{(i-n).\overline{i-n-1}}{2.\overline{2i-1}}.\mu^{i-n-2}+\text{etc.}\right)\right.$$

$$\left.\times(1-\mu'^2)^{\frac{n}{2}}.\left(\mu'^{i-n}-\frac{\overline{i-n}.\overline{i-n-1}}{2.\overline{2i-1}}.\mu'^{i-n-2}+\text{etc.}\right).\cos.n(\omega'-\omega)\right\};$$

le signe Σ comprenant toutes les valeurs de la fonction qu'il enveloppe, depuis $n=0$, jusqu'à $n=i$. Dans le cas de $n=0$,

il ne faut prendre que la moitié de cette fonction. La première approximation nous a donné y' sous cette forme,

$$Y'^{(0)} + Y'^{(1)} + Y'^{(2)} + \text{etc.}$$

En la prenant négativement, et en y changeant μ en μ', on aura la valeur de y_1, qui, substituée dans l'intégrale

$$\int \frac{\alpha y_1 . d\mu' . d\varpi'}{\sqrt{r^2 - 2r\lambda + 1}},$$

développée par rapport aux puisssances de $\frac{1}{r}$, donne, par une série fort convergente, cette intégrale, et par conséquent la valeur de V''. On aura ainsi, au moyen de l'équation (4), une seconde approximation de $\alpha y'$, et au moyen de l'équation (6), une seconde approximation de la pesanteur p. Ces approximations seront suffisantes, vu le peu de densité de la mer, et son peu de profondeur, comme on le verra bientôt.

III. Considérons présentement les phénomènes de la pesanteur et de la variation des degrés, à la surface des continens, ou du sphéroïde terrestre. Ces phénomènes sont, en effet, les seuls de ce genre que nous puissions observer. Pour en avoir l'expression analytique, imaginons une atmosphère infiniment rare, très-peu élevée, mais qui cependant embrasse toute la terre. Soit $\alpha y''$ l'élévation d'un de ses points au-dessus de la surface du sphéroïde terrestre. L'équation (1) du n° I, qui détermine la figure de la mer, déterminera la partie de la figure de l'atmosphère qui s'élève au-dessus de la mer : car il est clair que la valeur de V' étant de l'ordre α, est, aux quantités près de l'ordre α^2, la même à ces deux surfaces; mais, relativement à la surface de la mer, r doit être

changé dans $1+\alpha y'+\alpha\bar{y}$, et relativement à la surface de l'atmosphère, il doit être changé dans $1+\alpha y''+\alpha\bar{y}$. Cela posé, si l'on retranche ces deux équations l'une de l'autre, on aura

$$\alpha y''-\alpha y'=constante:$$

ainsi, tous les points de la surface de l'atmosphère, qui correspondent à celle de la mer, sont également élevés au-dessus de cette dernière surface; en sorte que ces deux surfaces sont semblables, à-très-peu-près.

Si l'on nomme p' la pesanteur à la surface de l'atmosphère, il est facile de voir que sa valeur sera donnée par l'équation (3), en y substituant pour r, $1+\alpha y''+\alpha y$; tandis que, pour avoir la valeur de p relative à la surface de la mer, il faut changer r dans $1+\alpha y'+\alpha\bar{y}$: en retranchant ces deux valeurs, l'une de l'autre, et observant que $\alpha y''-\alpha y'$ est par ce qui précède, une quantité constante que nous désignerons par αl, on aura

$$p'=p-2\mathrm{P}.\alpha l;$$

P étant la pesanteur à l'équateur : ainsi la loi de la pesanteur est la même aux deux surfaces. On a vu dans le n° I, que, dans le cas du sphéroïde terrestre homogène et de même densité que la mer, on a

$$p=\mathrm{P}.\left(1+\tfrac{5}{4}\alpha\varphi\mu^2\right);$$

on a donc alors

$$p'=\mathrm{P}.\left(1-2\alpha l+\tfrac{5}{4}\alpha\varphi.\mu^2\right).$$

Pour avoir l'équation de la surface de l'atmosphère au-dessus des continens, nous nommerons V_1 la somme des mo-

lécules de la mer, divisées par leurs distances respectives à un point de cette surface; alors l'équation (1) du nº I deviendra celle de cette surface, en y changeant V' en V_1, et en y substituant $1+\alpha y''+\alpha\bar{y}$ pour r. Or on a

$$V'=\int\frac{\alpha y'.d\mu'.d\omega'}{\sqrt{r^2-2r.\cos.\gamma+1}},$$

l'intégrale étant prise pour toutes les valeurs de μ' et de ω', relatives à l'étendue de la mer, r devant être supposé égal à l'unité, et $\cos.\gamma$ étant

$$\mu\mu'+\sqrt{1-\mu^2}.\sqrt{1-\mu'^2}.\cos.(\omega'-\omega).$$

En développant le radical, relativement aux puissances de $\frac{1}{r}$, on voit par ce qui précède, que V' est composé des termes de la forme

$$\beta.(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.$$
$$\left(\mu^{i-n}-\text{etc.}\right).\int y'd\mu'.d\omega'.\cos.n.(\omega'-\omega).\left(1-\mu'^2\right)^{\frac{n}{2}}\left(\mu'^{i-n}-\text{etc.}\right).$$

La valeur de V_1 se compose exactement des mêmes termes; on a donc

$$V'=V_1.$$

Cela posé, si l'on retranche l'une de l'autre, les équations relatives aux deux surfaces, on aura

$$\alpha y''=const.+\alpha y',$$

pourvu que les coordonnées μ et ω, de la fonction y' se rapportent au point de la surface de l'atmosphère que nous considérons.

Pour avoir l'expression de la pesanteur, il faut changer

dans l'équation (1), V' dans V_1; mais on ne peut pas supposer

$$\left(\frac{dV'}{dr}\right)=\left(\frac{dV_1}{dr}\right),$$

à cause de la grandeur que le radical acquiert, lorsque $cos.\,\gamma=1$, dans la fonction $\left(\frac{dV'}{dr}\right)$. Pour avoir la valeur de $\left(\frac{dV'}{dr}\right)$, nous observerons qu'elle égale, par ce qui précède,

$$\left(\frac{dV''}{dr}\right)-4\alpha\pi.\left(Y'^{(0)}+2.\frac{Y'^{(1)}}{3}+3.\frac{Y'^{(2)}}{5}+\text{etc.}\right);$$

ce qui donne

$$\left(\frac{dV'}{dr}\right)+\frac{1}{2}V'=\left(\frac{dV''}{dr}\right)+\frac{1}{2}V''-2\alpha\pi.y'.$$

Mais on a $\left(\frac{dV''}{dr}\right)+\frac{1}{2}V''=0$; on a donc

$$\left(\frac{dV'}{dr}\right)=-\frac{1}{2}V'-2\alpha\pi.y'.$$

Le second membre de l'équation (1), différencié par rapport à r, et divisé par $-dr$, donne la valeur de p, en y faisant $r=1+\alpha\bar{y}+\alpha y'$. Il donne la valeur de la pesanteur p' à la surface de l'atmosphère, en le différenciant de la même manière, et en y changeant r en $1+\alpha\bar{y}+\alpha y''$, et V' en V_1. Si l'on retranche ensuite cette valeur de p' de celle de p; si l'on substitue, au lieu de $\left(\frac{dV'}{dr}\right)$ et de $\left(\frac{dV_1}{dr}\right)$, leurs valeurs $-\frac{1}{2}V'-2\alpha\pi.y'$, et $-\frac{1}{2}V_1$; et si l'on observe que $V'=V_1$, et que $\alpha y''-\alpha y'$ est constant; on aura

$$p'=const.+p-2\alpha\pi.y',$$

p étant la valeur de p déterminée précédemment, et dans

laquelle on substitue pour μ et ω, les valeurs relatives au point de la surface de l'atmosphère que l'on considère.

A la surface du sphéroïde, la pesanteur p' est augmentée dans le rapport de l'unité à $1+2\alpha y''$; en nommant donc p'' la pesanteur à cette surface, on aura

$$p''=const.+2P.\alpha y''-2\alpha\pi.y'+p.$$

En substituant au lieu de p sa valeur donnée par l'équation (6), et observant que $\alpha y''-\alpha y'$ est une quantité constante, et que $P=\frac{4}{3}\pi.\int\rho.d.a^3$, il est facile de conclure

$$p''=const.-\tfrac{1}{2}P.(\alpha l-\alpha y'')+2\alpha\pi.\bar{y}.\int d\rho.a^3$$
$$-2\alpha\pi.\int d\rho.\left(a^4Y^{(1)}+a^5Y^{(2)}+a^6Y^{(3)}+\text{ etc.}\right)$$
$$+\tfrac{5}{4}\alpha\varphi.P.\mu^2; \qquad (7)$$

αl étant la hauteur de l'atmosphère supposée, au-dessus du niveau de la mer; en sorte que $\alpha l-\alpha y''$ est la hauteur du point du sphéroïde, correspondant à p'', au-dessus de ce niveau, hauteur que l'on peut déterminer au moyen du baromètre.

Cette équation peut se déduire directement de l'équation de l'équilibre au-dessus de la surface des continens, en observant que cette équation est donnée par l'équation (1), en y changeant V' en V_1; V_1 représentant ici la somme des molécules de la mer, divisées par leurs distances respectives au point de l'atmosphère que l'on considère, et en substituant pour r, $1+\alpha\bar{y}+\alpha y''$. On peut supposer, pour plus de généralité, que V_1 comprend encore la somme semblable relative aux montagnes et même aux cavités de la surface du

sphéroïde terrestre, en observant que, par rapport à ces cavités, V_1 devient une quantité négative. La pesanteur p' sera donnée par la différentielle du second membre de l'équation (1), prise par rapport à r, et divisée par $-dr$, en y supposant $r = 1 + \alpha\bar{y} + \alpha y''$, et en y changeant V' en V_1. Si l'on en retranche l'équation (1) multipliée par $\frac{1}{2}$, et si l'on observe que l'on a

$$\left(\frac{dV_1}{dr}\right) + \frac{1}{2}V_1 = 0;$$

on aura

$$p' = Const. - 2\alpha\pi.\,(\bar{y} + y'').\int \rho.\,d.a^3$$
$$+ 2\alpha\pi.\int \rho.\,d\,(a^4 Y^{(1)} + a^5 Y^{(2)} + a^6 Y^{(3)} + \text{etc.})$$
$$+ \frac{5}{4}\alpha\varphi.\,P.\,\mu^2.$$

Si l'on substitue au lieu de p' sa valeur $\frac{p''}{1 + 2\alpha y''}$, ou, à-fort-peu-près, $p'' - 2\alpha P.y''$; on aura l'expression précédente de p'', expression qui, comme l'on voit, embrasse les attractions des montagnes, et généralement tous les effets des irrégularités du sphéroïde terrestre, pourvu que le point attiré en soit éloigné : car cette condition est nécessaire à l'existence de l'équation

$$0 = \left(\frac{dV_1}{dr}\right) + \frac{1}{2}V_1,$$

qui fait disparaître ces effets.

Si le sphéroïde terrestre était homogène, $d\rho$ serait nul, et l'on aurait

$$p'' = P.\left(1 - \frac{1}{2}(\alpha l - \alpha y'') + \frac{5}{4}\alpha\varphi.\mu^2\right),$$

P étant ici la pesanteur à l'équateur, au niveau de la mer.

On peut, au moyen de cette équation, vérifier l'hypothèse de cette homogénéité : car alors, en ajoutant à toutes les valeurs de p'', observées au moyen du pendule, la quantité $\frac{1}{2}\cdot P.(\alpha l - \alpha y'')$; l'expression de la pesanteur ainsi corrigée, deviendrait $P.\left(1+\frac{5}{4}\alpha\varphi.\mu^2\right)$. Ainsi l'accroissement de la pesanteur serait $\frac{5}{4}\cdot\alpha\varphi.P.\mu^2$. Or on a $\frac{5}{4}\alpha\varphi = 0{,}004325$; cet accroissement serait donc $0{,}004325.P.\mu^2$. Les expériences multipliées du pendule dans les deux hémisphères indiquent un accroissement proportionnel à μ^2, ou au quarré du sinus de la latitude; mais elles donnent à μ^2 un coëfficient plus grand que le précédent, et à-fort-peu-près égal à $0{,}0054.P$. L'hypothèse de l'homogénéité du sphéroïde terrestre est donc exclue par ces expériences : on voit même que l'hétérogénéité de ses couches doit s'étendre depuis sa surface, fort au-delà des quantités de l'ordre α, ou de l'aplatissement de la terre, afin que la quantité $-2\alpha\pi.\int d\rho.(a^4 Y^{(1)} + a^5 Y^{(2)} + \text{etc},)$ soit de l'ordre α, et devienne égale à

$$(0{,}0054.P - 0{,}004325.P).\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right).$$

IV. Comparons maintenant l'analyse aux observations. L'équation (1) donne à la surface de l'atmosphère, au-dessus des continens,

$$\alpha\bar{y} + \alpha y'').\frac{4}{3}\pi.\int\rho.d.a^3 = const. + 4\alpha\pi.\int\rho.d\left(\frac{a^4 Y^{(1)}}{3} + \frac{a^5 Y^{(2)}}{5} + \text{etc.}\right)$$
$$+ V_1 - \frac{1}{2}\alpha\varphi.\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Elle donne ensuite, en observant que $\left(\frac{dV_1}{dr}\right) = -\frac{1}{2}V_1$, et que

la valeur de $-\frac{1}{2}V_1$ étant fort convergente, il convient de la substituer au lieu de $\left(\frac{dV_1}{dr}\right)$

$$p' = const. - \frac{4}{3}\pi.\int \rho.d.a^3.(2\alpha\bar{y} + 2\alpha y''),$$
$$+ 4\alpha\pi.\int \rho.d\left(\frac{2a^4 Y^{(1)}}{3} + \frac{3a^5 Y^{(2)}}{5} + \frac{4a^6 Y^{(3)}}{7} + \text{etc.}\right).$$
$$+ \frac{1}{2}V_1 + \alpha\varphi.\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Si l'on retranche de cette équation, le double de la précédente; on aura

$$p' = const. + 4\alpha\pi.\int \rho.d\left(\frac{a^5 Y^{(2)}}{5} + \frac{2a^6 Y^{(3)}}{7} + \text{etc.}\right)$$
$$- \frac{3}{2}V_1 + 2\alpha\varphi.\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right).\frac{4}{3}\pi.\int \rho.d.a^3.$$

En développant V_1 suivant les puissances de $\frac{1}{r}$, on aura une expression de cette forme

$$V_1 = \frac{U_1^{(0)}}{r} + \frac{U_1^{(1)}}{r^2} + \frac{U_1^{(2)}}{r^3} + \frac{U_1^{(3)}}{r^4} + \text{etc.};$$

$U_1^{(i)}$ étant une fonction rationnelle et entière de μ, $\sqrt{1-\mu^2}.\,sin.\,\omega$, et $\sqrt{1-\mu^2}.\,cos.\,\omega$, assujettie à la même équation aux différences partielles, que $Y^{(i)}$; l'équation précédente devient ainsi

$$p' = const. + 4\alpha\pi.\int \rho.d.\left(\frac{a^5 Y^{(2)}}{5} + 2\frac{a^6 Y^{(3)}}{7} + \text{etc.}\right)$$
$$- \frac{3}{2}.(U_1^{(1)} + U_1^{(2)} + U_1^{(3)} + \text{etc.}) + 2\alpha\varphi.\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right).\frac{4}{3}\pi.\int \rho.d.a^3.$$

Il résulte des expériences nombreuses du pendule, que l'on a, à-fort-peu-près,

$$p' = const. + \alpha q.P.\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right),$$

αq étant à-très-peu-près égal à 0,0054. De là il suit que la fonction

$$4\alpha\pi.\int\rho.d.\left(\frac{2a^6 Y^{(3)}}{7}+\frac{3a^7.Y^{(4)}}{9}+\text{etc.}\right)$$
$$-\frac{3}{2}.(U_1^{(1)}+U_1^{(3)}+U_1^{(4)}+\text{etc.})$$

est très-petite relativement au terme $\alpha q.P.\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right)$; et que la fonction

$$4\alpha\pi.\int\rho.d.\left(\frac{a^5 Y^{(2)}}{5}\right)-\frac{3}{2}U_1^{(2)}$$

est à-fort-peu-près égale à

$$(\alpha q-2\alpha\varphi).P.\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right).$$

L'expression générale de cette fonction est de la forme

$$A.\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right)+A^{(1)}\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\sin.\omega+A^{(2)}\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\cos.\omega$$
$$+A^{(3)}.(1-\mu^2).\sin.2\omega+A^{(4)}.(1-\mu^2).\cos.2\omega:$$

ainsi les constantes $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $A^{(4)}$, sont très-petites relativement à la constante A; et l'on a, à-fort-peu-près,

$$A=P.(\alpha q-2\alpha\varphi).$$

Les observations donnent

$$\alpha\varphi=\frac{1}{289}=0,00346o2;$$

on aura ainsi

$$A=-P.0,00152.$$

On peut encore déterminer A, au moyen des deux inégalités de la lune, qui dépendent de l'applatissement de la terre. Il résulte du second chapitre du septième livre de la Méca-

nique céleste, que si l'on désigne par $k.\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right)$, la partie de

$$\frac{4\alpha\pi}{5}\cdot\int \rho.d\,(a^5 Y^{(2)})+U_1^{(2)},$$

qui est indépendante de l'angle ω; l'inégalité lunaire eu latitude, sera

$$\frac{k}{(g-1).T}\cdot f^2.\ sin.\lambda.\ cos.\lambda.\ sin.u;$$

u étant la longitude de la lune, $g-1$ le rapport du moyen mouvement de ses nœuds à son moyen mouvement, f sa parallaxe, λ l'obliquité de l'écliptique, et T la masse de la terre, à très-peu-près égale à P. Suivant M. Burg, cette inégalité est, en secondes sexagésimales,

$$-8'',0.sin.u;$$

et la comparaison de quatre mille observations a conduit M. Burkhard au même résultat qui donne

$$k=-0{,}0015588.P.$$

Maintenant, il est facile de voir que si l'on nomme $Q\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right)$, la partie de $U_1^{(2)}$ indépendante de l'angle ω, on a

$$k=A+\frac{5}{2}Q;$$

on a donc

$$A=-0{,}0015588.P-\frac{5}{2}.Q.$$

Si l'on compare cette valeur de A, à la précédente conclue des expériences du pendule; on voit que $\frac{5}{2}Q$ est une quantité insensible; ce qui indique que la masse de la mer est très-petite, et qu'ainsi elle a très-peu de profondeur. En effet, on a vu précédemment que $\alpha y'=const.+\alpha y''$: les va-

riations de la profondeur $\alpha y'$ de la mer sont donc du même ordre que les élévations des grands plateaux des continens au-dessus de son niveau; élévations dont les plus grandes n'excèdent pas deux mille mètres, et dont la moyenne ne surpasse pas mille mètres. Cela joint au peu de densité de la mer, rend la valeur de Q presque insensible. La comparaison des deux valeurs de A, donne

$$Q = -0{,}00001552;$$

mais on sent combien les erreurs des observations et des expériences répandent d'incertitude sur cette valeur.

Les mesures des degrés des méridiens, réduites au niveau de la mer, ou de l'atmosphère supposée, nous offrent un troisième moyen pour obtenir A. L'équation (1) donne

$$\begin{aligned} P.(\alpha\bar{y} + \alpha y'') = const. + 4\alpha\pi.\int\rho.d\left(\frac{a^5 Y^{(2)}}{5} + \frac{a^6 Y^{(3)}}{7} + \text{etc.}\right) \\ + U_1^{(1)} + U_1^{(2)} + U_1^{(3)} + \text{etc.} \\ - P.\frac{\alpha\varphi}{2}.\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Les mesures des degrés s'écartent peu de la figure d'un ellipsoïde de révolution : elles présentent cependant des anomalies plus grandes que les longueurs du pendule; ce qui tient, en partie, aux erreurs dont les observations d'amplitude des arcs mesurés sont susceptibles, et qui sont beaucoup plus considérables, relativement à l'arc mesuré, que les erreurs des expériences du pendule; et en partie à ce que les petites irrégularités de la terre affectent plus les degrés que les longueurs du pendule, comme je l'ai fait voir dans le troisième livre de la Mécanique céleste. Mais lorsque

l'on compare des degrés éloignés, tels que ceux de France et de l'équateur, l'influence de ces irrégularités devient peu sensible. La comparaison des degrés dont je viens de parler, a donné à M. Delambre

$$\alpha(\bar{y}+y'')=const.-0{,}00324.\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right).$$

En comparant cette expression de $\alpha(\bar{y}+y'')$ à la précédente, on voit que les quantités $Y^{(3)}$, $Y^{(4)}$, etc, $U_1^{(1)}$, $U_1^{(3)}$, etc., sont très-petites, comme cela résulte pareillement des expériences du pendule. La première de ces expressions donne, en désignant par $-\alpha h.\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right)-\alpha\bar{h}.\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right)$, $-\alpha h''.\left(\mu^2-\frac{2}{3}\right)$, les parties de $\alpha Y^{(2)}$, $\alpha\bar{Y}^{(2)}$, et de $\alpha Y''^{(2)}$, qui sont indépendantes de l'angle ω,

$$-P.(\alpha\bar{h}+\alpha h'')=A+\frac{5}{2}Q-\frac{\alpha\varphi}{2}.P;$$

on aura donc, en substituant pour $-P.(\alpha\bar{h}+ah')$, sa valeur $-0{,}00324.P$, que donnent les mesures des degrés de France et de l'équateur,

$$A=-0{,}00151.P-\frac{5}{2}Q.$$

On voit encore par ces mesures, que $\frac{5}{2}Q$ est insensible. On a ainsi, pour A, ces trois valeurs,

$$A=-0{,}00152.P,$$

$$A=-0{,}001588.P-\frac{5}{2}Q,$$

$$A=-0{,}00151.P-\frac{5}{2}Q.$$

En supposant donc Q nul, ces valeurs s'accordent aussi bien qu'on peut le desirer.

La précession des équinoxes donne des limites entre lesquelles la valeur de A est comprise. Ce phénomène dépend de la somme des molécules du sphéroïde terrestre et de la mer, divisées par leurs distances respectives aux centres du soleil et de la lune. En supposant que r se rapporte au centre du soleil, et que S soit la masse de cet astre; la partie de la précession annuelle, due à cette action, sera, en rejetant les quantités périodiques,

$$-\frac{S}{r3}\cdot\frac{d.}{d\lambda}\cdot\frac{\left(\frac{4\alpha\pi.}{5}\cdot\int\rho.d(a^5Y^{(2)})+U_{,}^{(2)}\right)\cdot T}{Cn.\ sin.\lambda}:$$

λ est l'obliquité de l'écliptique, n est la vîtesse de rotation de la terre, C est le moment d'inertie de la terre, par rapport à son axe de rotation; enfin T exprime une année julienne. (*Voy.* la *Connaissance des temps,* pour l'année 1721, pag. 262.)

Si l'on nomme ϵ le rapport de la masse de la lune, divisée par le cube de sa moyenne distance à la terre, à la masse du soleil divisée par le cube de sa moyenne distance; et si l'on désigne par N la vîtesse angulaire de la terre autour du soleil, on aura

$$\frac{S}{r^3}=N^2;$$

et la précession moyenne des équinoxes, en vertu des actions réunies du soleil et de la lune, sera

$$\frac{-N^2.\ (1+\epsilon)}{Cn.sin.\lambda}\cdot\frac{d.}{d\lambda}\cdot\left(\frac{4\alpha\pi.}{5}\int\rho.d(a^5Y^{(2)})+U_{,}^{(2)}\right)\cdot T.$$

En supposant, comme ci-dessus, que la partie indépendante de ω, dans la fonction

$$\frac{4\alpha\pi.}{5}\cdot\int\rho.d(a^5Y^{(2)}+U_{,}^{(2)}),$$

soit $k.\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right)$; μ sera le sinus de la déclinaison du soleil. En nommant donc ε sa longitude, on aura

$$\mu = sin.\,\lambda.\ sin.\,\varepsilon;$$

ce qui donne

$$\mu^2 = \frac{1}{2}\cdot sin.^2\lambda - \frac{1}{2}\cdot sin.^2\lambda.\ cos.\,2\varepsilon.$$

En négligeant les quantités périodiques dépendantes de l'angle ε, on aura

$$\mu^2 = \frac{1}{2}\cdot sin.^2\lambda;$$

et alors l'expression précédente de la précession annuelle devient

$$-\frac{k.(1+6).N^2.T.cos.^2\lambda.}{Cn}:$$

ainsi, en désignant par lT la précession annuelle observée, on aura

$$k = \frac{-C.n.lT}{NT.(1+6).N.cos.\lambda}.$$

On a, par les n°s 2 et 13 du cinquième livre de la Mécanique céleste,

$$\frac{C}{P} = \frac{2}{5}.\frac{\int\rho.d.a^5}{\int\rho.d.a^3};$$

P étant toujours la pesanteur, qui est à-très-peu-près égale à la masse de la terre, son rayon étant pris pour l'unité. On a ensuite, en secondes décimales,

$$lT = 155'',20;\quad NT = 399930''.$$

On a, de plus,

$$\frac{N}{n} = 0,00273033.$$

Enfin, par un milieu pris entre les résultats des phénomènes des marées, de la nutation, de la parallaxe lunaire, et de l'équation lunaire des tables du soleil, on trouve

$$\beta = 2{,}57.$$

On a donc

$$k = -P.\,0{,}001736.\,\frac{\int \rho.d.a^5}{\int \rho.d.a^3}.$$

Si l'on compare cette valeur de k, à celle que nous avons trouvée précédemment par les inégalités lunaires, et qui est

$$k = -P.\,0{,}0015588,$$

on voit que la fraction $\frac{\int \rho.d.a^5}{\int \rho.d.a^3}$ est un peu moindre que l'unité; ce qui doit être, si, conformément aux lois de l'hydrostatique, la densité ρ des couches terrestres diminue du centre à la surface. Les limites de cette fraction étant zéro et l'unité, les limites de A sont 0, et $-0{,}001736.P$. Les trois valeurs précédentes de A sont entre ces limites. Le milieu entre ces trois valeurs donne, à-fort-peu-près,

$$k = -P.\,0{,}00153;$$

ce qui donne

$$\int \rho.d.a^3 = \frac{0{,}001736}{0{,}00153}.\int \rho.d.a^5. \qquad (i)$$

Supposons la densité ρ croître en progression arithmétique de la surface au centre, en sorte que (ρ) étant la densité de la couche extérieure du sphéroïde terrestre, la densité d'une de ses couches soit $(\rho).(1+e-ea)$. On aura, en nommant D la moyenne densité de la terre,

$$D = \int \rho.d.a^3 = (\rho).\left(1+\tfrac{1}{4}e\right);$$

et l'équation (i) donnera

$$D = 1,552.(\rho).$$

En supposant la densité de la première écorce du sphéroïde terrestre égale à celle du granit, ou à trois fois la densité de l'eau, prise pour unité, on aurait

$$D = 4,656;$$

ce qui s'accorde avec les observations de Maskeline, et avec la belle expérience de Cavendish, autant qu'on peut le desirer, vu l'incertitude des observations et des hypothèses que nous venons de faire sur la loi de densité des couches du sphéroïde terrestre, et sur la densité de sa couche extérieure.

L'ellipticité $\alpha\bar{h} + \alpha h'$ de la surface de la mer, est, par ce qui précède,

$$\frac{1}{2}\alpha\varphi - \frac{(A + \frac{5}{3}Q)}{P}.$$

En prenant pour A le milieu des trois valeurs précédentes, ou aura, pour cette ellipticité,

$$0,00326 + \frac{5}{6} \cdot \frac{Q}{P},$$

ou 0,00326, en négligeant le terme $\frac{5}{6} \cdot \frac{Q}{P}$.

Le rayon du sphéroïde terrestre est

$$1 + \alpha\bar{h} \cdot \left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right) + \alpha x,$$

αx étant une quantité peu considérable par rapport à $\alpha\bar{h}$, et du même ordre que l'élévation moyenne des continens. Pareillement, l'expression du rayon de la surface de la mer est

$$\alpha l' + (\alpha h' + \alpha\bar{h}) \cdot \left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right) + \alpha x';$$

$\alpha l'$ étant une constante et $\alpha x'$ étant de l'ordre de αx. La profondeur de la mer est à-très-peu-près la différence de ces rayons, et par conséquent égale à

$$\alpha l' + \alpha h'.\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right) + \alpha x' - \alpha x.$$

A l'équateur, les continens occupent une grande étendue sur laquelle cette expression devient négative. La mer y occupe une étendue plus grande encore, sur laquelle la même expression est positive. Dans le premier cas, $\alpha l' - \frac{1}{3}\alpha h'$ est moindre que $\alpha x - \alpha x'$; dans le second cas, il est plus grand : $\alpha l' - \frac{1}{3}\alpha h'$ est donc une quantité de l'ordre de αx. Fort près du pôle boréal, où l'on a, à-fort-peu-près, $\mu = 1$; la quantité $\alpha l' + \frac{2}{3}\alpha h' + \alpha x' - x$ est positive aux points que la mer recouvre, et négative aux points qu'elle laisse à découvert : ainsi $\alpha l' + \frac{2}{3}\alpha h'$ est une quantité très-petite de l'ordre αx; donc $\alpha l' - \frac{1}{3}\alpha h'$ étant du même ordre, la somme et la différence de ces deux quantités, ou $2\alpha l'$ et $\alpha h'$, seront encore de cet ordre; par conséquent, la mer est peu profonde, et ses profondeurs sont du même ordre que les élévations des continens au-dessus de son niveau.

De là il suit que la surface du sphéroïde terrestre est à-peu-près elliptique, et celle qui convient à l'équilibre de cette surface supposée fluide. Ses diverses couches sont elles-mêmes à-peu-près elliptiques : car on a vu que les quantités $Y^{(3)}$, $Y^{(4)}$, etc, sont fort petites relativement à $Y^{(2)}$.

Tout cela suppose que les degrés mesurés à la surface du sphéroïde terrestre, et réduits au niveau de l'atmosphère supposée, sont ceux de la surface de cette atmosphère. Pour le démontrer, il suffit de faire voir que la direction de la pe-

santeur est, aux quantités près de l'ordre α^2, la même à la surface du sphéroïde et à la surface de l'atmosphère. L'angle que cette direction forme avec le rayon r dans le sens du méridien, par exemple, est égal au rapport de la différentielle du second membre de l'équation (1) du n° I, prise par rapport à θ et divisée par $d\theta$, à cette différentielle prise par rapport à r et divisée par $-dr$; or il est visible que ce rapport est, aux quantités près de l'ordre α^2, le même à la surface du sphéroïde qu'à celle de l'atmosphère.

V. Supposons maintenant qu'un vaste plateau recouvre une partie du sphéroïde terrestre, et déterminons la loi de pesanteur à la surface de ce plateau. Nommons $1+\alpha\bar{y}+\alpha y_1$ le rayon mené du centre de la terre à ce plateau, en sorte que αy_1 soit l'élévation d'un de ses points au-dessus du sphéroïde. Soit $\alpha y'''$ l'élévation au-dessus du plateau, du point correspondant de l'atmosphère supposée. Si l'on conçoit deux sphéroïdes dont les rayons soient $1+\alpha\bar{y}$, et $1+\alpha\bar{y}+\alpha y_1$; le plateau sera évidemment l'excès du second sphéroïde sur le premier, plus la partie de la différence des deux sphéroïdes, correspondante à y_1 négatif. Soient, relativement aux deux sphéroïdes et à cette partie de leur différence, $V_{\prime}$, $V_{\prime\prime}$, $V_{\prime\prime\prime}$, les sommes de leurs molécules divisées par leurs distances au point attiré de l'atmosphère; on aura l'équation de l'équilibre de cette atmosphère, en augmentant dans l'équation (1), V', de la quantité $V_{\prime\prime}-V_{\prime}+V_{\prime\prime\prime}$. En différenciant le second membre de cette équation par rapport à r, et le divisant par $-dr$, on aura l'expression de la pesanteur p' à la surface de l'atmosphère. On retranchera ensuite de cette expression, le second membre de l'équation (1), multipliée par $\frac{1}{2}$, et l'on observera

que, relativement à un sphéroïde quelconque de la densité ρ_1, on a, par ce qui précède,

$$\left(\frac{dV}{dr}\right)+\frac{1}{2}V=2\alpha\pi.\rho_1.h,$$

h étant la hauteur du point attiré au-dessus de la surface du sphéroïde; ce qui donne, en représentant par ρ_1 la densité du plateau

$$\left(\frac{dV_{,}}{dr}\right)+\frac{1}{2}V_1=2\alpha\pi.\rho_1.(y_1+y''')$$

$$\left(\frac{dV_{,,}}{dr}\right)+\frac{1}{2}V_{,,}=2\alpha\pi.\rho_1.y''';$$

on a ensuite

$$\left(\frac{dV_{,,,}}{dr}\right)+\frac{1}{2}V_{,,,}=0;$$

$$\left(\frac{dV'}{dr}\right)+\frac{1}{2}.V'=0:$$

on aura ainsi

$$p'=const.-2\alpha\pi.(\bar{y}+y_1+y''')\cdot\int\rho.d.a^3$$

$$+2\alpha\pi\cdot\int\rho.d\,(a^4Y^{(1)}+a^5Y^{(2)}+a^6Y^{(3)}+\text{etc.})$$

$$+2\alpha\pi.\rho_1.y_1+\frac{5}{4}\alpha\varphi.P.\mu^2.$$

Si l'on désigne par p_1 la pesanteur à la surface du plateau; il faudra, pour l'obtenir, augmenter p', de la quantité $2P.\alpha y'''$; on aura donc

$$p_1=const.-2\alpha\pi.(\bar{y}+y_1+y''')\cdot\int\rho.d.a^3$$

$$+2\alpha\pi.\int\rho.d(a^4Y^{(1)}+a^5Y^{(2)}+\text{etc.})$$

$$+2\alpha\pi.\rho_1.y_1+2P.\alpha.y'''+\frac{5}{4}\alpha\varphi.P.\mu^2,$$

Si le sphéroïde terrestre était homogène, cette équation donnerait

$$p_1 = P.\left\{1 - \frac{1}{2}.(\alpha l - \alpha y''') + \frac{5}{4}\alpha\varphi.\mu^2 - \frac{3}{2}\alpha.(1-\rho_1).(y_1 - k)\right\}; \quad (o)$$

k étant la valeur de y_1 au bord de la mer, à l'équateur et au point où la pesanteur est P; et ρ_1 étant ici le rapport de la densité du plateau, à la moyenne densité de la terre. Si ces deux densités étaient égales, on aurait

$$p_1 = P.\left(1 - \frac{1}{2}(\alpha l - \alpha y''') + \frac{5}{4}\alpha\varphi\mu^2\right).$$

En appliquant cette formule aux expériences de Bouguer sur la pesanteur, à Quito et au bord de la mer à l'équateur; on a $-\frac{1}{2}P.(\alpha l - \alpha y''')$ pour la diminution de la pesanteur à Quito. $\alpha l - \alpha y'''$ est la hauteur de Quito, au-dessus du niveau de la mer, et cette hauteur est $\frac{1}{2237}$, le rayon terrestre étant pris pour unité; la diminution de la pesanteur à Quito serait donc $\frac{1}{4474}$. L'expérience donne $\frac{1}{1331}$ pour cette diminution, c'est-à-dire une quantité plus que triple de la précédente : ainsi l'hypothèse du sphéroïde terrestre homogène et de même densité que les Cordillières, est exclue par les observations du pendule, qui prouvent incontestablement que la moyenne densité de la terre surpasse la densité de ces montagnes.

L'expression de p_1 donnée par l'équation (o), aurait encore lieu pour un point situé sous l'équateur, si le sphéroïde terrestre était de révolution, comme il est facile de

s'en assurer. On peut d'ailleurs supposer sans erreur sensible, relativement à Quito, que $y_{,}-k,$ exprime la hauteur de cette ville au-dessus du niveau de la mer, hauteur égale à $\alpha l-\alpha y'''$: on aura ainsi

$$p_{\iota}=\text{P}.\left(1-\left(2-\frac{3}{2}\rho_{\iota}\right).\left(\alpha l-\alpha y'''\right)\right).$$

La diminution de la pesanteur, depuis le bord de la mer jusqu'à Quito, serait donc

$$\left(2-\frac{3}{2}l.\right).\left(\alpha l-y'''\right).$$

En substituant, au lieu de $\alpha l-\alpha y'''$, $\frac{1}{2237}$, et en égalant la diminution précédente, à la diminution observée $\frac{1}{1331}$, on trouve

$$\rho_{\iota}=0{,}2129.$$

La densité des Cordillières est donc peu différente de celle de l'eau, qui, suivant l'expérience de Cavendish, est 0,182, la moyenne densité de la terre étant prise pour unité. Le peu de densité de ces montagnes résulte encore du peu d'effet de leur attraction sur le fil à plomb dans les observations des astronomes français qui ont remarqué que ces montagnes, comme étant volcaniques, doivent renfermer de grandes cavités dans leur intérieur.

L'expression précédente de p_{ι} est déduite de la considération du plateau, comme résultant de la différence de deux sphéroïdes très-peu différens d'une même sphère; et vu la rapidité avec laquelle le plateau sur lequel la ville de Quito est située, s'élève à partir du bord de la mer, cette considération peut sembler inexacte. Mais cette expression est encore très-approchée, en considérant ce plateau comme la

partie supérieure d'une montagne dont les dimensions horizontales sont beaucoup plus grandes que sa hauteur; ce qui est à-peu-près conforme à la nature. Si l'on conçoit une série de couches circulaires horizontales et disposées de manière que leurs centres soient sur une même verticale, et que l'on place Quito au centre de la tranche supérieure; en nommant ρ_1 la densité de ces couches; R le rayon de l'une d'elles, dont r est la distance de son centre à Quito; la somme des molécules de cette couche, divisées par leurs distances à Quito, sera

$$2\pi\rho_1 \cdot \left(\sqrt{r^2+R^2}-r\right).$$

R étant supposé fort grand relativement à r, cette fonction se réduit à-fort-peu-près, à

$$2\pi\rho_1 \cdot (R-r);$$

elle reste donc toujours très-petite, si, comme on doit le supposer ici, R est une petite fraction du rayon terrestre; elle n'apporte ainsi qu'un terme insensible dans l'équation de l'équilibre de l'atmosphère, et par conséquent la somme de ces fonctions ne produit aucun changement sensible dans la valeur de $\alpha y'''$. Il n'en est pas de même de la pesanteur p_1. L'attraction de la couche que nous venons de considérer, produit un accroissement égal à la différentielle de la fonction précédente prise par rapport à r, et divisée par $-dr$, et par conséquent égale à $2\pi\rho_1$: ainsi, par l'attraction de la montagne, cet accroissement sera $2\pi.\rho_1.r'$, r' étant la hauteur de la montagne, hauteur toujours égale à $\alpha l-\alpha y'''$, puisque $\alpha y'''$ n'est point altéré sensiblement par cette attraction. La pesanteur sera donc augmentée de la quantité,

$$\frac{3}{2}\rho_{,}.\,P.\,(\alpha l - \alpha y''');$$

ce qui est conforme à ce qui précède. On déterminera, par la même analyse, la variation de la pesanteur, due à un corps dense, ou à une cavité située dans l'intérieur de la terre.

Considérons maintenant l'effet de l'attraction d'une montagne, sur la mesure des degrés du méridien. L'expression d'un degré du méridien, mesuré sur la surface de l'atmosphère supposée, est, en exprimant par c un degré moyen,

$$c.\left(1+\alpha y+\alpha.\left(\frac{ddy}{d\theta^2}\right)\right);$$

θ étant la latitude du milieu de ce degré, et $1+\alpha y$ étant le rayon mené du centre de la terre, à ce milieu. Concevons maintenant une montagne dont la masse soit m, et θ' la latitude. La distance de cette montagne, au milieu du degré mesuré, sera $2.sin.\frac{1}{2}\gamma$, γ étant l'angle que forment entre eux les deux rayons terrestres, menés à la montagne et au milieu du degré. En considérant ce milieu comme un point attiré par la montagne, la masse de la montagne, divisée par sa distance à ce point, sera $\frac{m}{2.sin.\frac{1}{2}\gamma}$. C'est la quantité dont la valeur de V'' de l'équation (4) du nº I. s'accroît par l'accession de la montagne. Cette accession ajoute donc à la valeur du rayon terrestre mené à la surface de l'atmosphère, que donne cette équation, le terme

$$\frac{m}{2P.sin.\frac{1}{2}\gamma},$$

P étant la masse de la terre.

De là il suit que l'accession de la montagne ajoute au degré mesuré, la quantité,

$$\frac{mc}{2P}\cdot\left\{\frac{1}{\sin.\frac{1}{2}\gamma}+\frac{d^2\cdot\frac{1}{\sin.\frac{1}{2}\gamma}}{d\theta^2}\right\}; \quad (i)$$

ou

$$\frac{mc}{2P.\sin.\frac{1}{2}\gamma}\cdot\left\{1-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{d\gamma}{d\theta}\right)^2+\frac{\left(\left(\frac{d\gamma}{d\theta}\right)^2-\left(\frac{dd\gamma}{d\theta^2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin.\gamma\right)}{2.\sin.^2\frac{1}{2}\gamma}\right\}.$$

On a

$$Cos.\gamma=cos.\theta.cos.\theta'+sin.\theta.sin.\theta'.cos.(\omega'-\omega),$$

ω et ω' étant les longitudes du milieu du degré, et de la montagne. Si la montagne est dans la direction même du degré mesuré, on a

$$\gamma=\pm(\theta'-\theta).$$

Le signe + ayant lieu, si la montagne est plus près du pôle que le point attiré; le signe — a lieu dans le cas contraire: la quantité précédente devient

$$\pm\frac{mc}{2P.\sin.\frac{1}{2}(\theta'-\theta)}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2.\sin.^2\frac{1}{2}(\theta'-\theta)}\right).$$

Le second terme de cette expression est le seul sensible, lorsque la montagne est peu éloignée de l'arc mesuré. Pour une montagne de même densité que la terre, et égale à une sphère dont le rayon serait un millième du rayon terrestre, et qui serait éloignée du point attiré, d'un cinquantième de ce dernier rayon; ce terme donnerait 25 mètres d'accroissement dans le degré décimal du méridien : cet accroissement resterait le même, si l'on doublait le rayon de la sphère égale à la montagne, ainsi que son éloignement. Une sphère d'un pareil rayon aurait une masse bien supérieure à celle des plus hautes montagnes de la terre.

Si la montagne était assez près de l'arc mesuré, pour que la moitié de cet arc fût une partie sensible de sa distance; alors il faudrait, dans l'expression (i) de l'effet de la montagne, changer c en $d\theta$, et l'intégrer; ce qui donne

$$\frac{m}{2P} \cdot \left\{ \frac{d \cdot \frac{1}{\sin.\frac{1}{2}\gamma}}{d\theta} + \int \frac{d\theta}{\sin.\frac{1}{2}\gamma} + const. \right\};$$

la constante devant être déterminée par la condition que cette fonction soit nulle à la première extrémité de l'arc mesuré. Si la montagne est dans la direction du méridien, cette fonction devient

$$\frac{m}{2P} \cdot \left\{ 2 . log. \frac{tang.\frac{1}{4}(\theta'-\theta_{\prime})}{tang.\frac{1}{4}(\theta'-\theta_{\prime\prime})} + \frac{1}{2} \cdot \frac{cos.\frac{1}{2}(\theta'-\theta_{\prime\prime})}{sin.^2\frac{1}{2}.(\theta'-\theta_{\prime\prime})} - \frac{1}{2} \cdot \frac{cos.\frac{1}{2}(\theta'-\theta_{\prime})}{sin.^2\frac{1}{2}(\theta'-\theta_{\prime})} \right\},$$

$\theta_{\prime}$ et $\theta_{\prime\prime}$ étant les latitudes des deux extrémités de l'arc mesuré c, dont le milieu a θ pour latitude. Lorsque $\theta'-\theta_{\prime}$ et $\theta-\theta_{\prime\prime}$ sont de petits arcs, cette fonction se réduit à-peu-près à

$$\frac{\frac{2mc}{P} \cdot \left(\theta'-\theta\right)}{\left((\theta'-\theta)^2-\frac{1}{4}c^2\right)^2}:$$

cette quantité exprime d'une manière fort approchée, l'action de la montagne, lorsqu'elle devient sensible.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que l'action directe de la montagne; mais elle a sur la mesure du degré, une action indirecte, en changeant la figure de la mer, qui, par-là, change la figure de l'atmosphère supposée. Nous allons faire voir que l'effet de cette action indirecte est insensible.

L'équation (4) du n° I donne, pour la variation de $\alpha y'$, due à l'action de la montagne,

$$\frac{m}{2P . sin.\frac{1}{2}\gamma'},$$

γ' étant l'angle compris entre les rayons terrestres menés à la montagne et à une molécule de la surface de la mer. L'élément de la mer, dû à cette variation, est donc le produit de cette quantité par $d\gamma'.sin.\gamma'.d\varepsilon'$; ε' étant l'angle que l'arc intercepté entre cette molécule et la montagne forme avec le méridien de la montagne. L'action de cet élément de la mer produit, dans la valeur de $\alpha y''$, en vertu de l'équation (1), transportée à la partie de la surface de l'atmosphère qui s'élève au-dessus des continens, le terme

$$\frac{m.d\gamma'.d\varepsilon'.sin.\gamma'}{2P.sin.\frac{1}{2}\gamma'}\cdot\frac{1}{2P.sin.\frac{1}{2}\gamma''},$$

γ'' étant l'angle formé par les rayons terrestres menés aux molécules de la mer et de l'atmosphère. La variation de $\alpha y'$ due à l'action de la montagne sur la mer, est

$$\iint\frac{m\,d\gamma'.d\varepsilon'.cos.\frac{1}{2}\gamma'}{P}\cdot\frac{1}{2P.sin.\frac{1}{2}\gamma''}:$$

cette double intégrale n'a de valeur sensible, que dans le petit espace où $sin.\frac{1}{2}\gamma''$ est une très-petite quantité; et alors il est visible qu'elle est beaucoup moindre que la variation $\frac{m}{2P.sin.\frac{1}{2}\gamma}$, introduite dans $\alpha y''$ par l'action directe de la montagne.

En suivant les raisonnemens qui nous ont conduit à l'équation (7) du nº III, on voit qu'elle subsiste encore dans le cas où l'on suppose une montagne sensiblement éloignée de l'observateur. La variation de la pesanteur, due à l'action de la montagne, est donc le produit de $\frac{1}{2}$P par la variation correspondante de $\alpha y''$, ou par $\frac{m}{2P.sin.\frac{1}{2}\gamma}$: ainsi la variation

de la pesanteur est beaucoup plus petite que la variation correspondante du degré du méridien.

Nous observerons, à cette occasion, que l'existence de l'équation (a) du n° I, contribue singulièrement à la régularité de la pesanteur et de la variation du pendule.

VI. Je terminerai ces recherches par les considérations suivantes sur la stabilité de la figure de la terre. Cette stabilité repose sur ces deux conditions, savoir, que la mer soit en équilibre, et que la terre tourne autour d'un axe invariable relativement à sa surface. J'ai prouvé dans la *Connaissance des temps* de 1821, la possibilité d'un pareil axe, lorsque la mer recouvre tout le sphéroïde terrestre, et je suis parvenu à ce théorême.

« La terre étant supposée un sphéroïde formé de couches « de densités variables suivant une loi quelconque, et recou- « vert d'un fluide; que l'on imagine un second sphéroïde « qui pénètre le premier, et dont les couches soient les mê- « mes, avec la seule différence, que leurs densités soient « diminuées de la densité du fluide : si l'on fait tourner le « premier sphéroïde autour de l'un des axes principaux du « second, le fluide pourra toujours être en équilibre, et alors « la figure et l'axe de rotation seront invariables; en sorte « que les trois axes principaux du sphéroïde imaginaire de- « viendront ceux de la terre entière. »

Dans la nature, la mer laisse à découvert une partie du sphéroïde terrestre; mais on voit, par l'analyse précédente, qu'en faisant tourner ce sphéroïde autour d'un axe quelconque retenu dans une position fixe, la mer pourra toujours prendre une figure d'équilibre. En supposant nulle la densité ρ de la mer; l'axe principal de rotation du sphéroïde sera

celui de la terre entière. Si l'on nomme x, y, ζ les trois coordonnées d'une molécule dm de la mer, rapportées à cet axe et aux deux autres axes principaux; les trois intégrales $\int xy\,dm$, $\int x\zeta\,dm$, $\int y\zeta\,dm$, étendues à tout l'océan, seront nulles, parce que dm est proportionnel à ρ supposé nul; mais si ρ n'est pas nul, les valeurs de ces intégrales s'opposeront par les propriétés connues des axes principaux, à ce que l'axe principal du sphéroïde soit celui de la terre entière. Prenons maintenant pour nouvel axe fixe de rotation, l'axe principal du corps formé par le sphéroïde terrestre et par la mer dans ce premier état d'équilibre, la durée de rotation étant toujours supposée la même. Soient x', y', ζ' les coordonnées d'une molécule dm de la mer, dans ce premier état, et rapportées aux nouveaux axes principaux; la mer ne sera plus alors en équilibre, mais elle prendra un second état d'équilibre autour du nouvel axe de rotation. Soient alors x'', y'', ζ'', les coordonnées d'une molécule dm de la mer; il est facile de voir que les valeurs des fonctions $\int x''\,y''\,dm - \int x'\,y'\,dm$, $\int x''\,\zeta''\,dm - \int x'\,\zeta'\,dm$, $\int y''\,\zeta''\,dm - \int y'\,\zeta'\,dm$, s'opposent à ce que ce nouvel axe soit un axe principal : or $x''\ y''\ \zeta''$ ne diffèrent de x', y', ζ' que de quantités de l'ordre ρ, puisque leur différence est due à l'écart du second axe de rotation, du premier, écart qui serait nul avec ρ, et qui est, par conséquent, de l'ordre ρ. Les valeurs des fonctions précédentes sont donc de l'ordre ρ^2. Prenons encore pour troisième axe fixe de rotation, l'axe principal du corps formé par le sphéroïde terrestre, et par la mer dans son second état d'équilibre. Ce troisième axe ne s'écartera du second, que d'une quantité de l'ordre ρ^2 : car les valeurs qu'il faut détruire par un déplacement du second axe pour en former un axe prin-

cipal, étant de cet ordre, ce déplacement sera du même ordre. Soient x''', y''', ζ''', les coordonnées d'une molécule dm de la mer dans son second état d'équilibre, et rapportées au troisième axe de rotation. Soient de plus x'''', y'''', ζ'''' les coordonnées de cette molécule, dans le troisième état d'équilibre; les valeurs des fonctions $\int x''''y''''dm - \int x'''y'''dm$, $\int x''''\zeta''''dm - \int x'''\zeta'''dm$, $\int y''''\zeta''''dm - \int y'''\zeta'''dm$, s'opposent à ce que le troisième axe de rotation soit un axe principal. Mais l'écart de ce troisième axe, du second, n'étant que de l'ordre ρ^2; x'''', y'''', ζ'''' ne diffèrent de x''', y''', ζ''', que de quantités de cet ordre; les valeurs des fonctions précédentes sont donc de l'ordre ρ^3. En continuant ainsi, on voit que ces fonctions décroissent sans cesse, et qu'à leurs limites, l'axe de rotation devient un axe principal, la mer étant en équilibre; ce qui démontre la possibilité d'un pareil axe. Son existence est prouvée par toutes les observations astronomiques suivant lesquelles les hauteurs du pôle sont invariables, et qui, de plus, font voir que les mouvemens primitifs de cet axe sont depuis long-temps anéantis, et que la durée du jour moyen, prise généralement pour étalon de temps, est constante. Je n'ai point eu égard aux variations de la rotation, dues aux passages de la mer, d'un état d'équilibre à un nouvel état d'équilibre. Ces variations ne pouvant être que de l'ordre $\alpha\rho$, la variation qui en résulte dans la force centrifuge, et par conséquent dans la figure de la mer, est de l'ordre $\alpha^2\rho$, quantité que nous avons négligée.

OBSERVATIONS

Sur la vallée d'Égypte et sur l'exhaussement séculaire du sol qui la recouvre;

Par M. GIRARD.

Lu les 16 juin et 21 juillet 1817.

SECTION PREMIÈRE.

Description de la vallée d'Égypte dans son état actuel. — Variations annuelles du Nil.

Parmi les nombreux voyageurs qui ont donné des descriptions de l'Égypte, il n'en est aucun qui se soit proposé d'examiner la vallée où coule le Nil, avec assez de détails pour conclure de son état présent les changemens successifs qu'elle a subis et ceux qu'elle doit éprouver dans la suite.

Le séjour prolongé que nous avons fait sur différens points de cette vallée, nous a permis de recueillir une suite d'observations à l'aide desquelles nous essaierons d'en tracer l'histoire physique. La célébrité de cette contrée, les questions importantes auxquelles a donné lieu la formation du sol qui la recouvre, et les applications plus ou moins générales que l'on pourra faire des solutions que nous allons don-

ner de ces questions, nous font espérer que nos recherches ne seront point dénuées d'intérêt.

Le Nil, à son entrée en Égypte à la hauteur de l'île de *Philæ,* coule dans une gorge étroite, bordée sur chaque rive par des rochers de granit. Ces rochers traversent le fleuve à un demi myriamètre environ au-dessus de la ville de Syène; et c'est en franchissant cette espèce de barrage, qu'il forme la dernière de ses cataractes.

L'île d'Éléphantine, située vis-à-vis de Syène, est un attérissement qui s'est élevé à l'abri des derniers blocs de granit que l'on rencontre dans le lit du Nil, en descendant de la Nubie : ainsi l'Égypte semble commencer, en quelque sorte, là où finit le sol granitique.

A partir de ce point, les deux bords de la vallée sont formés de bancs de grès presque abruptes, dans la masse desquels on remarque encore aujourd'hui d'anciennes carrières exploitées pour la construction des temples et des palais de la haute Égypte. Ces bancs de grès opposés courent parallèlement entre eux du midi au nord, à une distance de trois à quatre mille mètres l'un de l'autre; ce qui ne laisse au fond de la vallée qu'une très-petite largeur de terrain cultivable : aussi les attérissemens du fleuve se réduisent-ils à quelques îles, dont la plus considérable est celle de Bybân, située presque vis-à-vis de l'ancienne ville d'*Ombos,* à quatre myriamètres environ de Syène.

A deux myriamètres au-dessous d'*Ombos,* les bancs de grès qui encaissent la vallée, se rapprochent de part et d'autre, au point de ne laisser entre eux que la largeur occupée par le fleuve. Ce lieu, appelé *Gebel Selseleh* ou *Montagne de la Chaîne,* offrait les plus grandes facilités pour

le transport par eau des matériaux qu'on pouvait en extraire. On y retrouve d'immenses carrières, dont les parois verticales portent les traces d'une exploitation qui semble encore récente : non-seulement ces carrières fournissaient des blocs équarris propres aux constructions; mais on y ébauchait les statues colossales destinées à l'ornement des temples et des palais de la Thébaïde, comme l'atteste, entre autres choses, une ébauche de statue de sphinx qui se voit encore sur le bord du Nil, toute disposée à être embarquée. La longueur du détroit de Gebel Selseleh est d'environ douze cents mètres.

Au débouché de ce détroit, la pente transversale de la vallée porte constamment le Nil sur sa rive droite, qui présente dans beaucoup d'endroits l'aspect d'une falaise coupée à pic, tandis que le sommet des montagnes de la rive gauche est presque toujours accessible par un talus plus ou moins incliné.

C'est dans la plaine qui s'étend depuis le Nil jusqu'au pied de la montagne Libyque, que sont bâties les villes d'Edfoû et d'Esné, autrefois *Apollinopolis magna* et *Latopolis :* la première est à dix, et la seconde à quinze myriamètres de Syène.

Les deux chaînes qui bordent la vallée, se rapprochant de nouveau au-dessous et à vingt kilomètres d'Esné, forment un défilé appelé *Gibeleyn*, au-delà duquel on entre dans les plaines d'*Hermonthis* et de Thèbes, plaines que le Nil traverse du midi au nord, en les coupant à-peu-près par le milieu de leur largeur.

Ici les bords de la vallée commencent à diverger : ils laissent entre eux l'intervalle d'un myriamètre environ susceptible de culture. C'est, en descendant des cataractes, le

premier point sur lequel une population nombreuse ait pu se fixer, et la nature elle-même l'avait indiqué pour être l'emplacement de la plus ancienne capitale de l'Égypte. Ses ruines sont à vingt myriamètres de Syène. La position de la chaîne Libyque, au pied de laquelle était situé le quartier de Thèbes appelé *Memnonium*, est formée de bancs de pierre calcaire. On y a pratiqué les vastes souterrains connus sous le nom de *Tombeaux des Rois*. La chaîne Arabique est de la même nature, sans avoir été l'objet des mêmes travaux. Ces bancs calcaires continuent d'encaisser la vallée en descendant vers le nord : on ne voit qu'accidentellement reparaître le grès en rochers isolés, et encore faut-il pour cela s'avancer à quelque distance dans l'intérieur du désert.

Le Nil, parvenu à la hauteur de Denderah, l'ancienne *Tentyris*, à six myriamètres au-dessous de Thèbes, se dirige de l'est à l'ouest jusqu'à la hauteur de l'ancienne ville d'*Abydus*; il reprend là sa direction au nord, à travers les provinces de Girgeh et de Syout, dont le territoire cultivable, moins resserré, est couvert d'un grand nombre de villages.

La ville de Syout, l'ancienne *Lycopolis*, est à trente myriamètres de Thèbes.

On communique de la vallée du Nil avec l'intérieur des déserts qui la bordent, par des gorges transversales, dont les unes conduisent, d'un côté, sur les bords de la mer Rouge, et, de l'autre, dans les *Oasis*.

La plus connue des premières est celle que l'on suit maintenant pour se rendre de Qené au port de Qoçeyr; on en connaît une seconde qui, se dirigeant au nord-est, vers le même port, a son origine dans la vallée, vis-à-vis d'Esné.

Ces différentes gorges et celles qui entrecoupent la chaîne

opposée, sont habitables, parce que les pluies d'hiver y entretiennent la végétation pendant quelque temps, et forment des fontaines dont les eaux suffisent aux besoins des Arabes et de leurs troupeaux.

On remarque au débouché de ces gorges transversales, soit sur les bords de la mer Rouge, soit dans la vallée du Nil, des amas de cailloux roulés, tantôt formant une plage unie, tantôt présentant l'aspect de bancs plus ou moins élevés; matières que les eaux seules ont pu mettre en mouvement, et dont la disposition actuelle remonte à une époque antérieure aux temps historiques. Les mêmes graviers et cailloux roulés existent déposés de la même manière à l'entrée des gorges de la chaîne Libyque : ils forment, sur les deux rives du Nil, la limite du désert proprement dit, car celle du terrain inculte se rapproche davantage de ce fleuve. Ce dernier sol, composé de sables légers, recouvre une étendue de terrain autrefois cultivable; et ce sol, de formation nouvelle si on le compare au premier, éprouve des changemens journaliers par l'action des vents auxquels il doit son origine.

A partir de la ville de Syout, la montagne Libyque s'éloigne davantage du fleuve en se portant vers l'ouest. La plage, recouverte de sables mobiles, s'élargit de plus en plus par-tout où ces sables n'ont point rencontré de plantes ou d'arbustes qui arrêtent leur cours. Chassés par les vents d'ouest et de nord-ouest, ils poussent en quelque sorte devant eux le terrain propre à la culture; sinon ils s'accumulent en dunes, ainsi qu'on le remarque sur la rive gauche du canal de Joseph.

Ce canal commence à Darout el-Cheryf, et suit parallèlement au Nil, le pied de la montagne, sur une longueur

d'environ dix-neuf myriamètres. Il reste entre ce canal et le Nil un espace de terres cultivables de douze kilomètres de largeur réduite : ces terres, pouvant être facilement arrosées, sont les plus productives de l'Égypte moyenne.

Pendant que le Nil, à partir de l'origine du canal de Joseph, prolonge son cours en s'appuyant au pied de la montagne escarpée et quelquefois coupée tout-à-fait à pic, qui forme sa rive droite, le canal de Joseph sert en quelque sorte de limite à la plaine sablonneuse par laquelle la chaîne Libyque se termine. Cette chaîne se retournant au nord-est, à la hauteur de Beny-Soueyf, rétrécit la vallée d'Égypte; mais, comme elle présente dans la largeur de ce coude une ouverture dont le sol se trouve presque de niveau avec celui de la vallée, on y a fait passer une dérivation de ce canal, dont les eaux ont ainsi fertilisé une nouvelle province que le travail des hommes a conquise sur le désert. C'est l'ancien nome Arsinoïte, aujourd'hui le Fayoum; il est enfermé au nord et au midi par le prolongement des deux côtés de la gorge d'el-Lâhoun, qui forment deux grandes courbes concaves. L'espace cultivable qu'elles comprennent, est à-peu-près de quatorze à quinze kilomètres de rayon.

Le milieu de ce terrain est une espèce de plateau séparé, au nord et à l'est, des montagnes qui l'environnent, par une longue vallée, dont une partie constamment submergée forme ce que les habitans du pays appellent *Birket el-Qeroun*, c'est à-dire *Lac de Caron*.

Un vallon plus petit contourne aussi le même plateau à l'ouest et au midi : il est séparé du lac de Caron par un isthme au moyen duquel le Fayoum se trouve, en quelque sorte, attaché au désert Libyque, du côté de l'ouest.

La montagne qui borde cette province au nord et à l'est, présente un escarpement continu, tandis que la montagne opposée s'incline doucement jusqu'à son sommet, éloigné de quinze ou seize myriamètres du terrain cultivé.

Après avoir dépassé la gorge par laquelle une partie de ses eaux entre dans le Fayoum, le canal de Joseph continue de suivre le pied de la colline qui forme le bord occidental de la vallée. Cette colline, en se rapprochant du Nil, semble devenir plus escarpée; sa crête s'étend en formant un grand plateau horizontal, qui sépare la vallée d'Égypte de la province de Fayoum.

Les premières pyramides que l'on aperçoit en descendant du Sa'yd, sont bâties sur le bord de ce plateau : elles ne se montrent d'abord que de loin en loin; elles deviennent plus nombreuses et se groupent dans la plaine de Saqqârah, dont les hauteurs dominent l'ancien emplacement de *Memphis;* enfin les trois plus grandes couronnent une espèce de cap que présente la montagne Libyque à la hauteur du Kaire.

Le terrain cultivable renfermé entre le Nil et le prolongement du canal de Joseph dont nous venons de parler, n'a guère que cinq à six kilomètres de largeur réduite ; largeur qui cependant est encore plus considérable que celle du terrain cultivable qui forme, sur la rive opposée, la province actuelle d'Atfyeh. Les gorges dont la chaîne Arabique est entrecoupée à l'orient de cette dernière province, offrent plusieurs communications faciles avec la mer Rouge ; quelques monastères de Chrétiens Qobtes sont encore établis dans ces montagnes : on y retrouve aussi d'anciennes routes qui servaient au transport des matériaux tirés de différentes carrières qui paraissent y avoir été exploités.

La haute Égypte et l'Égypte moyenne se réduisent, comme on voit, à une vallée étroite, au fond de laquelle le Nil est encaissé. La longueur de cette vallée, depuis l'île de *Philæ* jusqu'aux grandes pyramides, entre les 24ᵉ et 30ᵉ degrés de latitude, est d'environ quatre-vingt-six myriamètres en suivant les sinuosités du fleuve.

Au-delà du cap où sont bâties les grandes pyramides, la montagne Libyque, qui jusque-là se dirige du midi au nord, se retourne au nord-ouest, tandis que la montagne Arabique, désignée sous le nom de *Moqattam*, c'est-a-dire *Montagne taillée*, à cause sans doute de la face abrupte qu'elle présente presque par-tout, se retourne carrément à l'est, immédiatement après avoir dépassé l'embouchure de la vallée de l'Égarement, la plus septentrionale de celles qui conduisent du Nil à la mer Rouge. Ainsi les directions de ces deux chaînes de montagnes forment entre elles, à partir de ce point, un angle d'environ cent quarante degrés, et comprennent une vaste baie, au milieu de laquelle s'étend jusqu'à la mer Méditerranée la portion de l'Égypte appelée *le Delta*. Cette étendue de terrain, susceptible de culture, n'atteint pas le pied des montagnes qui ont été les côtes primitives de cette baie : elle en est séparée, à l'ouest, par un espace inculte que des sables transportés de l'intérieur de la Libye ont envahi depuis long-temps et continuent d'envahir, et, à l'est, par une partie de la plaine déserte de l'isthme de Suez.

Le Nil, à vingt-cinq kilomètres du Kaire, en un lieu appelé *le Ventre de la Vache*, se partage aujourd'hui en deux branches principales. La première se dirige d'abord au nord-ouest, s'incline ensuite vers le nord, et se rend à la mer au-dessous de la ville de Rosette, après un cours développé de

vingt myriamètres environ. La seconde, dont le développement est un peu plus considérable, coule directement au nord, sépare en deux parties presque égales le territoire de la basse Égypte, et se jette dans la mer au-dessous de Damiette. Ces deux branches du Nil prennent le nom des deux villes où elles ont leurs embouchures.

La branche de Rosette se prolonge parallèlement à la limite du désert Libyque, jusqu'à une distance de deux ou trois kilomètres du village de Terrâneh, à sept myriamètres du Kaire : c'est à ce point que se termine contre une digue le canal des pyramides ou d'el-A'sarah, qui n'est autre chose que le prolongement du canal de Joseph ; il arrête dans la partie inférieure de son cours, comme dans l'Égypte moyenne, les sables qui viennent de l'ouest; la stérilité de toute sa rive gauche, qui en est recouverte, contraste de la manière la plus frappante avec la fertilité des campagnes de la rive opposée, qui peuvent être arrosées facilement, soit par des dérivations de ce canal, soit par des dérivations immédiates du fleuve.

A partir de Terrâneh jusqu'à l'origine du canal de la province de Bahyreh, que l'on rencontre à trois myriamètres plus bas, c'est le Nil lui-même qui s'oppose à l'invasion des sables : ils sont arrêtés par la ligne de roseaux dont sa rive gauche est bordée, et s'y amoncellent en dunes presque abruptes.

Le canal de la Bahyreh, qui se dirige ensuite au nord-ouest jusqu'au lac Maryout, autrefois *Mareotis,* semble uniquement destiné à protéger l'Égypte contre l'invasion de ces mêmes sables, tandis que la branche de Rosette, se portant directement au nord, traverse une vaste plaine qu'elle fertilise par de nombreuses dérivations, dont les plus considé-

rables sont, à l'ouest, les canaux de Damanhour, de Rahmânyeh et de Deyrout.

Le premier de ces canaux, après un développement de quatre myriamètres, se termine à la ville dont il porte le nom; le second, qui arrose la partie la plus fertile de l'intérieur de la province, sert à approvisionner d'eau du Nil les citernes d'Alexandrie; enfin le troisième se jette dans le lac d'Edkoû.

La portion de l'Égypte comprise entre le désert Libyque et la branche de Rosette n'est point immédiatement contiguë à la mer; elle en est séparée, en allant de l'ouest à l'est, par l'ancien lac *Mareotis,* le lac Ma'dyeh ou d'Abouqyr, et le lac d'Edkoû.

Les deux premiers ne sont séparés l'un de l'autre que par une langue de terre fort étroite, sur laquelle est établie la partie inférieure du canal de Rahmânyeh ou d'Alexandrie. Entre ces deux lacs et la mer, court, du sud-ouest au nord-est, une chaîne continue de rochers calcaires, qui est le prolongement de la côte d'Afrique. Une des anfractuosités qu'elle présente, est couverte par l'ancienne île de *Pharos,* et forme le port d'Alexandrie. La même bande de rochers calcaires se prolonge de deux myriamètres au-delà de ce port, jusqu'au fort d'Abouqyr, devant lequel est situé l'îlot qui termine cette chaîne.

Le rivage d'Égypte, en se prolongeant à l'est depuis la rade d'Abouqyr, ne présente aucun banc de matière solide qui puisse résister aux efforts de la mer : ce n'est plus qu'une plage sablonneuse, qui s'élève à peine au-dessus des eaux, et derrière laquelle le terrain plus déprimé est submergé pendant une grande partie de l'année par les dérivations du Nil,

depuis Rahmânyeh jusqu'à Rosette. Cette espèce de lagune est le lac d'Edkoû, dont nous avons déja parlé.

Le Delta proprement dit, compris dans l'angle que forment les branches de Rosette et de Damiette, est arrosé par différens canaux, qui sont, pour la plupart, tirés de cette dernière branche. Le plus méridional de ces canaux est celui de Menouf, qui prend son origine à un myriamètre du *Ventre de la Vache*, et se rend dans la branche de Rosette, au-dessous de Terrâneh: il coupe obliquement la pointe du Delta; et comme, à partir de cette pointe, les eaux qui suivent ce canal ne parcourent qu'environ cinq myriamètres, tandis qu'elles en parcourent six en suivant la branche de Rosette entre les mêmes extrémités, elles se trouvent naturellement entraînées par l'effet de cette plus grande pente, dans le canal de Menouf, qui deviendrait bientôt le seul chemin qu'elles suivraient, si l'on ne prenait pas soin d'entretenir la digue de Fara'ounyeh, placée à son origine dans le Nil pour régler convenablement le volume des eaux qui doivent y être introduites.

On trouve, en continuant de descendre la branche de Damiette, à six kilomètres de l'entrée du canal de Menouf, une seconde dérivation de cette branche. Ce second canal se dirige au nord-ouest, dans l'intérieur du Delta, sur la ville de Chybyn el-Koum, dont il prend le nom, et derrière laquelle il se partage en deux bras, l'un qui continue de suivre la même direction, jusqu'au lieu appelé *Farestaq*, où il se termine dans la branche de Rosette, après neuf myriamètres de cours; l'autre, appelé *canal de Melyg*, descend vers le nord, à Mehallet el-Kebyr, et se réunit, à environ vingt-cinq kilomètres de cette ville, au canal d'el-Ta'bânyeh.

Celui-ci est la troisième dérivation occidentale de la bran-

che de Damiette; elle a son origine entre les villes de Semennoud et de Mansourah, et se perd, à six myriamètres de cette origine, dans le lac Bourlos.

Ce lac ne reçoit pas seulement le canal del-Ta'bânyeh; il reçoit encore toutes les eaux qui, répandues dans l'intérieur du Delta par une multitude de petites dérivations immédiates du Nil, ou des quatre grands canaux de Menouf, de Chybyn el-Koum, de Melyg et d'el-Ta'bânyeh, ne sont point employées à l'irrigation des campagnes, ou dissipées par l'évaporation.

La plus grande longueur du lac Bourlos depuis le village de Berenbâl, situé presque en face de Rosette, et le village de Beltym, situé à la pointe la plus septentrionale de l'Égypte, est de six myriamètres; sa plus grande largeur, de trois. Sa surface est couverte d'une multitude d'îles qui servent de refuge aux pêcheurs.

Une langue de terre, ou plutôt une simple crête de sable, sur laquelle s'élèvent de petites dunes de distance en distance, sépare le lac Bourlos de la mer. Cette crête se prolonge, en s'amincissant de plus en plus, du sud-ouest au nord-est, depuis le boghâz ou l'embouchure de Rosette, jusqu'à celle du lac, à six myriamètres plus loin : c'est la seule ouverture par laquelle s'écoulent à la mer toutes les eaux de l'intérieur du Delta.

Au-delà de cette embouchure, la plage sablonneuse dont la côte est formée, s'élargit tout-à-coup : les dunes s'y élèvent davantage, à l'abri des plants de palmiers et de vignes que cultive la population de douze ou quinze villages qui dépendent tous de celui de Beltym, autour duquel ils se groupent. Ces établissemens couvrent le cap Bourlos, la pointe la plus septentrionale de l'Égypte : quand on les a dépassés, la

plaine de sable qui borde la mer, court vers le sud-est, sur la largeur d'un myriamètre environ; et c'est en cheminant à travers cette plaine inculte, dont une ramification du canal d'el-Ta'bânyeh arrête l'extension dans les terres du Delta que l'on arrive à l'embouchure de la branche de Damiette, après une marche de huit myriamètres environ.

Nous venons d'indiquer les principaux canaux dérivés de la rive gauche de cette branche; nous allons suivre le même ordre dans l'indication de ceux qui sont dérivés de la rive droite pour arroser les provinces orientales de l'Égypte.

Le premier, en remontant jusqu'au Kaire, est celui qui traverse cette ville, arrose la plaine d'*Heliopolis,* alimente le lac des Pélerins, et vient enfin se jeter, après un cours de trois myriamètres et demi, dans le canal d'Abou-Meneggy, qui sert spécialement aujourd'hui à l'arrosage de la province de Qelyoub. La prise d'eau de ce second canal est à dix kilomètres du Kaire : il se dirige d'abord vers le nord, sur deux myriamètres environ de développement; s'inclinant ensuite au nord-ouest, il passe à Belbeys, et se prolonge, en bordant le désert, jusqu'à l'entrée d'une vallée qui court directement de l'ouest à l'est, à travers l'isthme de Suez, jusqu'au bassin des lacs amers, où elle débouche. On retrouve dans cette vallée les vestiges d'un ancien canal auquel la dérivation d'Abou-Meneggy semble avoir été destinée autrefois à fournir des eaux : cette même dérivation se prolonge ensuite vers l'ancienne ville de Bubaste, au-delà de laquelle sa direction laisse reconnaître, jusqu'aux marais de Péluse, où elle se perd, les vestiges de la branche la plus orientale du Nil, que le temps a oblitérée, et dont le développement peut être environ de seize myriamètres.

Les deux canaux d'*Heliopolis* et d'Abou-Meneggy ont leur origine au-dessus du *Ventre de la Vache*. C'est à environ un myriamètre au-dessous que l'on trouve, en descendant la branche de Damiette, l'entrée du canal de Moueys : il se dirige au nord-est entre les deux provinces de Charqyeh et de Mansourah, et se termine, à douze myriamètres de son origine, dans le lac Menzaleh, après avoir baigné les ruines de l'ancienne ville de *Tanis*, à quinze kilomètres au-dessus de son embouchure.

Entre ces ruines et celles de Mendès, qui en sont éloignées de trois myriamètres à l'ouest, la plaine de Daqahlyeh est inondée communément pendant huit mois de l'année par les eaux de plusieurs canaux d'irrigation qui y aboutissent.

Le canal de Moueys supplée à l'arrosage de la plus grande partie des terres situées sur sa rive gauche, de sorte que la branche de Damiette n'est appauvrie d'aucune autre dérivation importante depuis l'entrée de ce canal jusqu'à la ville de Mansourah, située à dix myriamètres plus loin. Là commence le canal d'Achmoun, qui se dirige à l'orient sur les ruines de Mendès, et se prolonge ensuite au milieu d'une lisière de terres cultivables, de deux ou trois kilomètres de large, resserrée au sud par le marais de Daqahlyeh et au nord par le lac Menzaleh, où il se jette après un cours de six myriamètres.

A partir de Mansourah, le Nil se prolonge de sept myriamètres environ jusqu'à son embouchure, à quinze kilomètres au-dessous de Damiette. La portion de l'Égypte comprise entre cette branche du fleuve et la plaine inculte de l'isthme de Suez se termine, du côté de la mer, comme le Delta proprement dit, par un grand lac dont nous avons déja parlé et

qui a reçu son nom de la ville de Menzaleh, située sur sa rive méridionale. Ce lac, couvert d'un grand nombre d'îlots, s'étend du nord-ouest au sud-est, depuis Damiette jusqu'à la plaine de Péluse, sur une longueur de cinq myriamètres et demi; sa largeur moyenne est environ du double. Les eaux de l'intérieur qu'il reçoit, se dégorgent à la mer par trois embouchures ouvertes dans la crête de sable qui l'en sépare. Ces trois ouvertures sont, en allant de l'ouest à l'est, celles de Dybeh, de Gemyleh et d'Omm-fâreg, et chacune d'elles correspond précisément à l'extrémité de chacun des canaux d'Achmoun, de Moueys, et de l'ancienne branche Pélusiaque. Le prolongement de leur cours à travers les eaux du lac se distingue aisément, lors de l'inondation, par l'eau douce qu'on y puise, tandis que, hors de ces courans, l'eau est plus ou moins saumâtre.

L'embouchure du Nil à Damiette est, comme celle de la branche occidentale de ce fleuve, en saillie sur la côte; elle s'avance même un peu plus vers le nord. A droite de cette embouchure commence la bande sablonneuse qui forme la digue extérieure du lac Menzaleh : elle court du nord-ouest au sud-est, et ne diffère de celle du lac Bourlos qu'en ce qu'elle est beaucoup plus étroite et que les dunes y sont beaucoup plus rares.

La basse Égypte, telle que nous venons d'essayer de la décrire, présente, comme on voit, une vaste plaine triangulaire, traversée du midi au nord par le Nil, qui se bifurque vers le sommet de ce triangle : elle est sillonnée dans tous les sens par une multitude de canaux qui tous tirent leur origine du fleuve; et leurs eaux, avant de se rendre à la mer, entretiennent, derrière la crête sablonneuse qui en forme la côte, une suite de lacs et de marécages.

Cette côte, depuis Alexandrie jusqu'à Péluse, présente une grande courbe de trente myriamètres de développement, tournant au nord sa convexité, sur laquelle sont très-sensiblement en saillie la pointe d'Abouqyr et les deux embouchures actuelles du Nil. Précisément au milieu de la distance qui les sépare se trouve le cap Bourlos, point le plus septentrional de l'Égypte.

Il est situé sous le même méridien que les pyramides, à une distance de dix-huit myriamètres, comprise entre les 29° 59′ et 31° 35′ 30″ de latitude. Ainsi l'Égypte entière, depuis la dernière cataracte jusqu'à la pointe de Bourlos, comprend en latitude un intervalle de sept degrés et demi, et une superficie d'environ 2,100,000 hectares de terrains cultivables.

Environnée, de tous les côtés, de déserts privés d'eau douce, l'Égypte n'est habitable que parce qu'elle sert en quelque sorte de lit à la partie inférieure du Nil. C'est aux débordemens périodiques de ce fleuve qu'elle doit la fertilité qui l'a rendue justement célèbre.

Ce débordement annuel fut dans l'antiquité l'objet de l'admiration des voyageurs et des historiens; et sa cause, une espèce de mystère dont ils donnèrent des explications diverses. On sait aujourd'hui que ce phénomène est dû aux pluies qui tombent en Abyssinie : elles submergent pendant plusieurs mois de l'année un immense plateau; elles s'écoulent dans le bassin du Nil, leur dernier réceptacle; et ce fleuve, chargé seul d'en porter le tribut à la mer, les verse à son tour sur l'Égypte.

On commence vers le solstice d'été à s'apercevoir de la crue du Nil, au-dessous de la dernière cataracte. Cette crue de-

vient sensible au Kaire dans les premiers jours de juillet : c'est là que les Français ont pu en observer la marche au moyen du nilomètre établi à l'extrémité méridionale de l'île de Roudah.

Pendant les six ou huit premiers jours, il croît par degrés presque insensibles; bientôt son accroissement journalier devient plus rapide : vers le 15 d'août, il est à-peu-près arrivé à la moitié de sa plus grande hauteur, qu'il atteint ordinairement du 20 au 30 de septembre. Parvenu à cet état, il y reste dans une sorte d'équilibre pendant environ quinze jours, après lesquels il commence à décroître beaucoup plus lentement qu'il ne s'était accru. Il se trouve, au 10 de novembre, descendu de la moitié de la hauteur à laquelle il s'était élevé; il baisse encore jusqu'au 20 du mois de mai de l'année suivante. Ces variations cessent de se faire apercevoir sensiblement, jusqu'à ce qu'il recommence à croître à-peu-près à la même époque que l'année précédente.

Lorsque le Nil entre en Égypte, au moment de sa crue, ses eaux bourbeuses sont chargées de sable et de limon qui leur donnent une couleur rougeâtre; elles conservent cette couleur pendant toute la durée du débordement, et ne la perdent que peu-à-peu, à mesure qu'elles rentrent dans leur lit; elles redeviennent enfin parfaitement claires.

Nous avons représenté graphiquement la loi de l'accroissement et du décroissement du Nil, tels qu'ils ont été mesurés au Kaire pendant les années 1799, 1800 et 1801 (*fig.* 1re *de la planche jointe à ce Mémoire*). On voit que cette loi est indiquée par une courbe sinueuse assez régulière. Les petites inflexions qu'elle présente en sens opposé, pendant la durée de la crue, proviennent de ce que le volume du fleuve, avant

d'arriver au Caire, est diminué de toutes les dérivations qui en sont faites pour alimenter les différens canaux de la haute Égypte. Ces anomalies sont moins sensibles pendant le décroissement, parce qu'aucune cause de la même nature n'en altère la loi. On voit aussi, en comparant les crues d'une année à l'autre, qu'il y a de grandes différences entre elles. Celle de 1799, par exemple, que l'on regarde comme une des plus faibles, parvint à sa plus grande hauteur le 23 septembre, et ne s'éleva que de $6^m,857$ au-dessus des basses eaux. Celle de 1800, qui fut au contraire comptée parmi les plus fortes, parvint, le 4 octobre, à $7^m,961$ de hauteur. On peut donc, sans erreur sensible, fixer la crue moyenne du Nil entre la crue de l'année 1799 et celle de 1800 que nous venons de rapporter : elle sera ainsi de $7^m,419$. (1)

Si, parmi les prodigieux ouvrages exécutés en Égypte, les canaux d'irrigation ne sont pas ceux qui ont excité le plus d'admiration, du moins il est probable que ce sont les plus anciens; et il est certain que, sans ces travaux exclusivement consacrés à l'utilité publique, la population de cette contrée ne se serait jamais élevée au point où il paraît qu'elle s'éleva autrefois. Ces canaux sont dérivés de différens points du Nil sur l'une et l'autre de ses rives, et ils en portent les eaux jusqu'au bord du désert. De distance en distance, à partir de cette limite, chaque canal d'irrigation est barré par des digues transversales qui coupent obliquement la vallée en s'appuyant sur le fleuve. Les eaux que le canal conduit contre l'une de ces digues, s'élèvent jusqu'à ce qu'elles aient

(1) Cette hauteur de $7^m,419$ équivaut à treize coudées dix-sept doigts de la colonne du Meqyâs et à quatorze coudées du nilomètre d'Éléphantine.

atteint le niveau du Nil au point d'où elles ont été tirées : ainsi tout l'espace compris dans la vallée entre la prise d'eau et la digue transversale forme, pendant l'inondation, un étang plus ou moins étendu. Lorsque cet espace est suffisamment submergé, on ouvre la digue contre laquelle l'inondation s'appuie : les eaux se déversent, après cette opération, dans le prolongement du canal au-dessous de cette digue ; et elles continueraient de s'y écouler, si, à une distance convenable, elles n'étaient pas arrêtées par un second barrage, contre lequel elles sont obligées de s'élever de nouveau pour inonder l'espace renfermé entre cette digue et la première. Quelquefois un canal dérivé immédiatement du Nil au-dessous de celle-ci rend cette inondation plus complète.

Ces digues transversales que l'on voit se succéder de distance en distance, en descendant le Nil, sont dirigées ordinairement d'un village à l'autre, et forment une espèce de chaussée, au moyen de laquelle ces villages communiquent entre eux dans toutes les saisons de l'année, parce qu'elle est assez élevée au-dessus de la plaine pour surmonter les plus hautes eaux.

La vallée de la haute Égypte présente, comme on voit, lors de l'inondation, une suite d'étangs ou de petits lacs disposés par échelons les uns au-dessous des autres, de manière que la pente du fleuve, entre deux points donnés, se trouve, sur ses deux rives, distribuée par gradins; on voit que l'on a fait pour l'irrigation de ce pays, précisément le contraire de ce qu'on ferait pour opérer le desséchement d'une vallée qui serait obstruée par des barrages consécutifs.

Lorsque la largeur de la vallée est très-considérable, comme cela a lieu sur sa rive gauche, depuis Syout jusqu'à

l'entrée du Fayoum, le canal dérivé du Nil suit le plus près possible la limite du désert sans aucun barrage transversal; mais alors il devient semblable à une nouvelle branche du Nil; et l'on dérive de cette branche, comme du fleuve lui-même, les canaux d'irrigation qui vont porter contre des digues secondaires les eaux destinées à inonder le pays.

Ce système d'arrosement n'éprouve de modification que dans la province du Fayoum. La configuration de son sol permet d'y conduire les eaux du canal de Joseph sur un point culminant, d'où elles sont distribuées par une multitude de petits canaux, pour fertiliser le territoire de chacun des villages dont est couverte la plaine inclinée qui borde le Birket el-Qeroun à l'ouest et au midi.

Les eaux ne doivent couvrir le sol que pendant un certain temps, afin que les travaux d'agriculture puissent se faire dans la saison convenable. Le desséchement des terres s'opère naturellement alors par la rupture des digues qui soutenaient les eaux; et c'est après avoir séjourné plus ou moins dans les espèces de compartimens en échelons compris entre les digues consécutives, que le superflu de l'irrigation va se perdre dans les lacs et marécages qui servent de bornes à la partie septentrionale du Delta.

L'indication que nous venons de donner de la disposition respective des canaux et des digues de l'Égypte supérieure, explique suffisamment comment on peut arroser une étendue plus ou moins considérable de pays, suivant que la crue du Nil est plus ou moins forte.

Le même système d'irrigation est suivi dans la basse Égypte. Les grands canaux dérivés des deux branches de

Rosette et de Damiette alimentent à leur tour les dérivations secondaires, dont les eaux sont soutenues par des digues qui traversent la campagne dans tous les sens en allant d'un village à l'autre; chacun d'eux s'élève au-dessus de ces digues, comme une espèce de monticule qu'accroissent, chaque année, les dépôts d'immondices et de décombres que les Égyptiens sont dans l'usage d'accumuler autour de leurs habitations.

SECTION II.

Volume des Eaux du Nil. — Nivellemens transversaux dans la Vallée. — Sondes du Terrain.

Ce que nous avons dit, dans la section précédente, de l'aspect extérieur de l'Égypte, pouvait être remarqué par tous les voyageurs qui ont parcouru ce pays en observateurs attentifs; mais les recherches qui nous restaient à faire sur le régime du Nil, sur le relief et la pente transversale de la vallée qu'il arrose, enfin sur la nature et la profondeur du sol qui la recouvre, exigeaient une réunion de moyens que des voyageurs isolés n'avaient jamais eue à leur disposition, et que les circonstances mettaient à la nôtre.

Je partis du Kaire le 29 ventôse an VII (19 mars 1799), avec plusieurs membres de l'Institut et de la Commission des sciences et arts, pour aller rejoindre la division du général Desaix, qui occupait la haute Égypte. Les recommandations dont nous étions munis pour ce général, son empressement à concourir à l'exploration d'une contrée dont il paraissait avoir consolidé la conquête, et sur-tout son vif

desir de faire tourner à la gloire de la France les divers résultats de l'expédition à laquelle il était attaché, nous donnaient l'assurance de trouver près de lui toutes les ressources nécessaires à l'objet de notre mission : il réalisa nos espérances à cet égard; et MM. les généraux qui commandaient sous ses ordres (1), doivent partager ici, pour l'accueil bienveillant que nous en avons reçu, l'hommage de reconnaissance que nous rendons à sa mémoire.

Nous étions embarqués sur le Nil; mais la faiblesse du vent du nord, à l'aide duquel nous devions remonter le courant, nous permettait souvent de mettre pied à terre et de suivre à pied notre barque, qui était tirée à la cordelle.

Les vents contraires, assez fréquens dans cette saison, nous obligèrent même plusieurs fois de nous arrêter, en attendant qu'un vent favorable recommençât à souffler. Le 7 germinal (27 mars), une de ces stations forcées nous laissa, un peu au-dessous de la ville de Manfalout, le temps de lever une section transversale du Nil *(fig. 2)*, et d'en mesurer la vîtesse.

Cet endroit était d'autant plus propre à cette opération, que le lit du fleuve y est rectiligne sur plusieurs kilomètres de longueur. Les talus de ses berges furent trouvés inclinés l'un et l'autre de deux fois leur hauteur, et la vîtesse superficielle du courant, au fil de l'eau, de $0^{m},75$ par seconde; ce qui suppose une vîtesse moyenne de $0^{m},60$ environ.

Ce talus incliné de deux pour un, s'élevant depuis la surface des basses eaux jusqu'au niveau des plus grandes inon-

(1) MM. les généraux Zayoncheck, depuis vice-roi de Pologne, Béliard, Davoust, Donzelot, Friant.

dations, est évidemment celui qui convient au régime du Nil; et cette observation peut concourir à la détermination de ce régime.

La largeur du fleuve au niveau de l'eau était de 678 mètres, et sa section vive de 1129 mètres superficiels, lesquels, multipliés par la vîtesse de $0^{m},60$, donnent une dépense de 678 mètres cubes par seconde.

Nous arrivâmes à Syout le lendemain 8 germinal (28 mars): et le séjour de près de deux mois que nous y fîmes, nous permit d'y multiplier nos observations.

La largeur totale de la vallée sur ce point est de dix mille mètres, dans lesquels celle du lit du Nil est comprise pour huit cents. Il coule à trois mille mètres de la montagne Libyque, et à six mille environ de la montagne opposée. Cette plaine est coupée entre le fleuve et les deux déserts qui la bordent par plusieurs canaux, dont le principal sur la rive gauche est celui qui est dérivé du Nil à el-Saouâqyeh, au-dessous de Girgeh. Il suit le pied de la montagne occidentale, où les catacombes de Syout ont été pratiquées. Sa largeur est d'environ cent soixante mètres.

Après avoir passé sur la rive droite du fleuve, on traverse, à six cents mètres de distance, en allant vers la montagne Arabique, un premier canal; on en traverse un second à cinq cents mètres plus loin : ils peuvent avoir l'un cent cinquante et l'autre deux cents mètres de largeur.

Plusieurs digues transversales s'élèvent d'un mètre ou d'un mètre et demi au-dessus du terrain naturel, lequel, au surplus, est toujours d'environ $0^{m},80$, ou au moins de 0,60 plus élevé en amont qu'en aval de ces digues.

La plus considérable se trouve sur la rive gauche du Nil;

elle est destinée à soutenir, entre ce fleuve et la montagne Libyque, les eaux du canal d'el-Saouâqyeh : elle s'élève à $1^{m},20$ au-dessus du sol ; ce qui suppose que les plus hautes inondations ne parviennent point à cette hauteur.

Le 11 germinal (31 mars), nous mesurâmes, au port de Syout, la vîtesse et le volume des eaux du Nil, entre deux sections transversales distantes l'une de l'autre de trois cent trente mètres. La largeur de la section d'en bas fut trouvée de deux cent quarante-cinq mètres, et sa superficie de six cent quatre mètres *(fig. 3)*; la largeur de la section d'en haut fut trouvée de cent soixante-dix-neuf mètres, et sa surface de cinq cent vingt mètres quarrés *(fig. 4)*: la section moyenne était, par conséquent, de cinq cent soixante-deux mètres quarrés.

Un flotteur abandonné au fil de l'eau parcourut, en trois minutes trente-sept secondes, la distance de trois cent trente mètres, comprise entre les deux sections extrêmes; la vîtesse superficielle était donc de $1^{m},52$ par seconde.

Si l'on diminue cette vîtesse superficielle d'un cinquième, on obtient $1^{m},21$ de vîtesse moyenne, laquelle, multipliant la section vive de 562 mètres, donne, pour le volume des eaux du Nil au port de Syout, 679 mètres cubes, résultat qui présente, avec celui de l'expérience faite au-dessous de Manfalout, un accord singulier que l'on ne peut attribuer qu'à une sorte de hasard, malgré le soin qu'on apporta aux opérations dont ces résultats sont déduits.

Le volume du Nil s'accroît considérablement lors de l'inondation; sa surface s'élève de six mètres au-dessus des basses eaux dans le plan de la section transversale où notre première jauge a été faite *(fig. 2)*. La superficie de cette section

se trouve ainsi augmentée de quatre mille soixante-huit mètres; elle est alors, par conséquent, de cinq mille cent quatre-vingt-dix-sept mètres carrés. Le pourtour developpé du lit du fleuve est en même temps de sept cent six mètres; et, comme sa pente varie des basses aux hautes eaux dans le rapport des nombres 5284 et 12863, on trouve aisément, par une application des règles de l'hydraulique, que la vîtesse moyenne du Nil, à cette époque et dans cet endroit, est de $1^{m},97$, et son produit, par seconde, de 10247 mètres cubes (1).

---

(1) Si l'on appelle S la section vive d'un courant d'eau, P le périmètre de cette section, h la pente de ce courant, u sa vîtesse uniforme, et m un coëfficient constant donné par l'expérience, la condition de l'uniformité du mouvement sera, comme on sait, exprimée par cette formule:

$$Sh = mPuu.$$

On a de même, pour un autre état du même courant,

$$S'h' = mP'u'u';$$

équation dans laquelle les lettres accentuées expriment des quantités de même espèce que celles qui sont exprimées dans la première formule par les mêmes lettres sans accens.

Supposons que ces deux formules s'appliquent à l'état du Nil lors des basses et lors des hautes eaux.

Les quantités S, P, et u ont été observées pour la section transversale du Nil (*fig.* 2), levée le 7 germinal; et nous avons conclu les quantités S' et P' de l'indication que nous avons eue sur les berges du Nil, de la hauteur à laquelle il s'élève lors de l'inondation.

Quant aux pentes h et h', elles n'ont point été déterminées pour cette section; mais on peut supposer, sans avoir de grandes erreurs à craindre, qu'elles suivent entre elles le même rapport que les pentes de la partie inférieure du fleuve aux mêmes époques, depuis le Kaire jusqu'à la mer. Or ces

Nous avons trouvé que, lors des basses eaux, il était à peu près de 678 mètres; ces produits varient donc, du solstice d'été à l'équinoxe d'automne, dans le rapport de 1 à 15 environ; mais il faut observer que les jauges que nous venons de rapporter ont été faites à une distance de cinquante-cinq myriamètres de la dernière cataracte, limite méridionale de l'Égypte; et que le Nil, tel que nous venons d'en calculer le volume, est appauvri de toutes les dérivations déja faites dans toute cette étendue, pour arroser ses deux rives; de sorte qu'on peut regarder le volume de ce fleuve, au moment où il est parvenu à son *maximum* d'ac-

---

pentes, d'après les nivellemens de notre collègue M. Le Père, sont, lors des basses eaux, de $5^{m},284$, et lors de l'inondation, de $12^{m},863$.

C'est au moyen de ces données qu'il s'agit d'assigner la vîtesse u' du Nil, correspondante au profil de la *fig.* 2 à cette dernière époque.

On tire des deux équations précédentes,

$$u'\,u' = \frac{P\,u\,u\,S'\,h'}{P'\,S\,h};$$

mais on a en valeurs numériques :

$$P = 680^{\text{mètr.}}$$
$$S = 1129^{\text{mètr. quarrés.}}$$
$$h = 5^{m},284.$$
$$u = 0^{m},60^{\text{par seconde.}}$$
$$P' = 706^{\text{mètr.}}$$
$$S' = 5197^{\text{mètr. quarrés.}}$$
$$h' = 12^{m},863.$$

lesquelles, étant substituées dans la formule, donnent,

$$3^{\text{mètr. quarrés}},8855,$$

et, par conséquent, $u' = 1^{m},971$.

croissement, comme vingt fois au moins, plus considérable que lorsqu'il commence à croître.

Les deux berges du Nil, comme celles de tous les autres fleuves, présentent dans le même profil transversal une inclinaison différente, toutes les fois que le courant ne se dirige point en ligne droite, ou n'est point encaissé entre des parois solides. Lorsque les observations que nous venons de rapporter ont été faites à Syout, la rive gauche était la plus abrupte, parce que le courant s'y portait; et cependant le talus de sa berge avait encore vingt-cinq mètres de base sur neuf mètres d'élévation : c'est une inclinaison d'environ trois mètres de base sur un de hauteur.

L'inclinaison de la rive opposée était beaucoup plus douce, parce que les matières chariées par le courant se déposaient sur cette rive en prenant le talus convenable à leur degré de ténuité : ainsi les sables les plus pesans formaient la base de ce talus sous l'inclinaison la plus forte; les sables les plus légers étaient placés au-dessus sous une inclinaison moindre; enfin le limon proprement dit formait la crête de la berge, et se raccordait horizontalement avec le terrain de la plaine.

Le profil de cette berge présentait, comme on voit *(fig. 3 et 4)*, une courbe convexe dont la pente totale vers le Nil était de dix mètres, sur un développement de six cent quarante : c'est une inclinaison réduite de $0^{m},016$ par mètre; rampe extrêmement douce et l'une des moindres que l'on soit dans l'usage de donner aux grands chemins.

Quant aux talus des berges des canaux d'irrigation qui ont été creusés à bras d'homme, ils ont ordinairement 50 mètres de longueur, sur $3^{m},50$ environ de hauteur verticale.

Lorsque ces canaux sont remplis d'eau, et que le Nil commence à baisser, on élève à leur tête un barrage en terre pour retenir les eaux qu'ils contiennent et les empêcher de s'écouler dans le fleuve; ce qui laisserait la campagne à sec pendant une partie de l'année. On ferme de la même manière les ouvertures qui avaient été pratiquées pour l'irrigation du sol inférieur, dans les digues transversales dont nous avons parlé plus haut : on conserve par ce moyen, sur plus ou moins d'étendue, les eaux nécessaires aux arrosemens des terres pendant le printemps et l'été; ces arrosemens sont d'autant moins pénibles, que le niveau de l'espèce de réservoir destiné à les alimenter se soutient plus haut au-dessus du Nil. Au mois de floréal an VII (mai 1799), par exemple, la surface de l'eau dans le canal d'el-Saouâqyeh, immédiatement en aval de la digue de Syout, n'était inférieure que de cinq mètres au sol de la plaine, tandis que le niveau du Nil était descendu à neuf mètres au-dessous.

Ces eaux, réservées d'une année à l'autre dans l'intérieur du pays, se trouvent dissipées par l'évaporation, ou perdues par des infiltrations souterraines, ou bien elles ont été employées utilement aux besoins de l'agriculture, lorsque le Nil recommence à croître de nouveau. Les dérivations qui sont faites de ce fleuve, ne sont donc pas destinées seulement à une irrigation naturelle et momentanée; elles doivent encore servir à des arrosemens artificiels, lorsque les terres ont été dépouillées de leurs premières récoltes : ainsi le débordement du Nil n'est pas pour les Égyptiens un bienfait dont la jouissance se borne à la durée de quelques mois; elle se prolonge dans toutes les saisons.

La crainte de la stérilité à laquelle l'Égypte serait condam-

née, si le Nil ne s'élevait pas assez pour entrer dans les canaux qui en sont dérivés, et les espérances qu'il fait naître quand il parvient à une hauteur suffisante, fournissent, comme on voit, l'explication des fêtes et des réjouissances annuelles dont la rupture des digues qui ferment les canaux, est généralement l'occasion.

Les divers renseignemens que nous venons de présenter sur la configuration extérieure du terrain, sont les résultats de plusieurs nivellemens entrepris dans la plaine de Syout : ils ont appris que la surface de cette plaine était à très-peu-près horizontale, et, comme nous l'avons déja dit, élevée d'environ neuf mètres au-dessus des basses eaux du Nil. Il nous restait à reconnaître par des sondes la nature du sol dont elle est formée. Pour y parvenir méthodiquement, on traça une ligne droite de 3260 mètres de longueur entre la montagne Libyque et le fleuve; on creusa sur cette ligne, de distance en distance, un certain nombre de puits verticaux où l'on pouvait aisément descendre, au moyen d'entailles pratiquées dans leurs parois, et reconnaître les couches superposées du terrain fouillé (*fig.* 5). Pour montrer maintenant jusqu'à quel point ces sondes ont été utiles à l'objet que nous avions en vue, il est nécessaire d'indiquer le résultat de chacune d'elles.

Le puits n° 1 a été creusé au fond du canal del-Saouâqyeh, qui se trouvait à sec à cette époque, en amont de la digue de Syout; on s'est enfoncé à trois mètres de profondeur dans une masse de limon noirâtre, semblable au sol cultivable : à cette profondeur, l'eau a surgi au fond du puits; ce qui a forcé d'en suspendre la fouille.

Ce puits était éloigné d'environ cent vingt mètres d'un étang

formé à l'aval de la digue, par la chûte des eaux du canal, lors de l'inondation. Cet étang, où les eaux séjournent pendant les plus grandes sécheresses de l'année, sert d'abreuvoir aux bestiaux. Le niveau de l'eau y était élevé de $0^m,83$ au-dessus du fond de la fouille dont il vient d'être question.

Le puits n° 2, à deux cents mètres plus loin en allant vers le Nil, fut creusé, à partir du sol, dans une couche de limon de $6^m,41$ d'épaisseur; cette couche reposait sur une masse de sable gris quartzeux et micacé, que l'on fouilla sur une profondeur de $1^m,25$, à laquelle l'eau commença à paraître.

A trois cent soixante mètres de distance du précédent, le puits n° 3 fut creusé dans une couche de limon de $6^m,25$ d'épaisseur, qui était soutenue par une couche de la même substance mêlée de sable gris micacé : on s'enfonça dans celle-ci de $2^m,19$, avant d'être arrêté par l'eau.

En suivant la même direction, et à quatre cent trente mètres plus loin, au-delà d'un canal d'irrigation dérivé du Nil, on rencontre la digue qui couvre la ville de Syout : le puits n° 4 fut creusé dans le massif de cette digue; on la trouva composée, à partir du sol, de terres rapportées, de décombres, de fragmens de briques et de débris de vases de terre. Ce remblai, de $3^m,89$ de hauteur, est assis sur un massif de limon du Nil : la fouille y fut continuée de $3^m,36$, avant de rencontrer l'eau.

A trois cent quarante mètres au-delà, on traversa d'abord, en creusant le puits n° 5, une couche du limon du Nil, très-pur, de $3^m,35$ de hauteur; on traversa ensuite une masse de limon mêlée de sable jusqu'à $2^m,76$ de profondeur, où l'eau commença à se montrer.

Le puits n° 6, ouvert à quatre cents mètres du précédent, dans le milieu d'une rigole de dérivation, indiqua une couche superficielle de limon de 1^m^,30 d'épaisseur, reposant sur un lit de sable et de limon mélangés de mica : ce lit est soutenu lui-même par une masse de sable gris dans laquelle on s'enfonça de 2^m^,05, jusqu'à ce que l'on fut arrêté par l'eau.

En creusant le puits n° 7 à deux cent seize mètres, on trouva d'abord 1^m^,38 d'épaisseur de limon du Nil; puis une masse de sable variant de couleur et de grosseur, par bancs horizontaux : on s'y enfonça de 5^m^,13.

A deux cent quinze mètres de distance, toujours en descendant vers le Nil, le puits n° 8 fut ouvert dans un petit canal d'arrosement : on trouva d'abord 1^m^,50 d'épaisseur de limon pur; ensuite, comme dans la sonde précédente, une masse de sable plus ou moins mélangé de limon et de mica : l'eau vint à y surgir quand on s'y fut enfoncé de 3^m^,95.

Le puits n° 9 fut creusé à trois cent seize mètres du précédent; on trouva d'abord 2^m^,48 d'épaisseur de limon : le reste de la fouille fut ouvert dans plusieurs couches superposées de limon mélangé de sable, puis de sable pur. Les couches inférieures au sol avaient ensemble 3^m^,49 : l'eau se montra à cette profondeur.

A trois cent quatre mètres plus loin, on creusa le puits n° 10 : on perça d'abord 2^m^,35 d'épaisseur de limon, et ensuite, jusqu'à l'eau, 3^m^,217 de sable gris micacé.

Le puits n° 11, le plus rapproché du Nil, fut ouvert à trois cent soixante mètres du précédent : la couche supérieure, formée de limon, fut trouvée de 2^m^,24 d'épaisseur. On trouva au-dessous, avant d'arriver à l'eau, des couches

successives de limon mêlé de sable, de sable pur quartzeux et plus ou moins grenu, de sable fin mélangé de mica : elles avaient ensemble 6^{m},35 d'épaisseur.

Les sondes que nous venons de rapporter, ont été faites sur la rive gauche du Nil. On creusa aussi deux puits pour le même objet sur la rive opposée; nous les indiquerons en prolongement des précédens, sous les n°s 12 et 13.

Le puits n° 12 a été creusé au bord de la berge qui encaisse le fleuve dans ses crues : la fouille a présenté une couche de limon pur de 0^{m},694 d'épaisseur, qui reposait sur une couche de 2^{m},72 de sable micacé, mélangé d'un peu de limon; on trouva au-dessous 2^{m},16 de sable gris, 0^{m},11 de sable ferrugineux attirable à l'aimant; enfin on a été arrêté par l'eau, après s'être enfoncé de 1^{m},54 dans un mélange de sable et de limon.

Le puits n° 13 fut creusé sur le bord d'un grand canal, à huit cent quarante mètres plus loin en allant vers la montagne Arabique. On trouva d'abord 6^{m},33 d'épaisseur de limon pur; ensuite une couche de sable ferrugineux, mêlé de quartz et de mica, dans laquelle on pénétra de 1^{m},22 avant d'être arrêté.

La comparaison de ces différentes sondes donne lieu à deux remarques générales : la première, que le sol superficiel de la vallée est toujours composé, sur plus ou moins d'épaisseur, de limon noirâtre. C'est la plus plus légère de toutes les matières chariées par le Nil, et celle qui, troublant la transparence de ses eaux lors de ses crues, leur donne une couleur rousse. Cette couche superficielle de limon repose sur une masse de sable quartzeux gris, mélangé en certaines proportions de mica et de petites lamelles fer-

rugineuses attirables à l'aimant. Ce banc de sable, composé des matières les plus pesantes que le fleuve transporte, est ordinairement divisé en bandes d'épaisseurs différentes, séparées les unes des autres à-peu-près dans l'ordre de leurs pesanteurs spécifiques.

La seconde remarque est que l'eau n'a point surgi à la même profondeur au fond des puits qui ont été creusés. Si l'on rapporte le niveau de l'eau, dans chacun d'eux, à un plan horizontal élevé de 100^{m} au-dessus de la surface du Nil, prise le 16 floréal an VII (5 mai 1799), on pourra comparer ces deux niveaux entre eux, à l'aide du tableau suivant, qui indique aussi la profondeur des puits à partir du sol *(fig. 5)*:

N^{os} DES PUITS.	PROFONDEUR DES PUITS JUSQU'AU NIVEAU DE L'EAU.	ABAISSEMENT DU NIVEAU DE L'EAU AU-DESSOUS DU PLAN DE REPÈRE.
Rive gauche.		
Surface de l'étang au pied de la montagne...		96^{m},39.
N° 1.	3^{m},00.	97, 13.
N° 2.	7, 46.	97, 43.
N° 3.	8, 44.	98, 68.
N° 4.	7, 15.	97, 72.
N° 5.	6, 11.	98, 14.
N° 6.	3, 85.	97, 36.
N° 7.	6, 52.	97, 70.
N° 8.	5, 45.	97, 77.
N° 9.	5, 97.	97, 02.
N° 10.	5, 56.	97, 25.
N° 11.	8, 59.	99, 46.
Rive droite.		
Surface du Nil.	9, 00.	100, 00.
N° 12.	7, 95.	98, 89.
N° 13.	7, 54.	97, 40.

Ce tableau fait voir que les eaux de l'étang en aval de la digue de Syout sont supérieures de 3^{m},61 à la surface du Nil : cela provient de ce que les eaux de l'inondation qui arrivent au pied de la montagne Libyque par le canal d'el-Saouâqyeh, y sont retenues plus de temps que le fleuve n'en emploie à descendre du terme de sa plus grande hauteur à celui de son plus grand abaissement ; de sorte qu'il est déja descendu d'une quantité considérable, lorsque les terres de la plaine sont encore inondées. Ainsi, le 26 pluviôse an IX (15 février 1801), par exemple, l'inondation couvrait encore d'environ 0^{m},50 la campagne de Syout, tandis que le Nil était déja à la moitié de son décroissement ; de telle sorte que le niveau de l'inondation se trouvait élevé d'environ 6^{m},20 au-dessus de la surface du Nil.

Ce sont les eaux de cette inondation qui, filtrant à travers le sol, entretiennent la nappe que nous avons rencontrée au fond de nos puits, constamment au-dessous du niveau de l'eau du canal de Syout et de l'étang d'el-Saouâqyeh, mais toujours au-dessus du Nil. Cette nappe s'inclinerait, par conséquent, du pied de la montagne vers le milieu de la vallée, avec une sorte de régularité, si l'eau qui séjourne plus ou moins de temps dans les canaux intermédiaires dont la plaine est entrecoupée, ne s'infiltrait pas elle-même dans le terrain, et ne dérangeait pas l'inclinaison de la nappe dont il s'agit.

On observe cependant qu'à une petite distance du Nil, ce sont ses propres eaux qui s'infiltrent latéralement à travers le terrain, et viennent alimenter les puits les plus rapprochés de ses berges : tels sont les puits indiqués sous les n°s 9, 10, 11 et 12 ; les trois premiers sur la rive gauche, le quatrième

sur la rive droite : ils présentent, au surplus, cette particularité, que, dans la saison des basses eaux, leur surface se trouve au-dessus du niveau du fleuve, parce que les eaux qui, pendant son débordement, remontent par infiltration vers l'intérieur des terres, mettent plus de temps à descendre jusqu'au niveau du Nil pendant son décroissement, qu'il n'en met lui-même à décroître.

Quant à l'épaisseur du limon qui forme le sol cultivable de l'Égypte, nos sondes ont prouvé qu'elle est d'autant plus considérable, que l'on se rapproche davantage des bords de la vallée : par exemple, les puits n°s 2 et 3 présentent une épaisseur de $6^{m},41$ et de $6^{m},35$ de cette terre, tandis que le puits n° 10, qui n'est éloigné du Nil que de quatre cent cinquante mètres, n'a montré qu'une couche de limon de $2^{m},35$; et le puits n° 11, sur les bords du fleuve, une couche de $2^{m},24$ seulement.

Nous avons dit qu'on s'était arrêté, en creusant nos puits, lorsque l'eau avait commencé à y surgir. C'était toujours dans une masse sablonneuse qu'elle paraissait; mais cette masse, qui est évidemment de la même nature que les dépôts actuels du Nil, ne forme pas le sol primitif de la vallée, à la connaissance duquel nous voulions aussi parvenir.

Je fis exécuter, à ce dessein, une sonde en fer semblable à cette espèce de tarière pointue dont on se sert pour sonder les tourbières; on l'emmancha d'une perche de cinq mètres, et on l'enfonça de toute cette longueur dans les puits n°s 10 et 11 : les matières qu'elle rapporta firent voir qu'elle avait traversé le même banc de sable sur lequel nous avions trouvé que reposait le terrain cultivable. Il restait constant, par ces nouvelles sondes, que l'épaisseur de ce banc, vers le milieu

de la vallée, descendait de plus de onze mètres au-dessous de sa surface. Les bancs calcaires qui, selon toute apparence, en forment le sol primitif, s'enfonçant beaucoup plus bas, nous devions désespérer de les atteindre, et de les reconnaître à une grande distance des montagnes suivant le talus desquelles ils se prolongent, puisque nous n'avions point apporté les instrumens nécessaires, et que nous ne pouvions les faire exécuter à Syout; mais il était naturel de penser que le sol primitif de la vallée s'inclinant de part et d'autre vers son milieu, on trouverait ce sol à une profondeur d'autant moindre, que l'on se rapprocherait plus de ses bords. On a choisi, en conséquence, l'emplacement d'un puits de sonde à deux cent quatre-vingts mètres au-delà du terrain cultivable, entre sa limite et le pied de la montagne de Syout, dans une espèce d'anse qui, lorsque le régime du Nil n'était point encore établi, a dû être remplie d'alluvions anciennes de même nature que les graviers et cailloux roulés qui forment aujourd'hui le sol naturel du désert.

La bouche de ce puits était élevée de 2,m60 au-dessus de la plaine. Voici, par ordre, l'indication et l'épaisseur des différentes substances que l'on a trouvées disposées par couches les unes sur les autres :

Sable et gravier	2m,084.
Sable jaune mélangé d'argile, formant une couche très-compacte	2, 435.
Marne blanchâtre	0, 216.
Sable jaune pur et sans liaison	0, 567.
Marne blanchâtre	0, 216.
Sable et gravier mêlé de cailloux roulés	1. 190.
TOTAL	6, 708.

A cette profondeur totale de 6^m,708, on a trouvé les mêmes bancs calcaires que ceux dans lesquels les grottes de Syout sont creusées ; ces bancs, à deux cent quatre-vingts mètres de distance du terrain que le Nil inonde aujourd'hui, se trouvent par conséquent enfoncés de 4^m,10 au-dessous de ce terrain. Cette sonde par laquelle nous terminâmes les opérations que nous avions entreprises à Syout, fournit deux résultats importans : elle prouve d'abord que les bancs calcaires de la montagne Libyque se prolongent, en s'inclinant vers le Nil, au-dessous du terrain formé par les alluvions actuelles de ce fleuve; elle confirme ensuite la conjecture énoncée plus haut, que ces bancs calcaires ont été recouverts, avant l'existence de l'ordre actuel, de matières beaucoup plus pesantes chariées par des courans rapides auxquels la vallée servait de lit.

Nous partîmes de Syout le 29 floréal (18 mai), pour nous rendre à Qené, où nous arrivâmes le 6 prairial (25 mai) : nous séjournâmes dans cette dernière ville jusqu'au 8 messidor (26 juin); ce qui me laissa le temps de renouveler, sur ce point, les nivellemens et les sondes.

Un nivellement fait un peu au-dessus de Qené apprit que le sol s'inclinait de 0^m,886, en allant du Nil vers le désert, sur neuf cent quatre-vingt-onze mètres de longueur *(fig. 6)*.

La surface du fleuve se trouvait, le 17 prairial (5 juin), à 9^m,227 au-dessous de l'arête supérieure de sa berge; ce qui s'accorde assez avec l'observation que nous avions faite à Syout.

A cinq cent sept mètres de distance du Nil, on creusa un premier puits dans lequel on trouva une couche de limon de 2^m,7 d'épaisseur, reposant sur un banc de sable gris, où l'on

s'enfonça de 4^m,729 avant d'être arrêté par l'eau, qui parut à cette profondeur.

Un second puits fut creusé à quatre cent cinquante mètres du premier, en descendant vers le Nil, et à cinquante-sept mètres de sa rive : on y trouva d'abord une couche de 1^m,4 d'épaisseur de limon, et au-dessous 7^m,559 de sable gris, profondeur au-delà de laquelle l'eau qui commença à surgir empêcha de fouiller.

On retrouve ici, comme on voit, les mêmes substances semblablement disposées que dans la plaine de Syout. La couche supérieure du sol est formée d'un dépôt de limon ; la couche immédiatement inférieure est un sable gris quartzeux, mêlé de mica en plus ou moins grande proportion.

Quant à l'inclinaison de la nappe d'eau souterraine, par rapport au niveau du Nil, si l'on prend pour repère un plan passant à cent mètres au-dessus de la surface de ce fleuve, les hauteurs respectives de cette nappe dans les deux puits qu'on vient de décrire, seront indiquées ainsi qu'il suit (*fig.* 6) :

N^{os} DES PUITS.	PROFONDEUR DES PUITS JUSQU'AU NIVEAU DE L'EAU.	ABAISSEMENT DU NIVEAU DE L'EAU AU-DESSOUS DU PLAN DE REPÈRE.
	Rive droite.	
N° 1.	7^m,429.	96^m,20.
N° 2.	8, 959.	99, 75.

Ainsi, à cette époque, la nappe souterraine s'inclinait du pied de la montagne vers le milieu de la vallée.

Après avoir passé environ un mois à Qené, nous en par-

times pour nous rendre à Esné, où nous arrivâmes le 12 messidor (30 juin). Pendant notre séjour dans cette ville, on fit le nivellement transversal de la vallée, et l'on creusa trois puits sur chacune des deux rives du Nil. Voici le résultat de ces opérations (*fig.* 7).

La bande du terrain cultivable de la rive droite est séparée du désert par un canal de dix mètres de largeur et de deux mètres de profondeur. Le sol de la plaine s'élève d'environ un mètre, à partir du Nil jusqu'au pied des montagnes qui bordent la vallée.

Nous rappelons ici cette observation, parce qu'elle donne un résultat différent de celui auquel on était parvenu par le nivellement transversal fait à Qené. Ces deux opérations prouvent que, suivant les localités, le niveau de la plaine s'abaisse ou s'élève en allant du Nil vers le désert.

Je fis ensuite creuser trois puits sur sa rive gauche, le premier à trois mille trois cents mètres de distance, à la limite du terrain cultivable. On fut arrêté par l'eau après avoir fouillé de $5^{m},973$ dans une masse de limon dont toute l'épaisseur ne fut point traversée. L'eau de ce puits était très-saumâtre.

La sonde n° 2 fut faite à quinze cents mètres de distance en descendant vers le fleuve. On trouva une couche de $4^{m},827$ d'épaisseur de limon portée sur un banc de sable gris, que l'on traversa de $1^{m},806$ avant que l'eau parût au fond de la fouille.

A six cents mètres plus loin et à douze cents mètres du Nil, on creusa le puits n° 3. On traversa d'abord une couche de limon de $3^{m},80$ d'épaisseur, et l'on arriva au niveau de l'eau après avoir fouillé $2^{m},315$ dans un banc de sable gris.

On passa sur la rive opposée : le fleuve avait déja commencé à croître ; sa surface était de 8m,50 au-dessous de l'arête de sa berge.

A soixante-seize mètres de cette berge, on ouvrit le puits nº 4, dont la fouille présenta une couche de limon de 4m,887 d'épaisseur, et un banc de sable gris, dans lequel on ne put pénétrer que de 2m,715 avant d'arriver à l'eau.

A douze cents mètres au-delà, en allant du côté de la montagne Arabique, on trouva, dans le puits nº 5, 5m,702 d'épaisseur de limon, et au-dessous 2m,443 de sable gris, profondeur à laquelle l'eau commença à se montrer.

Enfin, à douze cents mètres plus loin, on creusa le puits nº 6 sur la limite des terrains cultivés. Il fut fouillé dans une masse de limon du Nil, de 7m,330 au-dessous du sol. L'eau qui surgit à cette profondeur, fut trouvée extrêmement saumâtre, comme celle du puits de l'autre rive la plus voisine du désert.

Ces observations furent faites pendant les six jours qui s'écoulèrent du 24 messidor au 1er thermidor (du 12 au 19 juillet).

Si l'on rapporte, comme nous l'avons fait, la surface de la nappe d'eau souterraine et celle du Nil à un plan de repère élevé de cent mètres au-dessus de celle-ci, on trouvera leurs hauteurs respectives ainsi qu'elles sont indiquées dans le tableau suivant *(fig. 7)* :

Nos DES PUITS.	PROFONDEUR DES PUITS JUSQU'AU NIVEAU DE L'EAU.	ABAISSEMENT DU NIVEAU DE L'EAU AU-DESSOUS DU PLAN DE REPÈRE.
	Rive gauche.	
N° 1.	$5^m,973$.	$95^m,07$.
N° 2.	5, 973.	95, 77.
N° 3.	6, 516.	96, 56.
	Surface du Nil..........................	100, 00.
	Rive droite.	
N° 4.	7, 602.	100, 127.
N° 5.	8, 145.	97, 415.
N° 6.	7, 330.	97, 432.

On remarque, par la comparaison de ces différentes hauteurs, que la nappe d'eau souterraine s'incline sur la rive gauche, depuis le désert jusqu'au Nil, d'environ cinq mètres, tandis que cette inclinaison n'est que d'environ $2^m,50$ sur la rive opposée; il faut remarquer, de plus, que l'eau du puits n° 4 de la rive droite est inférieure de $0^m,127$ au niveau du Nil. Cela vient de ce que le fleuve, qui avait commencé à croître, s'était déja assez élevé pour s'infiltrer dans les terres; fait que confirment d'ailleurs les observations que je recueillis de nouveau sur les puits de la vallée d'Esné à mon retour de Syène, le 14 thermidor (1er août). Voici les résultats de ces dernières observations :

Nos DES PUITS.	PROFONDEUR DES PUITS JUSQU'AU NIVEAU DE L'EAU.	ABAISSEMENT DU NIVEAU DE L'EAU AU-DESSOUS DU PLAN DE REPÈRE.
	Rive gauche.	
N° 1.	5m,973.	95m,24.
N° 2.	5, 973.	96, 20.
N° 3.	6, 516.	96, 00.
	Surface du Nil	96, 00.
	Rive droite.	
N° 4.	» »	» »
N° 5.	» »	« »
N° 6.	7m,330.	96m,118.

Les terres de la paroi des puits n° 4 et n° 5, sur la rive droite, s'étaient éboulées au fond de ces puits, parce que les eaux du Nil, ayant commencé à s'y infiltrer avec abondance, avaient diminué la cohérence de leurs parois, qui n'avaient pu se soutenir à plomb.

Le Nil, qui s'était alors accru d'environ quatre mètres à Esné, avait sa surface déja plus élevée que la nappe d'eau souterraine sur l'une et l'autre rive, c'est-à-dire que ses eaux continuaient à s'infiltrer sous le sol de la plaine en s'écoulant vers le désert.

C'est le contraire qui arrive lors du décroissement du Nil, comme le prouvent les sondes que nous avons faites à Syout.

Toutes les observations dont nous venons de présenter les résultats, démontrent évidemment, 1° que la surface du sol de la haute Égypte est formée du limon noirâtre déposé par le Nil;

2° Que ce limon repose sur une couche plus ou moins

épaisse de sable gris micacé, de la même nature que celui que l'on retrouve à *Philæ* et sur les bords de la mer, le long de la côte qui sépare les deux embouchures de Rosette et de Damiette;

3° Que l'épaisseur de la couche de limon qui forme le sol cultivable, est d'autant plus considérable, que l'on approche davantage des bords de la vallée; de sorte qu'on arrive à la nappe d'eau souterraine, dans les puits les plus voisins du désert, avant d'être parvenu au banc de sable sur lequel le limon repose, tandis que, plus près du Nil, l'eau ne commence à se montrer dans les puits qu'autant qu'on s'enfonce plus ou moins dans cette masse sablonneuse;

4° Que cette nappe souterraine est entretenue tous les ans, après l'inondation, par les eaux dont les canaux d'irrigation couvrent une partie de la vallée, tandis qu'elle est entretenue pendant l'inondation par les eaux du Nil jusqu'à une certaine distance de ses bords : d'où il résulte que le niveau de cette nappe doit osciller suivant les saisons et suivant l'état du fleuve;

5° Que, vers le milieu de la vallée, on pénètre à des profondeurs de sonde de dix ou douze mètres à travers des couches de limon et de sable, avant de rencontrer les bancs calcaires sur lesquels ces matières ont été déposées postérieurement;

6° Qu'en se rapprochant du pied des montagnes au-delà du terrain cultivé, on trouve ces bancs calcaires à des profondeurs de 4^m,12 environ au-dessous du sol de la plaine, et qu'on les trouve recouverts de lits superposés de gravier, de marne et de cailloux roulés; matières qui ont été aussi charriées par les eaux, mais à une époque antérieure au régime

du Nil tel qu'il existe aujourd'hui, puisque ces alluvions anciennes n'ont, par leur nature et leur volume, aucune analogie avec le sable fin et le limon dont se composent exclusivement les alluvions actuelles.

SECTION III.

Connaissances et Opinions des Anciens sur le sol de l'Égypte et sa formation. — Observations et Opinions des Modernes. — Questions élevées à ce sujet.

Les prêtres égyptiens, chargés, comme on sait, par un des priviléges de leur caste, de tenir registre des accroissemens annuels du Nil, durent étendre aux effets de ce phénomène les observations dont la vie contemplative qu'ils menaient, et sur-tout l'étude de l'astronomie, leur avaient rendu l'habitude familière. Héritiers exclusifs de la connaissance des faits recueillis par les générations de l'ordre sacerdotal qui les avaient précédés, ils savaient quels changemens le temps avait apportés à l'aspect de la contrée qu'ils habitaient; et sans doute nous connaîtrions aujourd'hui les détails et les époques de ces changemens, si leurs annales nous étaient parvenues.

La perte de ces annales ne nous laisse cependant pas dans une ignorance absolue de ce que savaient les prêtres égyptiens sur l'histoire physique de leur pays. Hérodote n'a fait que traduire dans sa langue ce qu'ils lui en apprirent. Son récit porte un caractère de vérité remarquable, et n'est en effet que la tradition fidèle d'une opinion devenue générale par l'accord des observations qui l'avaient déja constatée dans le ve siècle avant notre ère.

Suivant cette opinion, l'Égypte était une terre de nouvelle acquisition, un présent du Nil, qui, par ses alluvions, avait comblé un ancien bras de mer renfermé entre la Libye et la montagne Arabique (1). Voilà en deux mots l'histoire physique de l'Égypte. C'est aussi l'idée que l'historien grec dit s'en être formée lui-même en voyant cette contrée. Il ajoute, pour la justifier, que si, abordant par mer en Égypte, on jette la sonde à une journée des côtes, on en tire du limon à douze orgyes de profondeur (2); preuve évidente que le fleuve porte de la terre jusqu'à cette distance.

Enfin, pour mieux convaincre les Grecs, auxquels son ouvrage était destiné, de la possibilité d'une semblable origine, il en prend des exemples dans leur propre pays, et cite les environs de Troie, de Teuthranie, d'Éphèse, et les bords du Méandre, tous formés par les alluvions des fleuves qui les arrosent.

Il suppose que l'emplacement de l'Égypte était autrefois un golfe de la mer Méditerranée, comme la mer Rouge est aujourd'hui un golfe de la mer des Indes (3); le premier, dirigé du nord au midi, et le second, du midi au nord : ils ne sont séparés que par un isthme fort étroit; de sorte que, s'ils se joignaient par leur extrémité, et que le Nil, en changeant son cours, vînt à se jeter dans le golfe Arabique, rien n'empêcherait qu'en vingt mille ans il ne comblât ce golfe par le limon qu'il roule sans cesse. « Pour moi, dit l'histo-« rien, je crois qu'il y réussirait en moins de dix mille. Com-

(1) Hérodote, *Hist.* liv. II, chap. X.

(2) *Ibid.* chap. V.

(3) *Ibid.* chap. XI.

« ment donc ne pas admettre que le golfe Égyptien, et « un plus grand encore, a pu être comblé de la même ma- « nière! »

Hérodote appuie son opinion sur la formation de l'Égypte, en faisant remarquer que le sol de cette contrée est un limon noirâtre apporté d'Éthiopie par le Nil, et accumulé par ses débordemens, tandis que la surface des deux déserts qui bordent la vallée où il coule, est couverte de sables, de graviers et de pierres de différentes couleurs (1).

Les prêtres tiraient une preuve de leur opinion sur l'exhaussement du sol de l'Égypte, d'un fait particulier de leur histoire dont ils instruisirent Hérodote : ils lui dirent que sous le roi Mœris, qui vivait neuf siècles auparavant, toutes les fois que le Nil croissait seulement de huit coudées, il arrosait toute l'Égypte au-dessous de Memphis, tandis qu'alors il ne se répandait point sur les terres, à moins de s'élever de seize coudées, ou au plus bas de quinze (2); Hérodote en conclut que, si ce pays continue à s'élever avec la même rapidité et à recevoir de nouveaux accroissemens, il doit venir un temps où, le Nil ne pouvant plus l'inonder, il deviendra tout-à-fait stérile.

Quelque naturelle que paraisse cette conclusion, il suffit d'un léger examen pour reconnaître qu'Hérodote y fut conduit par de fausses apparences : en effet, si des dépôts de limon exhaussent le sol de l'Égypte, la même cause exhausse aussi le fond du Nil, de sorte que la profondeur de ce fleuve au-dessous de la plaine doit rester à-peu-près la même, et

---

(1) Hérodote, *Hist.* liv. II, chap. XII.

(2) *Ibid.* chap. XIII.

et ses débordemens couvrir à-peu-près la même étendue de territoire.

« Dans la saison où ils ont lieu, dit cet historien (1), on « n'aperçoit plus en Égypte que les villes et les villages, qui « paraissent au-dessus des eaux, comme les îles de la mer « Égée ; on ne navigue plus alors sur les différens bras du « Nil, mais sur les canaux dont les campagnes sont entre- « coupées. »

Hérodote termine sa description de l'Égypte par l'indication des embouchures du Nil. Après avoir coulé dans un seul lit depuis la cataracte, il se sépare en trois branches au-dessous de la ville de Cercasore. La plus orientale de ces branches se rend à la mer, à Péluse ; la plus occidentale est la branche de Canope ; la troisième partage le Delta par le milieu : c'est le canal Sébennitique. Deux autres branches sont dérivées de ce canal, la branche Mendésienne et la Saïtique. De l'autre côté, les branches Bucolique et Bolbitine sont des canaux artificiels (2).

Environ un siècle après Hérodote, à qui nous devons la conservation des plus anciennes traditions Égyptiennes sur la formation du Delta, Aristote, dont les ouvrages fixent l'état auquel toutes les sciences naturelles étoient parvenues de son temps, cite l'Égypte comme un des exemples les plus remarquables des changemens qui s'opèrent à la surface du globe.

Les mêmes lieux, dit-il (3), ne sont pas toujours occupés par la terre ou par les eaux : des endroits que l'on voit

(1) Hérodote, *Histoire*, livre II, chap. XVII.

(2) *Ibid.*

(3) *Meteorolog.* lib. I, cap. XIV.

aujourd'hui à sec, ont été autrefois submergés; et d'autres qui sont aujourd'hui submergés, ont été autrefois à découvert. Ces changemens successifs sont trop lents pour être remarqués par les hommes, auxquels la brièveté de leur vie ne permet pas d'en être témoins; d'ailleurs les traditions s'oblitèrent et se perdent par l'effet des guerres et des révolutions diverses qui amènent le déplacement des peuples.

L'Égypte, ajoute-t-il (1), offre l'exemple d'une contrée qui se dessèche de plus en plus. Elle est formée tout entière des alluvions du Nil. L'époque à laquelle cette contrée a commencé à devenir habitable est ignorée, parce que, son dessèchement s'étant opéré peu-à-peu, on s'est fixé successivement dans les lieux voisins des anciens marais; et comme cela se fit pour ainsi dire par degrés insensibles, il n'existe point de souvenir du moment où cela commença.

Suivant Aristote, la branche Canopique du Nil est la seule naturelle; toutes les autres ont été creusées par la main des hommes, pour accélérer le dessèchement du Delta. Il remarque aussi qu'Homère n'a désigné l'Égypte que par le nom de Thèbes, comme si Memphis et ses environs n'eussent point encore existé ou du moins n'eussent point encore été habitables au temps où il écrivait. Les lieux les plus bas, c'est-à-dire les plus voisins de la mer, exigent en effet, pour leur entier dessèchement, une plus grande hauteur d'alluvions; et ce n'est qu'après être restés plus long-temps à l'état de marais, qu'ils deviennent propres à recevoir des établissemens.

Ces raisonnemens, dont la justesse est incontestable, sont appuyés d'une tradition précieuse; c'est que la mer Rouge,

---

(1) *Meteorolog.* lib. I, chap. XIV.

la mer Méditerranée et l'espace occupé par le Delta, ne formaient autrefois qu'une seule et même mer (1). Il paraît que, du temps d'Aristote, la vérité de cette tradition était généralement admise. Or, si le pays habité par les Égyptiens, que l'on regardait comme la plus ancienne nation du monde, est de formation nouvelle, ne doit-on pas admettre que des changemens semblables ont eu lieu sur d'autres points de la terre ? C'est ainsi, ajoute ce philosophe, que les environs d'Argos, qui, lors de la guerre de Troie, étaient des lieux marécageux, sont aujourd'hui complètement desséchés, et que les Palus-Méotides, comblés de plus en plus par les alluvions du *Tanaïs,* ne sont maintenant navigables que pour des bateaux beaucoup plus petits que ceux qui y naviguaient autrefois. (2)

Diodore de Sicile, contemporain des derniers Ptolémées, se borne à donner succinctement une description géographique de l'Égypte (3); mais, s'il n'indique aucun des changemens que le temps avait apportés à l'état physique de cette contrée, il donne des détails curieux sur les travaux que ses anciens rois avaient fait exécuter, soit pour l'irrigation des terres, soit pour mettre les villes et les villages à l'abri des débordemens du Nil.

Pendant le temps de sa crue, qui se prolonge du solstice d'été à l'équinoxe d'automne, dit cet historien, les cultivateurs en détournent les eaux et les conduisent dans les campagnes, où elles sont soutenues à une certaine hauteur par

---

(1) *Meteorolog.* lib. I, cap. XIV.

(2) Aristot. *Meteorolog.* lib. I, cap. XIV.

(3) Diodore de Sicile, *Biblioth. hist.* liv. I, sect. 1re, chap. XVII.

des digues de terre que l'on coupe lorsque le sol est suffisamment arrosé (1).

Sésostris, le plus célèbre de tous les rois d'Égypte, après avoir renoncé, selon Diodore, aux conquêtes qui l'occupèrent une partie de sa vie, fit élever, dans plusieurs endroits de son royaume, des terrasses d'une hauteur et d'une étendue considérables, afin de mettre ceux qui viendraient s'y établir, eux et leurs troupeaux, à l'abri des inondations périodiques du fleuve. Ces travaux offraient tant d'avantages à la population de l'Égypte, qu'ils durent se multiplier à mesure qu'elle s'accroissait. Diodore ne cite cependant parmi les successeurs de Sésostris, qu'un autre roi, nommé *Nileus* (2) comme auteur d'ouvrages de cette nature. Il creusa des canaux, éleva des digues, et fit exécuter beaucoup d'autres travaux pour rendre le Nil moins dangereux et plus utile. Il mérita, par ses services, de donner son nom à ce fleuve, qui jusqu'alors s'était appelé *AEgyptus*.

Un autre roi d'Égypte, nommé *Sabacos*, abolit la peine de mort, et ordonna que les criminels qui l'avaient méritée seraient condamnés aux travaux publics, et particulièrement employés à creuser des canaux et à élever des digues (3).

Ces témoignages, puisés par Diodore dans les récits des prêtres Égyptiens ou dans la lecture de leurs écrits, prouvent combien les anciens rois avaient attaché d'importance à l'ouverture des canaux d'arrosage, à l'établissement des digues destinées à soutenir les eaux de l'inondation, et à celui des éminences factices sur lesquelles les villes étaient bâties.

---

(1) Diodore de Sicile, *Biblioth. hist.* liv. I, sect. Ire, chap. XXI.

(2) *Ibid.* liv. I, sect. II, chap. XIV.

(3) *Ibid.* chap. XVIII.

L'époque reculée à laquelle les premiers travaux de ce genre avaient été entrepris, justifie ce qu'on a pu dire sur la haute antiquité de la civilisation de cette contrée.

Peu de temps après que les Romains l'eurent conquise, elle fut visitée par Strabon, qui nous en a laissé une ample description géographique (1). Il la regarde comme un présent du Nil, auquel elle doit le nom d'*AEgyptus* que ce fleuve portait lui-même autrefois; ses crues et ses attérissemens sont, dit-il, les phénomènes dont les étrangers sont le plus frappés, ceux dont les habitans du pays aiment le plus à entretenir les voyageurs, ceux enfin dont les personnes qui n'ont point été en Égypte, font le premier objet de leurs questions à celles qui en reviennent.

Strabon considère le Delta comme une île formée par la mer et les deux branches Canopique et Pélusiaque, entre lesquelles il en compte cinq autres, la Bolbitine, la Sébennitique, la Phatnitique, la Mendésienne et la Tanitique. Après l'embouchure Bolbitine, la côte, en allant vers l'orient, présente une plage basse et sablonneuse, qui forme un long promontoire que l'on appelle *la Corne de l'Agneau;* ensuite, en avançant vers l'embouchure Sébennitique, on trouve des lacs, dont l'un est appelé *Butique*, du nom de la ville de *Butos*.

La ville de Mendès, et celle de *Diospolis*, qui en est voisine, sont environnées de lacs. Il y en a aussi entre les embouchures Tanitique et Pélusiaque, ainsi que de vastes marais, au milieu desquels on compte plusieurs villages. Péluse est située dans un territoire de la même nature.

Nous rappelons ici cette description de la côte septen-

(1) Strab. *Geogr.* lib. XVII, *passim.*

trionale de l'Egypte, pour faire voir combien elle s'accorde avec ce qui existe aujourd'hui. Nous rappellerons par la même raison que, du temps de Strabon, la ville d'*Heliopolis* était déserte, et que l'on voyait des lacs autour du tertre factice sur lequel elle avait été bâtie.

Ce géographe cite avec une sorte d'admiration l'industrie que montrent les Égyptiens dans l'emploi qu'ils font des eaux du Nil : ils ont su rendre, dit-il, par le moyen des canaux et des digues dont il est entrecoupé, leur pays beaucoup plus productif qu'il ne le serait naturellement, et donner aux irrigations une aussi grande étendue lorsque les crues sont faibles que lorsqu'elles sont considérables. Au reste, pour faire valoir apparemment les améliorations que les Romains avaient déja faites à l'administration de cette province, il ajoute qu'avant le gouvernement de Petronius, les récoltes ne pouvaient être abondantes en Égypte, à moins que la crue du Nil n'atteignît quatorze coudées, tandis que, sous sa préfecture, il avait suffi qu'elle s'élevât seulement à douze.

Les connaissances sur l'état de ce pays et sur la formation du Delta durent naturellement se répandre et se multiplier, par les occasions fréquentes et les facilités qu'on eut de le visiter sous la domination Romaine. Pline puisa dans les mémoires des voyageurs et les traités des géographes les renseignemens qu'il nous a transmis (1). Il cite la partie de l'Égypte comprise depuis Memphis jusqu'à la mer, comme l'exemple le plus remarquable des terrains d'alluvion nouvellement formés, et il donne en preuve de cette opinion le témoignage d'Homère, qui, en parlant de l'île de *Pharos*,

(1) Plin. *Hist. nat.* liv. II, chap. LXXXV.

dit qu'elle était, du temps de Ménélas, à une journée de navigation de l'Égypte (1); tandis qu'au siècle de Pline et long-temps auparavant, elle était presque contiguë au continent. Strabon avait déjà cité le même témoignage à l'appui de la même opinion.

Les deux branches du Nil, Canopique et Pélusiaque, sont indiquées par Pline comme les principales; d'accord avec Hérodote, il place entre elles, en venant de l'est à l'ouest, la Tanitique, la Mendésienne, la Phatnitique, la Sébennitique et la Bolbitine (2).

L'époque à laquelle le Nil commence à croître, était trop généralement connue pour que Pline pût se tromper dans l'indication qu'il en donne; mais il se trompe sur le terme de l'accroissement de ce fleuve : il dit, en effet, qu'après le centième jour il commence à rentrer dans son lit (3), tandis que ce n'est réellemment qu'après cet intervalle de temps qu'il parvient à sa plus grande hauteur et qu'il commence à décroître. Il indique les Nilomètres au moyen desquels on observait tous les degrés de sa crue. Elle est, dit-il, de seize coudées : lorsqu'il monte moins, il n'arrose pas toutes les terres; quand il monte plus haut, il y séjourne trop long-temps et retarde les semailles. L'un et l'autre excès est à craindre. Il y a disette totale quand le Nil ne monte qu'à douze coudées; il y a encore disette quand il ne s'élève qu'à treize. La fertilité commence quand la crue est de quatorze coudées : à quinze, il y a sécurité; abondance, lorsque l'accroissement

---

(1) *Odyssée*, liv. IV.

(2) Plin. *Hist. naturelle*, liv. II, chap. LXXXV.

(3) Plin. *ibid.*

est de seize. La plus grande crue, du temps de Pline, arriva sous l'empire de Claude; elle fut de dix-huit coudées.

Aussitôt que les eaux sont parvenues à une hauteur déterminée, on coupe les digues qui ferment l'entrée des canaux; et à mesure que les eaux abandonnent les terres qu'elles avaient couvertes, on procède à l'ensemencement de celles-ci.

En rapportant dans un autre endroit de son ouvrage (1) les divers procédés d'agriculture usités chez les Égyptiens, Pline dit qu'ils jettent le blé sur le limon déposé tous les ans par le Nil, et que ce limon repose sur du sable. On reconnaît ici l'exactitude des renseignemens qu'il avait reçus sur la nature des différentes couches dont le sol de l'Égypte est composé.

Plutarque, presque contemporain de Pline, nous a transmis des traditions importantes sur l'histoire physique de l'Égypte. Anciennement, dit-il, l'Égypte était couverte par la mer, comme le prouvent les coquillages que l'on rencontre dans les déserts voisins, et la salure des puits que l'on y creuse (2). C'est le Nil qui a repoussé la mer par les dépôts de limon qu'il forme à ses embouchures : des plaines autrefois submergées s'exhaussant ainsi de plus en plus par de nouvelles couches de terre, ont été mises enfin à découvert. Ce qu'il y a de certain, ajoute-t-il, c'est que l'île de *Pharos*, qui, du temps d'Homère, était à une journée de chemin du rivage d'Égypte, en fait aujourd'hui partie : non sans doute que cette île ait changé de place et se soit approchée du continent; c'est le fleuve qui, en comblant

---

(1) Plin. *Hist. nat.* liv. XVIII, chap. XVIII.

(2) *Traité d'Isis et d'Osiris.*

l'espace intermédiaire, l'a jointe à la terre ferme. Plutarque répète ici, comme on voit, ce que Strabon et Pline avaient dit avant lui; mais il est le seul auteur de l'antiquité qui fasse mention des différentes hauteurs auxquelles parvenaient les crues du Nil, suivant les lieux où elles étaient observées. Il croissait suivant lui de vingt-huit coudées à Éléphantine, à son entrée en Égypte; de quatorze à Memphis, à l'extrémité de la longue vallée où il coule; et de six à Mendès, ville située à l'une de ses embouchures (1).

Nous citerons pour le dernier des témoignages de l'antiquité sur la constitution physique de l'Égypte, celui d'Ammien Marcellin (2). Il remarque que le Nil, depuis la dernière cataracte, n'est grossi d'aucun autre fleuve, mais que plusieurs grands canaux, semblables à des fleuves, en sont dérivés; que ses eaux se rendent à la mer par sept embranchemens navigables; qu'il commence à croître lorsque le soleil est parvenu dans le signe du cancer; qu'il continue de s'élever jusqu'à ce que le soleil entre dans le signe de la balance, c'est-à-dire pendant l'espace d'environ cent jours; qu'il décroît ensuite, et que, ses eaux s'étant écoulées, on peut parcourir à cheval les même campagnes dans lesquelles on naviguait peu de temps auparavant. De trop grandes inondations sont, dit-il, aussi nuisibles que des inondations trop faibles. Dans le premier cas, le séjour des eaux sur les champs est trop prolongé; ce qui ne permet point de faire les semailles en temps convenable : dans le second cas, toutes les terres ne sont point assez arrosées pour devenir fécondes; la hauteur de seize coudées est le terme de la crue la plus favo-

(1) *Traité d'Isis et d'Osiris.* (2) Ammian. Marcellin. *Hist.* lib. XXII.

rable. Enfin il ajoute que, la côte d'Égypte ne présentant aucune éminence qui puisse la faire reconnaître aux navigateurs, ils sont exposés à échouer sur une vase sablonneuse, et que ce fut pour les garantir de ce danger, que Cléopâtre se détermina à faire élever, à l'entrée du port d'Alexandrie, une haute tour qui fut appelée *le Phare,* du nom de l'île de *Pharos,* où elle était construite.

Les opinions des auteurs anciens que nous venons de rapprocher, coïncident toutes sur la formation du sol de l'Égypte; ils l'attribuent unanimement aux alluvions du Nil, qui ont comblé un ancien golfe de la Méditerranée, dont le Delta occupe aujourd'hui l'emplacement. Ces opinions ne sont, au surplus, que des traditions conservées dans la caste sacerdotale; et, comme les faits qui en sont l'objet n'ont pu être constatés que par une longue suite d'observations, on tire de ces traditions mêmes une nouvelle preuve de la haute antiquité de la civilisation égyptienne.

Les géographes du moyen âge et les auteurs arabes n'ont fait que répéter les mêmes faits, souvent même sans changer les termes de ceux qui les avaient précédés; ce qu'on trouve, par exemple, dans le livre de la Mesure de la terre de Dicuil, sur le Nil et son débordement, est la copie exacte du passage de Pline que nous avons cité (1).

Le Juif Benjamin de Tudèle, qui visita l'Égypte dans le XIIe siècle, et Jean Léon, qui y voyagea dans le XVe, n'avaient ni l'un ni l'autre les connaissances nécessaires pour recueillir des observations utiles sur l'état physique de ce pays : ils se

(1) Dicuili *Liber de mensurâ orbis terræ, nunc primùm in lucem editus à* Car. Athan. Walckenaër; *Parisiis*, 1807; pag. 14.

bornèrent à rapporter, sur l'accroissement annuel du Nil, sur la mesure journalière de cet accroissement et les usages suivis dans la publication qu'on en fait, les particularités dont ils furent eux-mêmes les témoins, ou à répéter ce que des récits populaires leur apprirent (1).

Le prince Radziwill, qui a écrit la relation d'un pélerinage en Terre-Sainte, ayant, à son retour, parcouru la basse Égypte au mois d'août 1583, apporta quelque attention à décrire l'aspect extérieur de cette contrée, et les travaux à l'aide desquels la main des hommes a modifié cet aspect. Ce n'est point naturellement, dit-il, mais au moyen de canaux et de barrages artificiels, que le Nil submerge les campagnes de l'Égypte (2). Ces digues, qui, pendant l'inondation, servent de communication entre les nombreux villages dont le Delta est couvert, sont percées les unes après les autres, pour donner passage aux eaux destinées à l'arrosement des différens territoires; mais les époques de chacun de ces percemens sont fixées, et l'on veille avec le plus grand soin à ce que l'ordre n'en soit point interverti furtivement, tant pour éviter les querelles qui pourraient en résulter entre les villages limitrophes, que pour prévenir les dégâts qui pourraient être occasionnés par l'impétuosité des courans. Il s'étonne, au surplus, de ce que l'accroissement du Nil ne soit que d'une coudée à son embouchure, tandis qu'il s'élève de dix-huit ou de vingt coudées au Kaire; fait qui n'avait

(1) *Itinerarium* Benjaminis, *cum versione et notis* Constantini l'Empereur; *Lugduni Bat.* 1633, pag. 116.

Joannis Leonis Africani *Descriptio Africæ*, lib. VIII.

(2) Principis Radziwili *Jerosolymitana Peregrinatio*, epistolâ 3ª, *passim*.

point échappé aux anciens, et dont la cause toute naturelle est facile à saisir.

Prosper Alpin résidait en Égypte et y exerçait la médecine auprès du consul de Venise, dans le même temps que le prince Radziwill y voyageait. Quoiqu'il s'occupât spécialement des sciences naturelles, il n'a recueilli aucune observation particulière sur la formation du sol de cette contrée, dont il admet néanmoins l'exhaussement progressif d'après l'opinion d'Hérodote (1).

Quelques faits isolés sur l'ensablement des deux branches principales du Nil ont été rapportés par le P. Vansleb, dans sa Nouvelle Relation d'Egypte (2); il attribue avec raison à cette cause l'avancement de leur embouchure vers la mer: mais les témoignages dont il appuie les faits qu'il cite, n'ont point assez de poids, et les circonstances en sont indiquées trop vaguement, pour qu'il soit possible d'en tirer quelques conclusions positives. Ce qui est certain, c'est qu'en 1672, époque à laquelle le P. Vansleb se trouvait en Égypte, le lac *Mareotis*, comme du temps de Prosper Alpin, recevait les eaux du Nil pendant l'inondation et communiquait avec la mer; état de choses qui a été changé depuis.

L'ensablement des deux branches du Nil près de leurs embouchures, cité par Vansleb, est aussi rapporté par de Maillet dans sa Description de l'Égypte (3). Il explique la formation des deux barres ou *boghâz* qui obstruent ces em-

(1) Prosper. Alpin. *Rerum AEgyptiacarum libri quatuor*, lib. I, cap. II.

(2) *Nouvelle Relation d'Égypte*, par le P. Vansleb, pag. 111 et 172.

(3) *Description de l'Egypte*, composée sur les mémoires de M. de Maillet par l'abbé le Mascrier, pag. 91.

bouchures, par l'action du courant du fleuve qui charrie les alluvions, et par l'action opposée des vagues de la mer qui les repoussent. On conçoit, au surplus, que les vents doivent exercer une grande influence sur la hauteur et la direction de ces bancs : voilà pourquoi l'on éprouve plus ou moins de difficultés à les franchir.

Suivant de Maillet, la ville de Foueh, qui était, dans le XIIe siècle, à l'embouchure occidentale du fleuve, s'en trouvait, à l'époque où il écrivait, éloignée de sept à huit milles; de même la ville de Damiette, dont la mer baignait les murailles, du temps de S. Louis, s'en trouvait à dix milles de distance; enfin la forteresse de Rosette, qui, quatre-vingts ans auparavant, était vis-à-vis la barre du Nil, en était alors éloignée de près de trois cents pas (1).

« J'ai vu moi-même, ajoute-t-il, qu'en 1692, à mon arri-
« vée en Égypte, la mer n'était qu'à une demi-lieue de cette
« ville, au lieu qu'en 1718 je l'en ai trouvée distante d'une
« grande lieue. »

Il rapporte ailleurs (2) que l'on vit en 1697, au fond d'un étang qui occupe une partie de l'emplacement de Memphis, des restes de colonnes, d'obélisques, et diverses ruines; d'où il résulte que la plaine qui environne Memphis, se trouve aujourd'hui plus élevée que le sol de cette ancienne ville, qui demeure constamment submergé.

Le premier de tous les voyageurs modernes qui ait entrepris de s'assurer, par ses propres observations, de l'exhaus-

---

(1) *Description de l'Egypte*, composée sur les mémoires de M. de Maillet par l'abbé le Mascrier, pag. 91.

(2) *Ibid.* pag. 274.

sement du sol de l'Égypte, est le docteur Shaw : il parcourut cette contrée au commencement du dernier siècle (1). Regardant comme incontestable l'opinion des anciens sur la formation du Delta, il voulut pousser ses recherches plus loin et déterminer la hauteur dont la surface de l'Égypte devait s'élever chaque siècle : il remplit, en conséquence, un tube de verre de trente-deux pouces de longueur, d'eau trouble du Nil, telle qu'on la voit pendant le débordement ; et il trouva que l'épaisseur de la couche de limon qui s'était déposée au fond de ce tube, ayant été desséchée, n'était plus que la cent-vingtième partie de la longueur du tube ; supposant ensuite que la hauteur moyenne des eaux de l'inondation annuelle au-dessus des campagnes était de trente-deux pouces, il en conclut que l'exhaussement séculaire de leur sol est d'un peu plus d'un pied.

Il tire la même conclusion de ce que dit Hérodote, que, du temps du roi Mœris, toutes les terres étaient suffisamment arrosées si les eaux s'élevaient à huit coudées, tandis que, du temps de cet historien, il fallait quinze ou seize coudées de crue pour couvrir toutes les campagnes ; changement qui s'était opéré dans l'espace de neuf cents ans : de sorte qu'en supposant ces mesures exprimées en coudées grecques, le terrain se serait élevé d'environ 126 pouces dans cet intervalle de temps, c'est-à-dire d'environ un pied par siècle.

Aujourd'hui, continue le docteur Shaw, il faut, pour que les terres soient convenablement inondées, que le Nil s'élève à la hauteur de vingt coudées de Constantinople : ainsi, de-

(1) En 1721 et 1722.

puis le temps d'Hérodote, le sol de l'Égypte se sera élevé de 230 pouces, et par conséquent depuis Mœris jusqu'à l'année 1721, ce qui comporte une période de trois mille ans environ, de 356 pouces. L'élévation aura encore été, comme on voit, à très-peu près, de douze pouces par siècle (1).

Ces derniers raisonnemens du docteur Shaw seraient sans réplique, s'ils étaient appuyés sur des données certaines: mais, d'abord, il n'est pas sûr qu'Hérodote ait exprimé la crue du Nil en coudées grecques; en second lieu, outre que cette crue n'a jamais été exprimée en coudées de Constantinople, la publication qui se fait au Kaire des accroissemens journaliers de ce fleuve, est falsifiée à dessein, comme nous le dirons bientôt, et l'élévation effective de la crue ne va jamais à vingt coudées; enfin le docteur Shaw paraît avoir ignoré que le fond des fleuves s'exhausse en même temps que les plaines qu'ils submergent, par le dépôt des matières qu'ils charrient.

Cet exhaussement simultané du fond des fleuves, et des plaines qu'ils couvrent lors de leurs inondations, n'échappa point à Richard Pococke, qui voyagea en Egypte dans les années 1737 et 1738 (2). Cette observation le mit sur la voie d'expliquer les divers passages des auteurs de l'antiquité sur la hauteur des crues du Nil: aussi les a-t-il discutés avec beaucoup d'érudition; et il est probable qu'il serait parvenu à résoudre les questions qu'ils ont fait naître, s'il eût pu établir cette discussion sur des données certaines: mais ces

(1) *Observations géographiques, etc., sur la Syrie, l'Egypte, etc.*, t. II, pag. 188 et suiv. de la traduction française.

(2) Voyez ses *Voyages dans le Levant*, t. II, p. 267 de la trad. franç.

données lui ont manqué comme au docteur Shaw, qui l'avait précédé dans la même recherche.

Les opinions de ces deux voyageurs se réduisent ainsi à des conjectures plus ou moins hasardées : Pococke s'en était aperçu; et c'est à dessein d'obtenir un jour l'explication des difficultés qu'il avait rencontrées à concilier les récits des anciens historiens et des auteurs Arabes, qu'il termina sa dissertation sur le Nil en donnant quelques instructions à ceux qui visiteroient l'Égypte après lui, et que cette matière pourrait intéresser (1).

Jusqu'ici il règne, comme on voit, entre tous les voyageurs et les géographes que nous avons cités, un accord unanime sur la formation du sol de l'Égypte; leurs observations justifient l'ancienne tradition de son exhaussement, que les prêtres avaient communiquée à Hérodote. Ce fait ne pouvant plus être mis en doute, la seule question qui restait à résoudre, consistait à déterminer la quantité de cet exhaussement entre deux époques fixes. Le docteur Shaw et Richard Pococke se l'étaient proposée, comme on vient de le voir, au commencement du XVIIIe siècle; et s'ils n'en donnèrent point une solution rigoureuse, du moins ils essayèrent les premiers de tirer de la marche de certains phénomènes naturels quelques éclaircissemens pour l'histoire et la chronologie.

Les limites entre lesquelles devaient s'étendre les recherches qui restaient à entreprendre, se trouvaient ainsi posées, lorsqu'en 1723 Fréret, se reportant en arrière du point où

---

(1) Voyez ses *Voyages dans le Levant*, tom. II, pag. 267 de la traduction française.

les connaissances étaient parvenues, se crut fondé, non pas seulement à mettre en doute l'exhaussement du sol de l'Égypte, mais encore à contester l'exactitude de ce fait. Son mémoire, inséré parmi ceux de l'Académie des inscriptions (1) contient, sur les mesures de longueur usitées chez les anciens, une suite de recherches curieuses, mais plus propres à attester l'érudition de l'auteur que la sévérité de sa critique et son discernement dans le choix des preuves dont il appuie ses opinions à cette occasion.

En effet, il prétend qu'aujourd'hui, comme aux temps de l'empereur Julien, de Pline et d'Hérodote, il faut, pour inonder l'Égypte, que le Nil s'élève de seize coudées; d'où il conclut que, pendant la suite de siècles divisée par ces époques, le sol a dû nécessairement rester au même niveau. En admettant la vérité du fait qui sert de base aux raisonnemens de Fréret, il faudrait, pour que la conséquence qu'il en tire fût légitime, admettre aussi que le fond du lit du Nil et les terres qu'il submerge ne s'exhaussent pas simultanément; et comme cet exhaussement simultané est un résultat naturel des lois auxquelles le cours des fleuves est assujetti, on voit que la permanence du sol de l'Égypte au même niveau, et la conservation de la même coudée depuis Hérodote jusqu'à présent pour mesurer la hauteur annuelle des débordemens, ne sont que des hypothèses hasardées.

On doit être d'autant plus étonné de l'espèce de persévérance avec laquelle Fréret soutint l'opinion qu'il avait embrassée, que le phénomène de l'exhaussement du Nil, qui

(1) *Essai sur les mesures longues des anciens.* (Mémoires de l'Académie des inscriptions, tom. XXIV.)

en prouvait la fausseté, ne lui était point inconnu (1). Au reste, en comparant entre eux les témoignages des anciens historiens, des auteurs Arabes et des voyageurs modernes, témoignages dont Fréret fait l'énumération dans une dissertation lue sur cet objet spécial à l'Académie des inscriptions en 1742 (2), on trouve de nouveaux motifs de rejeter cette opinion; car, si les auteurs anciens et ceux du moyen âge fixent à seize coudées la hauteur à laquelle le Nil doit s'élever pour assurer à l'Égypte d'abondantes récoltes, il faut, suivant les voyageurs modernes, pour que les crues soient aussi favorables, qu'elles montent au-dessus de la vingtième coudée, et même jusqu'à la vingt-deuxième. Or cette discordance entre les anciens et les modernes, sur la hauteur à laquelle il convient que l'inondation parvienne, prouve de deux choses l'une, ou que le sol de l'Égypte s'est exhaussé par rapport à la surface moyenne du Nil, ou que les coudées dont on

---

(1) « Dans les débordemens des fleuves et des torrens limoneux qui « causent des attérissemens dans les pays qu'ils inondent, la partie la plus « grossière du limon, retenue par son poids dans le canal du fleuve ou « du torrent, ne se répand point sur les terres inondées, mais tombe dans « le canal, et en élève successivement le fond d'année en année; en sorte « qu'il faut aussi élever ses bords et les soutenir par des digues : sans quoi, « les débordemens deviennent de jour en jour plus fréquens et plus con- « sidérables. *Le lit du fleuve s'élevant ainsi continuellement*, il se trouve bien- « tôt placé sur une espèce de chaussée beaucoup plus haute que les terres « qui sont à droite et à gauche; et les digues ont besoin d'être sans cesse « fortifiées, pour soutenir *le poids* des eaux du fleuve. » *(De l'accroissement ou élévation du sol de l'Egypte par le débordement du Nil*, Mémoires de l'Académie des inscriptions, *tom. XVI, pag.* 343.*)*

(2) *Mémoires de l'Académie des inscriptions*, tom. XVI, pag. 352.

fait usage aujourd'hui pour en mesurer les accroissements annuels, sont plus petites que celles dont on faisait usage autrefois; ce qui renverse ou le systême de la permanence du sol de l'Égypte au même niveau, ou celui de la conservation non interrompue des anciennes coudées Nilométriques; systêmes que Fréret s'efforçait d'étayer l'un par l'autre.

Quelque erronées que soient ces diverses opinions de Fréret, elles n'en ont pas moins été adoptées par la plupart des savants qui ont écrit depuis sur la même matière; d'abord par Bailly (1), ensuite par Paucton (2) et Romé Delisle (3), et enfin par Larcher (4). La publication de ces opinions ayant, en quelque sorte, remis en doute le fait incontestable de l'exhaussement du sol de l'Égypte et de l'accroissement du Delta, Savary consacra quelques-unes de ses lettres à en apporter des preuves superflues (5). Si M. de Volney, qui voyagea en Égypte peu de temps après, releva quelques inexactitudes qui semblent affaiblir ces preuves, il était trop judicieux pour ne pas admettre aussi le prolongement du Delta vers la mer, et l'exhaussement du sol de l'Egypte (6). Ramené, en traitant cette question, à discuter les passages de tous les auteurs anciens et modernes qui ont indiqué la hauteur à laquelle le Nil doit s'élever pour inonder convenablement les terres, M. de Volney suppose que

---

(1) *Histoire de l'Astronomie moderne*, pag. 146 et suiv.

(2) *Métrologie*, Paris, 1784; pag. 117 et suiv.

(3) *Ibid.* Paris, 1789.

(4) *Histoire d'Hérodote*, traduite par Larcher, 13e et 38e remarques sur le livre II.

(5) *Lettres sur l'Egypte*, t. Ier, pag. 13, 15, 41, 275, etc.

(6) *Voyage en Egypte et en Syrie*, tom. Ier, chap. II et III.

cette hauteur est toujours de quatorze à seize coudées; il croit d'ailleurs, conformément aux opinions de Fréret, de d'Anville et de Bailly, que la coudée du nilomètre n'a point varié de longueur, et qu'elle est de vingt pouces six lignes de notre pied-de-roi. Après avoir remarqué que, pendant une période de dix-huit siècles, il a fallu que le Nil montât, chaque année, à cette hauteur, il se demande comment il s'est fait que, depuis la fin du xve siècle, les crues favorables qui parvenaient à quinze coudées seulement, se sont subitement élevées à vingt-deux. Il répond à cette question, en disant que la colonne du Meqyâs a été changée; que le mystère dont les Turcs l'enveloppent, a empêché les voyageurs modernes de s'en assurer; mais que cette colonne parut neuve à Pococke, à qui il fut permis de la visiter en 1737.

Au reste, M. de Volney rapporte une observation importante recueillie par Niebuhr en 1762. Ce voyageur remarqua sur un mur de Gyzeh, où l'inondation de 1761 avait laissé sa trace, qu'au 1er juin suivant, le Nil avait baissé de vingt-quatre pieds au-dessous de cette trace (1). Mais cette hauteur de la crue totale de 1761 à 1762 était loin de s'accorder avec la somme des crues journalières, telles qu'elles avaient été publiées dans les rues du Kaire; d'où il s'ensuit évidemment que ces publications sont fausses. M. de Volney était parfaitement instruit de la fausseté de ces annonces; il cite même, à cette occasion, les tentatives infructueuses que fit le baron de Tott pour obtenir la vérité des crieurs publics, dont, malgré ses libéralités, il ne reçut que des rapports discordants (2).

---

(1) *Voyage en Arabie*, par L. Niebuhr, tom. Ier, pag. 102.

(2) *Voyage en Egypte*, tom. Ier, pag. 47.

On voit, par tout ce qui vient d'être dit, que la question de l'exhaussement du sol de l'Égypte, et de l'accroissement du Delta, avait été traitée jusque dans ces derniers temps, ou par des voyageurs qui ne faisaient pas de cette question un objet particulier de recherches, ou par des érudits qui prétendaient l'éclaircir en essayant de concilier certains passages d'auteurs anciens contradictoires entre eux, ou du moins que leur obscurité rend susceptibles d'interprétations différentes. On ne pouvait espérer d'obtenir une solution complète de cette question, que lorsque les géologues et ceux qui ont fait une étude particulière de la théorie du cours des fleuves, s'en seraient emparés. Le desir de parvenir à cette solution fut probablement un des principaux motifs qui déterminèrent le célèbre Dolomieu à s'associer à l'expédition d'Égypte : personne ne pouvait mieux que cet habile observateur dissiper tous les doutes dont l'érudition de plusieurs écrivains avait malheureusement obscurci l'histoire physique de cette contrée, lui qui, par une étude approfondie, s'était préparé d'avance à l'explorer, et auquel le flambeau de la critique avait déja fait distinguer sur quels points de la discussion les recherches qui restaient à entreprendre, devaient être spécialement dirigées.

Le Mémoire qu'il publia en 1793 sur la constitution physique de l'Égypte, contient l'exposé de tout ce qu'on savait et de tout ce qu'on pouvait dire alors sur cette matière (1). Dolomieu y prouve, par une multitude d'exemples et de raisonnemens sans réplique, que le Delta a dû être formé par les alluvions du Nil; mais il suppose qu'il existe, dans

(1) *Journal de physique*, tom. XLII, janvier 1793.

l'intérieur de cette partie de l'Égypte, des masses de rochers calcaires qui ont, pour ainsi dire, servi de noyau à ces attérissements. Passant ensuite à l'exhaussement de cette contrée, il observe que, si le dépôt des matières chariées par le Nil était, chaque année, la cent-vingtième partie de la hauteur de l'inondation, ainsi que le docteur Shaw l'avait pensé, le sol de l'Égypte s'éleverait de quatorze pieds environ dans l'espace de cent vingt ans, mais qu'en effet il ne reste pour l'exhaussement de l'Égypte qu'une très-petite partie des matières que le Nil tient suspendues, tout le reste étant porté à la mer.

D'accord avec Richard Pococke, il admet que le fond du Nil s'exhausse en même temps que les terres qui bordent son lit; ce qui le conduit à expliquer la difficulté que présentent les diverses expressions de la crue du Nil à des époques différentes.

Il est clair, en effet, que si la colonne nilométrique de l'île de Roudah est restée stable, tandis que le fond du Nil s'est exhaussé autour d'elle, le terme de la plus haute crue correspondante à l'époque de son érection doit se trouver au-dessous des plus hautes inondations actuelles. Pour faire coïncider les inondations données par la colonne du Meqyâs avec les véritables crues du fleuve, il a fallu de temps en temps reconstruire les nilomètres; c'est aussi ce que prouve le témoignage de tous les historiens (1).

Quelle que soit, au surplus, la loi de l'exhaussement du lit du Nil, on conçoit que ce phénomène doit être très-peu

---

(1) *Voyez* les notes et éclaircissements sur le *Voyage de Norden*, par M. Langlès, tom. III, pag. 224 et suiv. (Paris, 1798.)

sensible pendant la durée d'une génération; ce n'est qu'en comparant les crues publiées il y a déja plusieurs siècles, à celles que l'on publie de nos jours, qu'il est possible de s'en apercevoir.

Il restait à traiter la question du prolongement du Delta dans la Méditerranée. Dolomieu pense, avec raison, que l'accroissement de la basse Égypte en ce sens a été autrefois plus rapide qu'il ne l'est aujourd'hui, mais qu'il ne continue pas moins de s'opérer constamment. Il cite les villes de Rosette et de Damiette, qui étaient, au temps de leur fondation, il y a environ dix siècles, aux embouchures des branches du Nil auxquelles elles ont donné leur nom, et qui sont aujourd'hui reculées dans les terres à près de deux lieues du rivage. Il entreprend enfin la discussion du passage d'Homère relatif au voyage de Ménélas: mais, comme il ne fait pas attention que du temps de ce poëte le Nil était désigné par le nom d'*AEgyptus*, que l'embouchure Canopique de ce fleuve pouvait être reculée vers le sud, et que l'on pouvait en effet compter une journée de navigation entre l'île de *Pharos* et cette embouchure, Dolomieu se trouve obligé de supposer que Ménélas contourna la chaîne de rochers calcaires qui se termine à Abouqyr, et fut obligé d'aller chercher le Nil au fond de la partie de l'ancien golfe occupée depuis par le lac *Mareotis*, que des attérissements ont recouvert.

La discussion de tous les faits qu'il rapporte, conduisit notre savant collègue à conclure, 1° qu'il faut distinguer dans le sol de la basse Égypte les rochers calcaires qui font partie du fond de l'ancien golfe, les sables qui sont apportés par d'autres causes que le Nil, et le limon de ce fleuve qui

compose les atterissements proprement dits; 2° que l'exhaussement du sol de l'Égypte est une suite naturelle de submersions annuelles qu'il éprouve, et que la différence entre les crues anciennes et les crues actuelles existe seulement dans la manière de les énoncer, en les rapportant à une colonne qui se trouve aujourd'hui enterrée au-dessous du lit du fleuve de toute cette différence; 3° enfin, que le Delta continue à s'étendre de plus en plus du côté du Nord.

Malheureusement tous les faits sur lesquels ces conclusions sont appuyées, ne sont pas également exacts: ainsi l'on ne rencontre dans aucune partie du Delta rien qui atteste l'existence de ces rochers calcaires autour desquels Dolomieu suppose que les atterissements commencèrent à se former. De même ce n'est pas seulement parce que le pied de la colonne nilométrique du Meqyâs de Roudah se trouve aujourd'hui enterré à une certaine profondeur au-dessous des plus basses eaux, que la hauteur des inondations favorables, qui était autrefois de seize coudées, est annoncée aujourd'hui de vingt-deux ou de vingt-trois; c'est encore parce que l'unité de mesure à laquelle on rapporte les crues journalières du Nil qui sont publiées au Kaire, diffère beaucoup de la coudée du Meqyâs (1). Dolomieu, ignorant cette particularité et ne connaissant pas la véritable longueur de cette dernière unité de mesure, s'est cru fondé à avancer que le fond du Nil avait dû s'élever, dans l'inter-

(1) La coudée particulière du cheykh de Meqyâs, en parties de laquelle on publie les crues journalières, n'est que les deux tiers de celle qui est gravée sur la colonne nilométrique. *Voyez* le Mémoire de M. Le Père et celui de M. Marcel, publiés dans cet ouvrage.

valle de neuf cent soixante-dix ans environ, de sept coudées de vingt-un pouces six lignes chacune, ou de 3^{m},80.

Ici se termine l'exposé des opinions diverses auxquelles la formation du sol de l'Égypte a donné lieu. Des observations multipliées dans presque toute l'Europe ont indiqué aux peuples modernes la marche et les progrès des attérissements qui se forment à l'embouchure des fleuves et sur leurs bords. Le cours du Nil, soumis à l'action des mêmes causes, a dû présenter les mêmes effets : aussi avaient-ils été reconnus dès la plus haute antiquité ; et la tradition qu'Hérodote nous en a conservée sans altération, confirmée de nouveau par les récits de la plupart des voyageurs, n'aurait jamais été révoquée en doute, si Fréret n'eût point été entraîné à soutenir un autre système qui, tout paradoxal qu'il était, trouva des partisans parmi des savants du premier ordre. Ainsi des phénomènes simples et naturels, observés par-tout, et dont l'existence n'était contestée pour aucun lieu du monde, furent mis en question pour l'Égypte. Dolomieu entreprit de prouver qu'elle ne pouvait être en cela l'objet d'une exception aux lois de la nature : nous lui devons le dernier et le plus beau travail qui ait été fait sur l'histoire physique de cette contrée ; et nous lui devrions sans doute de l'avoir complété par un grand nombre d'observations nouvelles s'il y eût séjourné plus long-temps : mais il en partit avant de l'avoir parcourue comme il en avait eu d'abord le projet, en nous laissant, sinon l'espérance d'obtenir le succès qu'il aurait indubitablement obtenu de ses recherches, du moins l'obligation de multiplier les nôtres et d'en faire connaître les résultats.

Il convient cependant, avant de les rapporter, d'indiquer

succinctement par quelles causes les derniers écrivains qui ont voulu déterminer la quantité d'exhaussement du sol de l'Égypte, ont été induits en erreur.

Depuis Hérodote jusqu'à Léon d'Afrique, qui vivait au commencement du XVIe siècle, tous les témoignages des historiens et des voyageurs s'accordent à fixer à seize coudées la hauteur à laquelle la crue du Nil doit s'élever pour que les terres de l'Égypte soient convenablement inondées. C'était aussi lorsqu'elle était parvenue à cette hauteur, que l'impôt auquel ces terres sont assujetties, devait être acquitté en entier. Cet ancien usage de faire supporter l'impôt à toutes les terres, lorsque l'inondation est montée à ce terme, s'est maintenu jusqu'à présent; et voilà pourquoi la trace de la seizième coudée sur la colonne nilométrique est appelée *l'eau du Sultan*, au rapport d'Abd-allatif (1), et que la digue du canal du Kaire est coupée aussitôt après que le cheykh du Meqyâs a fait proclamer que la crue s'élève à seize coudées.

Cette coupure de la digue, qui, comme on sait, s'exécute avec beaucoup de solennité, ne suspend pas la publication des accroissements journaliers du Nil : elle continue d'avoir lieu pendant quelque temps; et dans certaines années, elle se prolonge jusqu'à l'annonce d'une crue totale de vingt-trois ou de vingt-quatre coudées. En 1683, par exemple, pendant que le prince Radziwill était en Égypte, on publia une crue de vingt-une coudées; et en 1801, la troisième année de notre expédition, on en publia une de vingt-trois coudées

(1) *Relation de l'Égypte*, par Abd-allatif, médecin arabe de Bagdad, etc. traduite par M. Silvestre de Sacy. Paris, 1810; pag. 336.

deux doigts, quoiqu'elle n'eût été véritablement que d'un peu plus de dix-huit coudées, en commençant à compter de la division inférieure de la colonne.

Il y a donc, depuis une certaine époque, une différence entre la longueur de la coudée marquée sur la colonne du Meqyâs, et la longueur de celle qui est employée dans les criées publiques. Les voyageurs étrangers qui n'ont connu que les accroissemens journaliers, tels que les publications en sont faites, ont ignoré par conséquent la hauteur réelle de l'inondation mesurée au Meqyâs, et n'ont pu tirer de la différence de seize coudées, entre la hauteur à laquelle le Nil devait parvenir autrefois, et celle de vingt-trois et de vingt-quatre, à laquelle on annonce qu'il parvient aujourd'hui, aucune conclusion juste sur l'exhaussement du sol de l'Égypte et du lit de ce fleuve. Nous ajouterons que c'est non-seulement sur la hauteur totale de son accroissement annuel, mais encore sur la loi de son accroissement diurne, que la plupart des voyageurs ont été induits dans une erreur que partagent tous les habitans du pays. En effet, Thévenot (1), le P. Vansleb (2) et Pococke (3) nous avaient déja appris, et nous avons été à portée de nous en assurer, qu'au lieu de publier les accroissemens rapides qui ont lieu de vingt-quatre heures en vingt-quatre heures, quand le Nil commence à se gonfler, on en dissimule une partie, que l'on réserve pour être ajoutée aux accroissemens dont on fait l'annonce quel-

(1) *Voyage du Levant*, tom. Ier, pag. 463.

(2) *Nouvelle Relation d'Egypte*, par le P. Vansleb, pag. 68.

(3) *Voyage de Richard Pococke en Orient, dans l'Egypte, l'Arabie, etc*, tom. II de la traduction française, *in*-12, pag. 267 et suiv.

ques jours avant celui où les digues des canaux doivent être ouvertes : ainsi, quoique le Nil ne croisse alors communément que de cinq ou six doigts, les crieurs en publient vingt-trois ou vingt-quatre, afin d'augmenter les espérances d'une bonne récolte, et d'obtenir sous cette espérance, et par l'effet de la satisfaction qu'elle procure, des gratifications plus fortes; car ces crieurs vont annonçant l'état du Nil dans les rues, et entrent dans les maisons, où ils reçoivent quelque argent.

Les mêmes motifs qui, dans l'antiquité, avaient fait confier les nilomètres à la garde exclusive de certains membres de l'ordre sacerdotal, et qui en interdisaient l'accès au vulgaire, ferment encore l'entrée du Meqyâs de Roudah au peuple actuel de l'Égypte : on tient ainsi caché sous des annonces mensongères le véritable état du fleuve pendant la durée de sa crue, parce que l'intérêt du fisc exige que l'impôt soit acquitté tout entier par les contribuables, à quelque hauteur que l'inondation s'élève. Au reste, il n'est point de notre sujet de rechercher la cause à laquelle on doit attribuer les usages suivis dans la publication journalière de l'accroissement du fleuve; il nous suffit d'avoir prouvé qu'avant l'expédition française en Égypte, on manquait d'observations précises pour résoudre les questions relatives à la formation du sol de cette contrée. Celles que nous avons recueillies vont être exposées dans la section suivante.

SECTION IV.

Recherches et Observations faites pour déterminer la quantité séculaire d'exhaussement du lit du Nil et du sol de l'Égypte.

Les changemens qui s'opèrent naturellement dans le lit

d'un fleuve par le dépôt successif des matières qu'il charie, sont assujettis à des lois générales, également applicables à tous les courants d'eau dont la longueur développée s'accroît par le prolongement des attérissemens qui se forment à leur embouchure. Ainsi les observations au moyen desquelles on détermine ces changemens, peuvent servir à étendre la théorie du cours des fleuves, c'est-à-dire de la partie de l'hydraulique qui se lie le plus immédiatement à l'histoire physique de la surface de la terre.

L'exhaussement des plaines exposées à des submersions périodiques suivrait les mêmes lois, si les eaux s'y répandaient en s'épanchant naturellement par-dessus les bords du fleuve qui les traverse, et si, après les crues de ce fleuve, elles rentraient naturellement dans son lit : mais, lorsque ces plaines, comme celles de l'Égypte, sont entrecoupées de canaux, et traversées par des barrages qui soutiennent sur différens points les eaux d'une inondation, la marche de la nature se trouve intervertie, et les observations que l'on peut recueillir sur l'exhaussement du sol, ne présentent plus que des anomalies dont les travaux des hommes peuvent seuls fournir l'explication.

On voit comment les faits relatifs à l'exhaussement du lit du Nil, et ceux relatifs à l'exhaussement du sol de la vallée, doivent se ranger en deux classes distinctives.

Les premiers peuvent servir non-seulement à constater la quantité dont le fleuve s'est exhaussé dans un certain intervalle de temps, mais encore à faire connaître la loi de cet exhaussement avec d'autant plus de certitude, que les observations ont été répétées en un plus grand nombre de lieux. Quant aux seconds, ils constatent bien, à la vérité, l'ex-

haussement du sol des plaines exposées aux inondations; mais on n'en peut conclure que par approximation la progression suivant laquelle il s'opère en un point déterminé.

Le Nil présente, pour la détermination des lois générales auxquelles les fleuves sont assujettis dans l'établissement de leur régime, l'avantage particulier de ne recevoir, depuis son entrée en Égypte jusqu'à son embouchure, aucun affluent qui modifie la pente naturelle de ses eaux et la figure du fond de son lit. C'est un immense courant isolé, dont il est par conséquent d'autant plus facile d'étudier les divers phénomènes, qu'ils sont dus à des causes moins compliquées. D'un autre côté, tandis que la plupart des peuples peuvent voir avec une sorte d'indifférence les fleuves qui traversent leur pays, s'écouler à la mer, sans avoir besoin de remarquer les changemens que le retour des saisons fait éprouver à ces fleuves, les Égyptiens, intéressés à connaître à chaque instant l'état du Nil, puisqu'il est la source unique de la fécondité de leurs terres, avaient érigé, le long de son cours, des édifices particuliers où, comme dans autant d'observatoires, on tenait registre de ses changemens journaliers; édifices dont, après un certain laps de temps, la position, par rapport au niveau du fleuve, pouvait elle-même servir à indiquer la quantité d'exhaussement séculaire de ce niveau.

Si l'Égypte a été appelée avec raison une *terre classique*, on voit que le Nil mériterait le nom de *fleuve classique* avec plus de raison peut-être; car les observations dont il est l'objet depuis un temps immémorial, conduiraient certainement à la connaissance des lois de l'hydraulique applicables aux grands courans d'eau et aux changemens qu'ils éprouvent dans la

pente et la figure de leurs lits, si les nilomètres qui furent construits dans les différentes provinces de l'Égypte, avaient subsisté jusqu'à-présent, et si la date de leur érection nous était bien connue.

Mais il n'existe aujourd'hui qu'un seul nilomètre que l'on consulte : c'est celui de l'île de Roudah ; et parmi ceux dont l'histoire constate l'existence, nous n'avons retrouvé que celui de l'île d'Éléphantine : ainsi ces deux monumens sont les seuls à l'aide desquels on puisse découvrir l'exhaussement du lit du fleuve sur les deux points où ils sont érigés.

J'ai rendu compte ailleurs de la découverte que je fis, pendant mon séjour à Syène, du nilomètre d'Éléphantine, tel que Strabon l'a décrit (1). Il est tracé sur la paroi d'une galerie pratiquée derrière un mur de quai de cette île, ou plutôt dans l'épaisseur de ce mur. La dernière coudée de ce nilomètre porte en caractères grecs l'indication du nombre 24 ; c'était, en effet, en coudées égyptiennes, dont l'usage se conserva, comme on sait, sous les Ptolémées, l'expression de la hauteur des grandes inondations mesurées immédiatement au-dessous de la dernière cataracte. A l'époque où ce monument fut construit, ces inondations ne devaient donc pas s'élever au-dessus de ce terme.

Le Nil ne s'était encore accru que de quelques coudées dans les premiers jours du mois de thermidor de l'an VII (25 juillet 1799), époque à laquelle je me trouvais à Syène. Je dois à cette circonstance la découverte de l'ancien nilomètre dont j'ai donné la description ; car, un mois plus tard,

---

(1) Voyez le tom. Ier des Mémoires d'antiquités, dans le grand ouvrage sur l'Egypte.

il aurait été entièrement enseveli sous les eaux, et la recherche en eût été impossible.

Pour comparer le niveau de la vingt-quatrième coudée du nilomètre d'Éléphantine à celui des grandes inondations actuelles, il fallait être assuré de la hauteur à laquelle elles s'élèvent; ce dont nous ne pouvions être les témoins. Heureusement leurs traces ne se détruisent point d'une année à l'autre, et nous les retrouvâmes très-distinctes sur la face du mur de quai derrière lequel le nilomètre est établi.

Il résulte du nivellement que je fis pour constater la différence de hauteur entre l'extrémité supérieure de la vingt-quatrième coudée de ce nilomètre et les grandes inondations actuelles, que cette différence est de 2 m. 413 (*fig.* 8). Ainsi le fond du Nil s'est exhaussé de cette quantité au moins, depuis l'époque à laquelle ce monument fut érigé; car il n'y a aucune raison de penser que la quantité d'eau qui descend de l'Abyssinie, soit différente aujourd'hui de ce qu'elle était autrefois.

Une inscription tracée dans la galerie qui forme le nilomètre d'Éléphantine, porte la date du règne de Septime-Sévère (1), et semble avoir eu pour objet de rappeler une inondation qui s'éleva de plusieurs palmes au-dessus de la vingt-quatrième coudée : ainsi, sous cet empereur, les grandes inondations dépassaient déja la limite à laquelle elles s'arrêtaient lorsque le nilomètre d'Éléphantine avait été construit.

Il est probable, comme nous l'avons dit ailleurs, que l'inondation à laquelle se rapporte l'inscription dont nous venons de parler, n'avait rien d'extraordinaire; mais que

(1) *Ibid.*, pag. 10.

les Romains, qui tenaient garnison à Syène sous le règne de Septime-Sévère, ignorant l'effet naturel de l'exhaussement du lit du fleuve, la remarquèrent comme un phénomène, parce qu'ils supposaient que l'extrémité supérieure de la vingt-quatrième coudée du nilomètre était un terme fixe, au-delà duquel les crues annuelles du fleuve ne pouvaient jamais s'élever. Ainsi ce monument se trouvait déja inférieur au niveau pour lequel il avait été construit. Admettons cependant que les grandes inondations parvinssent jusqu'à la trace gravée au-dessus de la vingt-quatrième coudée, c'est-à-dire, surmontassent cette coudée d'environ $0^{m},31$, à l'époque même de l'inscription dont il s'agit; il nous sera facile d'assigner la quantité dont le fond du Nil s'est exhaussé devant l'île d'Éléphantine, depuis cette époque jusqu'à ce jour. En effet, Septime Sévère parvint à l'empire l'an 193, et mourut l'an 211 de l'ère vulgaire : si donc on admet que l'inscription ait été gravée au milieu de son règne, le fond du Nil se sera élevé de $2^{m},11$ en seize cents ans; ce qui donne $0^{m},132$ d'exhaussement par siècle.

Passons maintenant au Meqyâs de l'île de Roudah, et recherchons comment il peut servir à assigner la quantité d'exhaussement du lit du Nil au point où ce monument a été établi.

Nous n'entreprendrons point d'en donner ici une description détaillée; cette description doit être l'objet d'un mémoire de M. le Père notre collègue : il nous suffira de rappeler que la pièce principale de ce nilomètre consiste en une colonne de marbre blanc érigée au milieu d'un réservoir quadrangulaire qui communique par un aqueduc avec le Nil, à la pointe méridionale de l'île de Roudah. Cette co-

lonne est divisée, depuis sa base jusqu'au-dessous de son chapiteau, en seize coudées de vingt-quatre doigts, ayant chacune 0^{m}, 541 de longueur (1).

Lorsque ce nilomètre fut érigé, il est indubitable que la seizième coudée qui le termine *(fig. 9)*, désignait la crue d'une année d'abondance; car il a toujours été important pour le gouvernement de l'Égypte, de connaître la limite des crues qui permettaient de lever la plus grande somme de tributs : si donc cette limite eût surmonté l'extrémité de la colonne nilométrique actuelle, il est évident que par cela même on aurait donné à cette colonne une plus grande hauteur, afin qu'elle pût indiquer les inondations les plus favorables au fisc.

Or, dans l'état actuel des choses, quand le Nil ne s'élève pas au-dessus de la seizième coudée du Meqyâs, l'inondation est réputée mauvaise. Celle de 1799, par exemple, fut regardée comme une des plus faibles, et cependant elle monta à seize coudées deux doigts. L'année suivante, qui fut une année abondante, elle s'éleva à dix-huit coudées trois doigts. Il y a donc entre les indications d'une bonne inondation donnée par le nilomètre de Roudah, à l'époque de son érection et à l'époque actuelle, une différence de deux coudées trois doigts, ou de 1^{m},149; d'où l'on est fondé à conclure qu'entre ces deux époques le lit du Nil s'est exhaussé de cette quantité. Mais on sait que ce monument fut reconstruit pour la dernière fois par le calife el Motouakel (2), au

---

(1) *Voyez* le Mémoire sur le nilomètre d'Éléphantine, deja cité.

(2) Vers l'année 233 de l'hégire (847 de l'ère chrétienne). *Voy.* le Mémoire sur le Meqyâs de l'île de Roudah, par M. Marcel, *É. M.* t. II, p. 29.

milieu du IXe siècle : ainsi l'exhaussement séculaire, que nous avons trouvé de 0^m,132 devant l'île d'Éléphantine, n'est que de 0^m,120 à la hauteur du Kaire.

Quoiqu'il n'existe qu'une légère différence entre ces deux expressions de l'exhaussement séculaire du fond du Nil, il convient cependant, avant d'aller plus loin, d'expliquer cette différence par des considérations puisées dans la nature même des causes qui la produisent, et de faire voir comment ces causes tendent sans cesse à rendre ces expressions identiques.

La pente d'un fleuve, les dimensions de sa section transversale, et la vîtesse de ses eaux, sont les élémens essentiels de son régime. Les rapports qui s'établissent entre ces divers élémens, ne peuvent varier qu'autant que la résistance des parois du lit à l'action corrosive du courant vient elle-même à changer; et, dans ce cas, les modifications qu'éprouvent les élémens du régime, ont toujours pour dernier résultat de rétablir l'équilibre entre l'action corrosive du courant et la résistance des parois, c'est-à-dire d'amener le régime du fleuve à un certain état permanent.

On conçoit, par exemple, que si des causes accidentelles augmentent, pendant une certaine période, la hauteur des dépôts qui se forment sur des points déterminés de la longueur d'un courant d'eau, la pente et par conséquent la vîtesse de ce courant deviennent plus grandes au-dessous de ces points : or il résulte nécessairement de cette augmentation de vîtesse, que les dépôts sont portés plus loin qu'ils ne l'étaient auparavant; ce qui rétablit la pente primitive et ramène de nouveau les mêmes effets. Ainsi le fond du lit des fleuves qui charient des troubles, oscille au-dessus et au des-

sous d'une certaine surface qui constituerait la permanence de leur régime, si jamais le fond du lit parvenait à coïncider avec elle. Cette surface restant toujours parallèle à elle-même, s'élève de plus en plus, de telle sorte que la quantité de son exhaussement, dans toute l'étendue de son cours, pendant un certain intervalle de temps, est égale à l'exhaussement moyen de ses deux extrémités pendant la même période.

Appliquant cette théorie à la portion du cours du Nil comprise depuis Éléphantine jusqu'au Kaire, on voit que l'exhaussement séculaire de son lit doit être représenté, à très-peu-près, par l'exhaussement moyen entre ceux qui ont été observés à ces deux points, c'est-à-dire par la moitié de leur somme, ou 0^{m}, 126.

Quant à l'exhaussement moyen du sol de la vallée d'Égypte, il suffit d'une légère attention pour reconnaître qu'il doit être exactement le même que l'exhaussement moyen du lit du Nil; car, s'il en était autrement, il arriverait de deux choses l'une : ou le fond du fleuve s'exhausserait plus que les plaines adjacentes, ou il s'exhausserait moins. Or, dans le premier cas, il viendrait une époque où la hauteur du débordement sur les terres serait plus considérable qu'elle ne l'était précédemment; et, à dater de cette époque, l'épaisseur des dépôts de limon, qui, toutes choses égales, est proportionnelle à la hauteur des eaux troubles, deviendrait aussi plus considérable; ce que la supposition rejette : dans le second cas, les dépôts annuels qui ont lieu sur la plaine étant plus épais que sur le fond du fleuve, la profondeur de celui-ci augmenterait par rapport aux bords de son lit; et il viendrait un temps où, par suite de cette augmentation de profondeur

le fond de ce lit s'exhausserait davantage à son tour; ce qui est également contre l'hypothèse. Si donc il n'est point exact de dire qu'en un point déterminé de l'Égypte, le fond du lit du Nil et la plaine adjacente s'élèvent simultanément de la même quantité séculaire, il est constant que, depuis la dernière cataracte jusqu'à la mer, le fond du fleuve et le niveau des plaines qu'il submerge, se sont élevés d'une même quantité moyenne, puisque ces deux surfaces tendent sans cesse au parallélisme, et que la nature les y ramène quand des circonstances particulières ou les travaux des hommes les en ont momentanément écartées.

Nous allons rapporter maintenant les observations que nous avons faites pour reconnaître l'exhaussement du sol de l'Égypte dans les plaines de Thèbes, de Syout et d'Héliopolis.

Les parties inférieures de quelques-uns des monuments de Thèbes se trouvent aujourd'hui plus ou moins enfouies dans le terrain d'alluvion que les débordemens annuels du Nil ont déposé au pied de ces monumens. Si donc on pouvait connaître de combien ils s'élevaient autrefois au-dessus de la plaine à une époque bien connue, il serait aisé de déduire de la profondeur à laquelle ils se trouvent maintenant au-dessous du terrain naturel, l'exhaussement du sol de la vallée sur ce point. On voit quel devait être l'objet de mes recherches. J'eus occasion de les multiplier pendant environ trois semaines que nous résidâmes dans les différents villages qui occupent l'emplacement de cette ancienne capitale : on va voir quels en ont été les résultats.

Nous nous établîmes d'abord sur la rive gauche du Nil, où se trouve la statue colossale de Memnon. Ce colosse est

placé presque au pied de la chaîne libyque, à deux kilomètres environ de distance du fleuve : lorsque l'inondation s'étend jusque là, ce qui arrive assez fréquemment, il paraît au milieu des eaux, et, après leur retraite, au milieu de champs cultivés.

Il est évident que ce n'était pas dans une semblable position qu'il fut primitivement érigé. Ainsi le premier coup-d'œil jeté sur ce monument atteste que le sol au-dessus duquel il s'élève, s'est exhaussé lui-même des dépôts successifs de limon que les débordemens du fleuve ont accumulés.

En considérant de plus près le piédestal de cette statue, on remarque distinctement sur toutes ses faces la trace horizontale que les inondations y ont laissée. Je m'assurai que cette ligne était, à très-peu-près, à un mètre de hauteur au-dessus du terrain adjacent. Il fallait donc qu'à l'époque où ce monument fut établi, le sol de la place qu'il occupait fût au moins inférieur d'un mètre au sol actuel : autrement son piédestal aurait été exposé à être submergé tous les ans d'une certaine hauteur d'eau ; inconvénient à l'abri duquel on serait porté naturellement à croire que ses fondateurs l'avaient mis, quand d'ailleurs l'histoire ne nous aurait pas appris que les anciennes villes d'Égypte étaient toujours bâties sur des éminences factices, pour n'être point exposées aux inondations du Nil.

Une reconnaissance encore plus attentive me fit apercevoir, sur la face méridionale du piédestal de ce colosse, une inscription grecque, dont quelques lignes seulement paraissaient au-dessus du sol ; ses lignes inférieures étaient déja enterrées. Le nom d'*Antonin*, que je lus distinctement, me fit espérer que cette inscription, mise entièrement à

découvert, fournirait quelque date certaine d'après laquelle on pourrait établir quelques conjectures sur l'exhaussement séculaire de cette partie de la plaine.

Je fis en conséquence découvrir, par une fouille, la partie du piédestal qui porte cette inscription (1). J'en pris une copie littérale, dont M. Boissonade, membre de l'institut, a donné cette traduction :

POUR COMPLAIRE AU DESIR QUE J'AVOIS D'ENTENDRE TA VOIX,
GLORIEUX MEMNON, TA MÈRE, L'AURORE AUX DOIGTS DE ROSE,
T'A RENDU VOCAL LA DIXIÈME ANNÉE DE L'ILLUSTRE ANTONIN,
LE MOIS DE PACHON COMPTANT SON TREIZIÈME JOUR.

Voilà donc une inscription qui ne remonte pas au-delà du second siècle de l'ère chrétienne, et dont les lignes intermédiaires, se retrouvant au niveau même du terrain, fournissent en quelque sorte une démonstration écrite de son exhaussement depuis cette date. Mais quelle a été la quantité de cet exhaussement? C'est une question qui ne peut être résolue qu'à l'aide de quelque hypothèse sur la hauteur du sol à l'époque où cette inscription fut gravée.

Or on peut supposer, ce qui semble d'abord assez naturel, que la personne qui la grava, se tint debout devant le piédestal pendant qu'elle faisait cette opération; de manière que les lignes intermédiaires se trouvèrent, au moment où elles furent tracées, à environ $1^{m},50$ au-dessus du terrain adjacent; et, comme elles sont maintenant au niveau de ce terrain, il s'ensuivrait que ce niveau s'est exhaussé au moins de $1^{m},50$ depuis la date de l'inscription, c'est-à-dire

(1) Le *fac simile* de cette inscription est gravé *A.* vol. II, pl. 22, fig. 6 du grand ouvrage sur l'Egypte.

dans une période de seize cents ans; ce qui donne un exhaussement de $0^{m},094$ environ.

Remarquons cependant que cette supposition conduit au *minimum* de l'exhaussement séculaire; car, si l'inscription dont il s'agit a pu être gravée par un homme de taille ordinaire qui se tenait debout au pied du colosse, il a pu arriver aussi que cet homme se soit élevé, par quelque moyen, au-dessus du terrain naturel, pour tracer cette inscription, et la mettre, par cette précaution, à l'abri des dégradations auxquelles elle serait restée exposée si elle eût été gravée plus bas. C'est apparemment un pareil motif qui a fait placer sur les jambes, les bras et la poitrine de la statue, une partie des inscriptions dont elle est couverte, et cela à une époque où les quatre faces du piédestal présentaient, comme aujourd'hui, de grands espaces vides dans lesquels on pouvait tracer facilement ces inscriptions, sans qu'on eût besoin de recourir aux échafaudages qu'on a dû nécessairement employer pour les écrire là où elles sont placées. Ce motif ne vient-il pas appuyer l'hypothèse que l'auteur de l'inscription gravée dans la Xe année d'Antonin se sera aidé de quelque artifice pour l'écrire à une certaine hauteur? Or, s'il en était ainsi, l'exhaussement séculaire de la plaine serait plus grand que celui à la détermination duquel nous venons de parvenir. Les recherches que nous continuâmes de faire donnent un nouveau poids à cette conjecture.

Après avoir mis l'inscription entièrement à découvert, la fouille qui avait été commencée fut approfondie jusqu'à la base du piédestal. On trouva cette base à $1^{m},924$ au-dessous du terrain naturel, posée sur des blocs de grès qui probablement formaient le pavé de la place où la statue était érigée

(*fig.* 10). Ce piédestal est d'un grès quartzeux, extrêmement dur; il est poli sur toutes les faces, et se termine inférieurement par un socle de trente centimètres de haut, qui se raccorde avec ces faces par une moulure appelée *cavet*. Cette espèce d'ornement et le poli de tout l'ouvrage attestent que, lors de l'érection du colosse, son piédestal était destiné à être vu dans toute sa hauteur : il y a donc eu un temps où la statue de Memnon et son piédestal entier s'élevaient au-dessus d'un pavé de blocs de grès, qui probablement recouvrait le sol de la place où elle fut originairement placée; il ne s'agit plus que d'assigner, s'il est possible, une époque à laquelle le champ où elle se trouve aujourd'hui, présentait l'aspect d'une place publique.

Entre tous les auteurs de l'antiquité qui depuis Strabon ont parlé de ce colosse, et qui en ont décrit l'emplacement comme un lieu environné d'anciens édifices, dont ils attribuent généralement la dévastation à Cambyse (1), Philostrate est le dernier et celui dont le témoignage semble le plus positif. Il raconte, dans la Vie d'Apollonius de Tyane (2), « que le lieu où paraît la statue, ressemble à une place pu-« blique, telle qu'on en voit dans les villes anciennement ha-« bitées, où l'on trouve encore des fragmens de colonnes, des « vestiges de murailles, de siéges, de chambranles de portes, « et des statues de Mercure, dont une partie a été détruite « par le temps, et l'autre par la main des hommes, etc. »

---

(1) Diodore de Sicile, *Bibl. histor.* liv. I. Strabon, *Géogr.* liv. XVII. Pausanias, *Descript. de la Grèce*, liv. I.

(2) *Voyez* la *Description de Thèbes*, par MM. Jollois et Devilliers, ch. IX, pag. 99 et 118, où ils ont rapporté le passage de Philostrate.

Que, antérieurement au voyage d'Apollonius de Tyane en Égypte, le colosse de Memnon ait été situé dans l'intérieur d'un temple ou sur une place publique, il demeure toujours constant, s'il est permis d'en croire son historien, qu'à l'époque de ce voyage, les édifices au milieu desquels on remarquait ce colosse, étaient déja tombés en ruine et paraissaient avoir formé l'enceinte d'une place publique : mais, pour caractériser cet aspect, il fallait que le sol de cette place, c'est-à-dire le pavé de blocs de grès sur lequel le monument repose, fût encore à découvert; car, s'il eût été enseveli sous le limon, comme il l'est de nos jours, ce lieu aurait ressemblé à un champ, et non pas à une place publique, comme le dit Philostrate. Ceci s'accorde, au surplus, avec le témoignage de Strabon, qui, lorsqu'il visita les ruines de Thèbes à-peu-près dans le même temps, retrouva les grandes avenues de sphinx de Karnak pavées de dalles de pierre (1), qui sont aujourd'hui cachées sous les dépôts du Nil. On est donc suffisamment fondé à croire que le sol de la place du *Memnonium* n'avait point encore été recouvert d'alluvions lors du voyage d'Apollonius de Tyane; et comme la date de ce voyage peut être fixée au milieu du premier siècle de l'ère chrétienne, il s'ensuivrait que le sol du quartier de Thèbes où la statue de Memnon était placée, se serait exhaussé de $1^{m},924$ dans l'intervalle de dix-huit cents ans; ce qui donnerait un exhaussement moyen de $0^{m},106$ par siècle. Mais il faut bien remarquer que l'emplacement sur lequel cet exhaussement séculaire de $0^{m},106$ est mesuré, n'a pas toujours été exposé aux submersions annuelles, soit parce que c'était le dessus d'un mon-

(1) Strabon, *Géograph.* liv. XVII, pag. 805.

ticule factice, soit parce que c'était le prolongement du talus de la montagne Libyque : ainsi les inondations dont le niveau s'élevait de plus en plus par l'effet naturel de l'exhaussement de la plaine, n'ont couvert d'abord la place du *Memnonium* que de très-petites hauteurs d'eau, et n'y ont laissé, par conséquent, pendant un certain temps, que des dépôts de limon d'une épaisseur presque insensible; de sorte que la somme de ces dépôts successifs, dont l'épaisseur annuelle augmentait de plus en plus suivant une certaine loi, est nécessairement moindre que la somme des dépôts d'épaisseur constante qui s'accumulaient pendant le même temps dans la plaine. Voilà pourquoi, tandis que l'exhaussement de la vallée d'Égypte peut être porté à $0^{m},126$ par siècle, en le concluant de l'exhaussement même du lit du Nil, on ne trouve que $0^{m},100$ environ pour l'exhaussement séculaire de la place du *Memnonium*. On voit comment ces deux faits, qui semblent d'abord s'infirmer mutuellement, se confirment l'un par l'autre.

Nous venons de dire que la place du *Memnonium* pouvait être le dessus d'un monticule factice. Cette conjecture est en effet d'autant plus probable, que toutes les villes d'Égypte étaient, comme on sait, bâties sur de semblables éminences. On forma d'abord ces monticules des déblais qui provinrent du creusement des canaux dont le pays fut entrecoupé. Ces déblais, composés de différentes matières d'alluvion que le fleuve avait déposées naturellement les unes sur les autres, à-peu-près dans l'ordre de leurs pesanteurs spécifiques, ainsi que nos sondes l'ont indiqué, furent amoncelés en désordre pour former ces éminences artificielles, qui depuis continuèrent de s'exhausser et de s'étendre par l'accumulation

des décombres que l'on déposa autour des habitations dont elles se couvrirent, de même que cela se pratique encore aujourd'hui.

Le sol des villes et des villages de l'Égypte se trouva par conséquent composé, jusqu'à une certaine profondeur, de matières hétérogènes, tandis que la couche du limon du Nil qui formait le terrain naturel sur lequel on fit primitivement ce remblai, a dû nécessairement conserver sa couleur, son homogénéité, et l'horizontalité de sa surface : en creusant des puits verticaux dans un pareil remblai, on est toujours sûr de parvenir à cet ancien sol; et comme il est facile à distinguer par la réunion de ses caractères, il est également facile d'assigner son niveau par rapport à la surface actuelle de la plaine.

Or cette détermination conduirait, soit à la connaissance de l'exhaussement séculaire de la vallée, en supposant connue l'époque de la formation de ces remblais, soit à déduire cette époque même, de la quantité d'exhaussement séculaire qui aurait été assignée par des observations préalables.

Je sentais toute l'importance des fouilles que l'on aurait pu entreprendre autour des colosses du *Memnonium*, pour obtenir de nouvelles données sur ces questions; mais les circonstances nous obligèrent d'abandonner momentanément ce quartier de Thèbes; nous passâmes sur la rive droite du Nil, le 2 fructidor de l'an VIII (19 août 1799) : heureusement cette rive est également couverte de monumens, et nous pûmes y reprendre la suite de nos recherches au point où elles avaient été laissées de l'autre côté.

L'isolement des monumens rend les fouilles plus faciles à faire autour d'eux, et cette considération peut souvent dé-

terminer le choix des emplacemens où elles doivent être entreprises.

On a vu, dans la Description de Thèbes, publiée par MM. Jollois et Devilliers, ingénieurs des ponts-et-chaussées (1), que près de la porte occidentale du grand palais de Karnak se trouvaient deux sphinx, qui sont aujourd'hui presque entièrement enfouis sous le sol cultivable. Je fis creuser autour de l'un d'eux jusqu'au-dessous du socle sur lequel son piédestal est posé. Il se trouva précisément inférieur de $1^m,64$ au niveau moyen de la plaine (*fig.* 11). Le dessous du piédestal de la statue de Memnon, sur la rive opposée, avait été trouvé inférieur de $1^m,92$ au terrain adjacent. Il y a trop peu de différence entre ces deux quantités d'encombrement, pour ne pas admettre que le sol de la ville de Thèbes était à-peu-près au même niveau sur les deux rives du fleuve, ou, ce qui est la même chose, que ses différens quartiers étaient à-peu-près contemporains.

Je me disposais à approfondir la fouille que j'avais fait commencer près de ce sphinx, pour arriver au terrain vierge sur lequel repose le remblai qui supportait ces anciens monumens de Thèbes, lorsqu'en parcourant les environs du village de Karnak, je remarquai, à l'est de ce village, et dans le massif même du prolongement de ce remblai, une tranchée qui y avait été ouverte. Je reconnus aisément, à la coupe de ce remblai, qu'il était composé de terres rapportées et de décombres jusqu'à six mètres en contre-bas du sol actuel de la plaine, profondeur à laquelle le terrain d'alluvions naturelles, formé d'une couche de limon du Nil par-

(1) *Description générale de Thèbes*, pag. 85.

faitement horizontale et d'une épaisseur indéterminée, tranchait avec les terres du remblai de la manière la plus évidente. Il s'ensuivrait évidemment que, depuis l'époque de l'établissement du monticule factice sur lequel la ville de Thèbes fut bâtie, le sol de la vallée se serait exhaussé de six mètres.

Il convenait de répéter cette observation importante sur un autre point, et au pied de quelque monument dont on pût atteindre la fondation. L'extrémité méridionale du palais de Louqsor, à l'angle de ce palais le plus rapproché du Nil, me parut offrir un emplacement commode pour une nouvelle fouille. Une corniche égyptienne, qui sert de soubassement à cet édifice, s'élève sur une assise de fondation, laquelle se trouve aujourd'hui à $2^{m},76$ au-dessous du niveau de la plaine *(fig. 12)*. Cette assise est elle-même posée sur un ancien remblai, comme il nous fut aisé de le reconnaître (1). Nous continuâmes la fouille jusqu'à $3^{m},248$ de profondeur, où se montra le sol vierge de l'ancienne plaine : de sorte qu'ici, comme à Karnak, il y a environ six mètres de différence entre le niveau actuel de la vallée et celui de sa surface lorsqu'elle fut couverte du remblai de Louqsor.

Si l'histoire ne nous a rien appris de certain sur l'époque de la fondation de Thèbes, qui fut au temps de sa splendeur le chef-lieu d'un puissant royaume, on conçoit qu'à plus forte raison elle ne doit rien nous apprendre sur l'époque nécessairement antérieure où l'on forma, avec des terres rapportées, l'éminence artificielle destinée à recevoir dans la suite les constructions colossales dont nous admirons aujourd'hui les restes.

(1) Voyez *A.* vol. III, planche 8.

Nous disons que la formation de ce remblai est nécessairement antérieure à la fondation de Thèbes; car une telle ville ne s'élève point tout-à-coup au rang qu'elle doit tenir; elle s'accroît par degrés, à mesure que les avantages de sa situation y attirent une population plus nombreuse. De nouvelles habitations vinrent donc se grouper successivement autour de celles qui s'étaient établies les premières dans la plaine de Thèbes, et le nombre s'en accrut jusqu'à ce que les richesses qui s'accumulèrent dans cette capitale, eussent excité la cupidité de Cambyse et provoqué la dévastation à laquelle il la livra. Mais il s'était écoulé un long intervalle entre l'époque des premiers établissemens qui n'avaient fait que marquer en quelque sorte l'emplacement futur qu'elle devait occuper, et l'époque de la dévastation que nous venons de rappeler. Tout porte à croire que la plus ancienne de ces époques se confond avec celles où les habitans de la haute Égypte devinrent cultivateurs, de pasteurs qu'ils avaient été jusqu'alors : elle se perd dans la nuit des temps, et cependant ce serait celle que nous aurions besoin d'assigner.

Par suite de l'ignorance où nous sommes à cet égard, la différence que nous avons observée à Karnak et à Louqsor entre le niveau de l'ancienne plaine et celui de la plaine actuelle, ne peut nous servir à déterminer l'exhaussement séculaire du sol. Il ne nous reste qu'à employer les résultats de nos précédentes observations, pour rechercher l'époque probable de l'établissement des monticules factices sur lesquels la ville de Thèbes fut bâtie.

Nous avons expliqué plus haut comment, dans une période d'une certaine durée, l'exhaussement moyen de la vallée d'Égypte doit être égal à l'exhaussement moyen du lit du

Nil. Nous avons été conduits à fixer ce dernier à $0^m,126$ par siècle; et comme la différence de niveau dont il s'agit ici est de six mètres, il s'ensuit que l'époque cherchée doit remonter à 4760 ans de la date de nos observations, c'est-à-dire à 2960 ans avant notre ère, 418 ans environ après le dernier cataclysme que notre globe a éprouvé, suivant la chronologie des Septante.

Il ne faut pas perdre de vue, au surplus, que cette époque est celle d'une révolution qui, changeant les mœurs des premiers habitans de l'Égypte et leur donnant les besoins de la vie agricole, les amena au milieu de la vallée et sur les bords du Nil, où, pour se mettre eux et leurs troupeaux à l'abri de ses inondations périodiques, ils furent obligés de construire leurs demeures sur des éminences artificielles. Or cette révolution dans les mœurs des Égyptiens précéda nécessairement de plusieurs siècles la fondation de Thèbes, que les progrès rapides de l'agriculture et de la civilisation contribuèrent sans doute à agrandir, mais qui ne dut ses richesses et sa célébrité qu'au commerce immense dont elle devint postérieurement l'entrepôt.

D'autres observations nous ont appris à quelle hauteur au-dessus de la plaine actuelle se trouvent le plafond de l'une des salles situées à la partie méridionale du palais de Louqsor et le pied des obélisques qui décorent l'entrée de cet édifice du côté du nord.

Nous trouvâmes ce plafond supérieur de $0^m,66$ seulement au terrain naturel de la campagne adjacente. Quant aux obélisques, nous reconnûmes qu'ils étaient posés sur des blocs de granit, dont l'un, qui sert de base à l'obélisque oriental, se trouve également élevé de $0^m,65$ au-dessus de la

plaine : or on se rappelle que cette plaine est aujourd'hui plus haute de six mètres que l'ancien sol de la vallée; celui-ci se trouve par conséquent inférieur de $6^{m},65$ au plafond du temple de Louqsor et au soubassement de l'un de ses obélisques.

Après avoir ainsi déterminé la hauteur de ce plafond et de ce soubassement par rapport à l'ancien et au nouveau sol de la vallée, nous nous sommes assurés que l'obélisque oriental de Louqsor était enfoui jusqu'à sa base, de $3^{m},941$, dans le sol de décombres qui forme aujourd'hui la petite place de ce village, et que le niveau de cette place s'élevait de $4^{m},585$ ou de $4^{m},60$ au-dessus de la plaine actuelle (*fig.* 13).

Cette hauteur de $4^{m},60$ est à-peu-près celle des éminences factices sur lesquelles sont bâtis la plupart des villes et des villages modernes de l'Égypte : si donc on supposait, ce qui est très-vraisemblable, que, dans l'antiquité, les divers lieux de la vallée où les habitations s'étaient concentrées, avaient la même élévation au-dessus des campagnes voisines, il s'ensuivrait qu'au temps de la fondation des monumens de Louqsor, la plaine de Thèbes s'était déja exhaussée de deux mètres depuis l'époque des premiers remblais qui y avaient été faits ; or, cet exhaussement ayant exigé un intervalle de seize siècles environ, la date de la fondation des monumens de Louqsor remonterait à quatorze cents ans avant notre ère. Mais la ville de Thèbes, dans l'enceinte de laquelle ils étaient compris, existait nécessairement avant cette époque : nous rappellerons même ici que l'on voit aujourd'hui, dans des massifs de murs qui se rattachent aux ruines actuelles, des pierres taillées qui sont couvertes de sculptures hiéroglyphi-

ques; ce qui prouve évidemment que ces matériaux proviennent de la démolition de constructions plus anciennes.

On sent bien que nous ne prétendons pas ici attribuer une précision rigoureuse à la détermination des différentes époques que nous venons d'indiquer ; ce sont de simples conjectures, renfermées dans des limites de probabilité assez rapprochées, que de nouvelles recherches rapprocheraient encore : aussi n'avons-nous laissé échapper aucune occasion d'ajouter de nouveaux faits à ceux que nous avions déja recueillis.

Lorsqu'on eut établi pour la première fois, dans la vallée de l'Égypte supérieure, les digues destinées à soutenir les eaux de l'inondation, il se forma de ces digues et des canaux qu'elles traversent, un système général d'irrigation auquel les circonstances n'ont depuis apporté aucun changement notable, du moins quant aux emplacemens que ces ouvrages occupent. Cette opinion est d'autant mieux fondée, que la moindre modification dans ce système aurait augmenté la valeur de quelques terrains, en diminuant la valeur de quelques autres; ce qui aurait occasionné entre les cultivateurs des querelles sanglantes et interminables, semblables à celles qui s'élèvent aujourd'hui pour les plus légers intérêts, de village à village, quand il s'agit de la répartition des eaux d'arrosement. Tout porte donc à croire que les digues dont l'Égypte est entrecoupée transversalement, se retrouvent encore sur les mêmes emplacemens où elles furent établies dans leur origine : les seuls changemens qu'elles ont éprouvés consistent dans l'exhaussement progressif qu'elles ont reçu à mesure que le sol de la vallée s'est exhaussé lui-même.

Une de ces digues, qui traverse la plaine de Syout, sert

de chemin pendant l'inondation ; on emploie, pour l'exhausser et l'entretenir, les décombres qui proviennent de la ville et des villages voisins, matières qu'il est extrêmement facile de distinguer du terrain naturel formé des alluvions du fleuve.

Ayant fait creuser à travers cette digue le puits qui est indiqué sous le n° 4 *(fig. 5)*, je ne retrouvai le limon du Nil qu'à 3m,89 au-dessous de la plaine actuelle; ce qui indique la quantité d'exhaussement du sol de cette plaine, depuis la construction de la digue dont il s'agit. L'époque de cette construction remonterait ainsi à plus de trois mille ans, c'est-à-dire à douze cents ans au-delà de notre ère, si l'accroissement séculaire était de 0m,126, ainsi que, par les observations précédentes, on est fondé suffisamment à le conclure.

Pendant notre séjour à Syout, nous remarquâmes à l'angle d'une petite rue, et en saillie au-dessus du sol, l'extrémité supérieure d'une colonne de granit rouge poli; comme elle était érigée verticalement, il était probable qu'elle n'avait point été déplacée. Je fis faire une fouille qui justifia cette conjecture : cette colonne était enfouie de 6m,279 dans les décombres; sa base reposait sur un plafond en stuc, ce qui prouve qu'elle ornait l'intérieur d'un édifice. Enfin on trouva que la surface de ce plafond était de 1m,503 au-dessous du sol de la plaine actuelle, lequel est par conséquent lui-même inférieur de 4m,776 à celui des rues de Syout *(fig. 14)*. Malheureusement, on ne peut tirer de cette observation d'autre conséquence, sinon que le niveau des campagnes qui environnent cette ville, se trouve aujourd'hui supérieur de 1m,503 au plafond d'un édifice qui, lors de sa construction, fut indubitablement établi au-dessus des inondations.

Mais, si le monticule artificiel sur lequel fut bâtie l'an-

cienne ville de Lycopolis, dont il paraît que Syout occupe aujourd'hui la place, avait été formé, comme on peut le croire, à la même époque que la digue qui traverse la plaine, alors la fondation de Lycopolis ne remonterait pas à plus de douze cents ans au-delà de notre ère : elle serait ainsi beaucoup plus moderne que Thèbes; ce qui s'accorde avec l'opinion générale, que les parties supérieures de l'Égypte ont été peuplées et civilisées les premières.

Une circonstance particulière à la localité explique, au surplus, comment le monticule factice de Syout peut être d'une formation plus récente que la plupart de ceux sur lesquels ont été fondées les autres villes de la haute Égypte. En effet, la largeur de l'espace compris entre le Nil et le pied de la montagne Libyque n'est ici que de quinze cents mètres; de sorte que les anciennes peuplades qui avaient fixé originairement leurs demeures sur le penchant de cette montagne, purent changer leurs mœurs et embrasser la vie agricole, sans être obligées de venir s'établir dans la plaine sur des éminences artificielles : aussi remarque-t-on au nord des grottes de Syout, et à la même hauteur au-dessus de la vallée, une suite de petits plateaux couverts de fragmens de vases de terre, de stuc, et d'autres décombres provenant d'anciennes habitations abandonnées, vestiges que nous n'avons pas retrouvés ailleurs semblablement placés.

Les monumens anciens sont, comme on sait, beaucoup plus rares dans la basse Égypte que dans l'Égypte supérieure. Cependant l'obélisque d'Héliopolis, qui se trouve maintenant dans une plaine cultivable, exposée aux inondations du Nil, à environ un myriamètre du Kaire, offre un moyen de reconnaître l'exhaussement de cette plaine au-dessus de l'ancien sol. Je m'y rendis le 21 frimaire de l'an VIII (12 dé-

cembre 1799), je fis creuser au pied de l'obélisque, et je reconnus qu'il reposait sur un bloc de grès jaune rectangulaire, dont la surface est à $1^{m},88$ au-dessous du niveau actuel de la plaine. *(fig. 15.)*

Nous fîmes, à cent cinquante mètres de distance de l'obélisque et dans la même enceinte où il est placé, une deuxième fouille qui nous apprit que le limon du Nil recouvrait, sur une épaisseur de $1^{m},732$, un sol factice, composé de terres rapportées et de décombres. La surface de ce terrain factice, qui se trouve à-très-peu-près au même niveau que le bloc de grès qui sert de soubassement à l'obélisque, représente le sol de l'ancienne place où l'obélisque fut érigé. Ainsi, depuis l'époque où les plus grandes inondations ont commencé à atteindre le sol de cette place, le terrain s'est exhaussé de $1^{m},80$ environ.

On se rappelle que l'exhaussement de la plaine de Thèbes, près du colosse de Memnon, est de $1^{m},924$ au-dessus du soubassement de cette statue : nous avons trouvé l'exhaussement de la plaine d'Héliopolis de $1^{m},88$ au-dessus du soubassement de l'obélisque. Ces deux quantités d'exhaussement sont donc, comme on voit, à très-peu-près égales entre elles.

Des témoignages historiques, et notamment celui de Strabon, prouvent cependant que la ville d'Héliopolis était encore habitée, lorsque celle de Thèbes était détruite : ainsi la quantité d'exhaussement du sol de la première devrait être moindre que la quantité d'exhaussement du sol de la seconde, si quelque cause particulière n'avait pas interverti la marche naturelle des alluvions. Or cette cause est facile à découvrir, par le simple examen des circonstances de l'inondation sur ces deux points de l'Égypte.

On remarque, sur les faces du piédestal de la statue de Memnon, la trace des inondations actuelles à un mètre au-dessus de la surface du sol *(fig. 10)*, tandis que, dans la plaine d'Héliopolis, la trace de ces inondations sur les faces de l'obélisque est à $1^{m},524$ au-dessus du terrain *(fig. 15)*. Il est donc constant qu'aujourd'hui la hauteur de l'inondation dans la plaine d'Héliopolis est plus grande que dans la plaine de Thèbes; et comme l'épaisseur des dépôts annuels en un point déterminé est, toutes choses égales, proportionnelle à la hauteur de l'inondation sur ce point, il s'ensuit évidemment que les épaisseurs de ces dépôts, ou les exhaussemens séculaires du sol mesurés à Thèbes et à Héliopolis, doivent être dans le rapport de 1^{m} à $1^{m},50$: de sorte que cet exhaussement séculaire, étant supposé d'environ $0^{m},10$ près de la statue de Memnon, sera de $0^{m},15$ près de l'obélisque d'Héliopolis, et il aura fallu l'intervalle de douze siècles pour la formation du dépôt de limon qui recouvre aujourd'hui, sur $1^{m},73$ d'épaisseur, le soubassement de cet obélisque.

Mais pourquoi l'épaisseur des dépôts séculaires de la plaine d'Héliopolis est-elle plus grande que l'épaisseur séculaire des dépôts de la plaine de Thèbes? Cela tient à la disposition des lieux où les observations ont été faites par rapport aux digues destinées à soutenir les eaux de l'inondation. En effet, la vallée d'Égypte, au lieu de présenter dans sa longueur une plaine unie, inclinée vers la mer, suivant la pente du fleuve, présente au contraire une suite de plans inclinés irrégulièrement et séparés les uns des autres par les digues transversales qui s'étendent du Nil au désert. On conçoit que, lorsqu'un espace renfermé entre deux de ces barrages consécutifs est submergé lors du débordement, la plus grande hauteur d'eau de cette espèce d'étang doit se trouver immé-

diatement au-dessus de la digue inférieure, tandis qu'il n'y a au-dessous de la digue supérieure qu'une hauteur d'eau d'autant moindre que la pente de la plaine vers l'embouchure du Nil est plus considérable. Les dépôts séculaires doivent par conséquent varier d'épaisseur, suivant que les points où on les remarque, sont placés à des distances plus ou moins éloignées des digues qui traversent la plaine. Au surplus, ces différences d'épaisseur dans les dépôts séculaires observés en différens points de l'Égypte ne sont, pour ainsi dire, que temporaires : car les mêmes causes qui les ont produites, tendant ensuite à les faire disparaître, concourent sans cesse, comme nous l'avons démontré plus haut, à ramener à l'identité l'exhaussement moyen du lit du Nil et celui de la vallée.

Les observations que nous avons rapportées dans cette section, prouvent que cet exhaussement moyen est, à très-peu-près, de 0,^{m}126 par siècle. Ainsi, non-seulement elles ont confirmé l'opinion des anciens sur la formation du sol de l'Égypte, mais encore elles nous ont conduits à assigner, avec le degré de précision qu'on peut espérer d'atteindre dans une pareille matière, la quantité séculaire dont il s'exhausse. Toutes les fouilles que l'on entreprendra désormais sous quelques-uns des nombreux monumens antiques qui subsistent dans cette contrée, ajouteront de nouveaux faits à ceux que nous avons rassemblés. C'est aux voyageurs qui viendront après nous d'en augmenter le faisceau ; les emplacemens ne manqueront point à leur curiosité : qu'ils ne craignent point de se livrer à de nouvelles recherches ; il serait encore avantageux de les entreprendre, lors même que les conclusions qu'ils en tireraient se réduiraient à de simples conjectures : car ces conjectures acquerront plus de poids

par leur réunion; et si elles ne sont point de nature à nous donner le plus haut degré de certitude historique, elles pourront du moins concourir à l'éclaircissement de quelques points encore obscurs de la chronologie égyptienne.

SECTION V.

Des differentes causes dont l'action modifie continuellement l'aspect de la vallée d'Égypte. — Des changemens qu'il pourra subir dans la suite. — Résumé de ce Mémoire.

Nous avons expliqué, dans les sections précédentes, comment le sol de la vallée d'Égypte s'exhausse de plus en plus par les dépôts que laisse le Nil sur les terres qu'il submerge; mais les débordemens annuels de ce fleuve et les changemens de direction auxquels il est sujet, ne sont pas les seules causes qui tendent à modifier l'aspect de cette contrée; les vents qui y règnent, n'exercent pas une moindre influence pour en faire varier les limites et en dénaturer la surface.

En effet, les déserts qui bordent la vallée d'Égypte à l'ouest, dépourvus de toute végétation, reçoivent presque d'aplomb, une partie de l'année, les rayons du soleil, et les réfléchissent dans une atmosphère qui n'est jamais rafraîchie par les pluies. Le thermomètre de Réaumur, plongé dans le sable qui recouvre la surface de ces déserts, s'élève jusqu'à 56 degrés; et ceci a lieu dans toute l'étendue de l'Afrique, en descendant de l'Atlas, au nord, vers la Méditerranée, et, au sud, vers le bassin des grands fleuves dont l'Océan occidental reçoit les eaux.

Ainsi une atmosphère enflammée enveloppe, en quelque sorte, ces régions, tandis que l'évaporation continuelle des

eaux de la Méditerranée entretient à une température beaucoup plus basse l'atmosphère qui s'élève au-dessus de cette mer : ainsi; par une conséquence naturelle de cette différence de température, et par la tendance à l'équilibre qui se manifeste dans toutes les couches d'air d'inégale densité, un vent de nord règne presque constamment sur la bande septentrionale de l'Afrique. Ce courant d'air, arrêté par le mont Atlas, se réfléchit, vers l'est, dans une partie de son étendue. Cette direction, et la direction générale suivant laquelle l'atmosphère de la Méditerranée afflue du nord au sud vers les déserts de la Libye, se composent entre elles pour donner naissance aux vents de nord-ouest qui soufflent en Égypte une partie de l'année; ces vents tournent directement au nord à l'époque du solstice d'été, parce qu'alors, l'atmosphère se trouvant plus fortement dilatée au-dessus des plaines sablonneuses de l'Afrique, le courant d'air qui tend à maintenir l'équilibre atmosphérique en se portant de la Méditerranée dans l'intérieur de ces déserts, devient assez fort pour franchir les montagnes qui pourraient lui opposer quelque obstacle, et pour conserver sa direction primitive.

La chaîne de montagnes qui sépare la vallée d'Égypte de la mer Rouge, est presque aussi aride que le désert Libyque; mais, comme elle a fort peu de largeur, le courant d'air qui tendrait à s'établir de la mer Rouge vers l'Égypte en passant par-dessus cette chaîne, n'a point assez d'intensité : aussi le vent d'est ne souffle-t-il dans cette contrée que pendant dix ou douze jours de l'année.

Les vents d'ouest et de nord-ouest, dont nous venons d'expliquer l'origine, chassent devant eux les sables de la Libye, qui auraient depuis long-temps envahi l'Égypte, s'ils n'avaient pas été forcés de s'accumuler en dunes sur sa limite

occidentale. Certains arbrisseaux servent de point d'appui à ces dunes, et opposent au progrès des matières pulvérulentes dont elles se forment, le seul obstacle qui puisse en arrêter le cours. Ces arbrisseaux croissent sur les bords des canaux dérivés du Nil : ainsi le premier bienfait de ce fleuve est, comme on voit, d'empêcher que le pays qu'il arrose ne soit à jamais rendu stérile par les sables qui tendent à s'en emparer.

Le canal de Joseph dans l'Égypte moyenne, et celui de la Bahyreh dans la basse Égypte, sont les digues que l'art semble avoir opposées depuis long-temps à cette irruption.

On peut juger de l'avantage de cette défense en observant que par-tout où de semblables canaux n'arrêtent point les sables amenés du désert, des terrains anciennement cultivés en ont été envahis.

Tous les sables qui, poussés par les vents, arrivent sur les bords du Nil ou des canaux qu'il alimente, ne s'arrêtent pas sur leurs rives pour y former des dunes : une partie est jetée dans leur lit, et est entraînée par le courant, avec ceux que le fleuve amène chaque année des parties supérieures de son cours. Les sondes dont nous avons rendu compte dans la seconde section de ce Mémoire, montrent que le limon qui recouvre le sol de la vallée d'Égypte, repose sur des bancs de sable quartzeux, gris et micacé; bancs d'épaisseur variable, suivant les localités. Ainsi les matières charriées par le Nil sont de deux espèces, le sable et le limon; elles viennent également de l'Abyssinie, ou plus généralement du pays que parcourt le Nil au-dessus de la dernière cataracte. Entre Syène et l'île de *Philæ*, et probablement au-dessus de cette île, les bords de ce fleuve sont couverts de sables de la même nature que ceux dont le fond de son lit est composé. On y

remarque les particules de mica, et les lamelles ferrugineuses attirables à l'aimant, que l'on retrouve à ses embouchures; le fleuve les y entraîne lors de ses crues, après avoir détruit les bancs qui se forment dans son lit pendant la saison des basses eaux.

Quant au limon argileux qui contribue à changer la couleur des eaux du fleuve, il vient probablement de plus haut: car, immédiatement au-dessus de la première cataracte, il n'y a point de sol de cette nature que le Nil puisse détruire et transporter ailleurs.

En considérant les pesanteurs spécifiques du sable et du limon dans le mouvement qui leur est imprimé, on voit que le Nil ne peut tenir suspendue la première de ces substances qu'autant que ses eaux sont animées d'une vîtesse suffisante. Lorsque, par une cause quelconque, cette vîtesse vient à diminuer, les matières les plus pesantes se déposent, et préparent la formation d'un banc sur lequel les eaux, se mouvant plus lentement à mesure qu'il acquiert plus d'élévation, déposent de nouvelles matières de plus en plus légères, jusqu'à ce qu'enfin cet attérissement se trouve recouvert de limon, et puisse être livré à la culture.

C'est ainsi que se formèrent les bancs dans le lit du fleuve, lorsqu'il commença à couler dans la vallée d'Égypte; il déposa successivement, sur toute la largeur de cet espace, les sables fins qu'il charie, et forma lui-même de ces sables un sol que les eaux peuvent facilement sillonner : aussi l'ont-elles, en quelque sorte, remanié à plusieurs reprises, quoique la pente transversale de la vallée attire constamment le fleuve au pied de la montagne Arabique, vers laquelle le repoussent également, quand elles peuvent arriver jusque

sur sa rive, les matières légères que les vents d'ouest et de nord-ouest amènent du désert Libyque.

Le Nil ayant établi son lit dans la masse de ses propres alluvions, on conçoit qu'il peut aisément corroder ses berges. Quand, pendant le temps de la crue, le courant se porte avec violence sur l'une d'elles, on voit des blocs de sable et de limon, minés par ce courant, s'ébouler dans le fleuve : ils sont aussitôt divisés; la transparence des eaux en est troublée, et ces matières, entraînées par le courant, vont s'étendre à quelque distance sur la rive opposée. Elle se forme ainsi d'un nouvel attérissement. Les graviers dont la pesanteur spécifique est la plus considérable, se déposent les premiers, et, à raison de leur volume, ils se soutiennent sous un talus plus roide; des sables plus légers se placent au-dessus sous un talus plus incliné : voilà comment s'opère le dépôt successif des matières d'alluvion, dont le talus, à mesure qu'il s'elève, s'incline davantage, jusqu'à ce que les eaux qui le surmontent, animées d'une très-petite vîtesse, ne tiennent plus suspendu que du limon argileux, lequel tombe à son tour, et recouvre les sables inférieurs, en formant une surface convexe qui se raccorde horizontalement avec celle de la plaine adjacente. Voilà comment s'engendre le profil transversal des rives du Nil, et généralement celui des rives de tous les fleuves, lorsqu'elles se forment des matières mêmes qu'ils charient. On voit, par les *fig.* 3 et 4, que ce profil transversal est une courbe convexe vers leur lit; courbe telle, que, par l'inclinaison variable de ses élémens et la pesanteur spécifique des substances dont ils sont recouverts, la stabilité de ces substances, dans le lieu qu'elles occupent, c'est-à-dire leur résistance à la corrosion, est précisément égale à la force corrosive du courant.

Lorsqu'une rive du Nil se forme, comme on vient de le dire, par de nouvelles alluvions, elle s'alonge en-dedans du fleuve, en présentant une sorte de cap ou d'*épi*, dont l'effet naturel est de reporter l'effort des eaux du côté opposé : les nouvelles corrosions qui en résultent donnent naissance à de nouveaux attérissemens. Ainsi le fleuve agit sur ses berges par des ricochets successifs, et déplace continuellement, en les portant vers la mer, les matières qu'il a lui-même déposées autrefois ; ainsi, modifiant son propre ouvrage dans l'intervalle d'une certaine période, il a successivement labouré, pour ainsi dire, dans toute la largeur, la vallée de la haute Égypte. Ceci explique pourquoi les puits que nous y avons fait creuser, ont montré par-tout une couche de limon reposant sur un massif de sable de la même nature que celui que l'on trouve dans le lit du fleuve et sur ses rives; mais il est digne de remarque que l'épaisseur de la couche superficielle de limon est par-tout d'autant plus grande que l'on s'approche du désert. Une légère attention conduit facilement à saisir l'explication de ce fait.

Avant que la vallée d'Égypte fût couverte des établissemens où sa population se fixa dans la suite, les débordemens du Nil la submergeaient naturellement, c'est-à-dire que les eaux n'en étaient point dirigées sur des points déterminés par des canaux artificiels, ni soutenues par des barrages au-dessus des plaines dont l'agriculture s'est emparée depuis.

Lorsque le fleuve s'était accru au point de submerger les campagnes adjacentes, les eaux, immédiatement à la sortie de leur lit, déposaient sur ses bords, où elles étaient animées de leur plus grande vîtesse, les matières les plus pesantes qu'elles transportaient; puis, s'étendant indéfiniment,

leur vîtesse diminuait de plus en plus, et les dépôts qu'elles laissaient sur le sol étaient composés de matières plus légères, jusqu'à ce que, devenues presque stagnantes lorsqu'elles étaient parvenues à la limite du désert sur l'une et l'autre rive, elles ne déposaient plus que du limon. On voit comment cette substance, qui est la plus ténue de toutes celles qui sont transportées par le Nil, doit former un dépôt plus épais à mesure que l'on s'éloigne du lit de ce fleuve.

Le creusement des canaux d'arrosage dont l'Égypte est entrecoupée, n'a rien changé à l'ordre que les différences de pesanteur spécifique ont établi dans la disposition des attérissemens du Nil. Il est aisé de concevoir, en effet, que les eaux conduites artificiellement et arrêtées contre les barrages ne peuvent y déposer que du limon, la seule matière qui trouble encore leur transparence lorsqu'elles y arrivent.

Si, par ce qui précède, on s'est formé une idée précise de l'action du Nil sur ses berges, et si l'on a bien saisi la marche de ses alluvions, on se trouve conduit naturellement à distinguer, dans la vallée d'Égypte, sa partie la plus profonde, ou plutôt la plus éloignée des montagnes qui la bordent, et la partie la plus rapprochée de ces montagnes. La première est exposée à être sillonnée par le fleuve, qui a tracé son lit tantôt dans un endroit et tantôt dans un autre; cette partie de la surface de la vallée a pu être, à diverses reprises, déblayée et remblayée par le courant : la seconde portion, qui est voisine des déserts, se trouve en quelque sorte à l'abri de son action, depuis que l'ordre actuel est établi ; le sol qui la recouvre, est composé de couches horizontales superposées dans un ordre successif qui n'a jamais été interverti.

En débouchant de la longue vallée où il coule depuis l'île d'Éléphantine jusqu'à la vue des pyramides, le Nil, dans les premiers temps de son régime, commença à remplir d'attérissemens le golfe dont le Delta occupe aujourd'hui l'emplacement : leurs progrès naturels déterminèrent la configuration à laquelle cette partie de l'Égypte doit le nom qu'elle a porté jusqu'ici. En effet, c'est au milieu du courant d'un fleuve que se meuvent les matières les plus pesantes qu'il charie : tant que la vîtesse de ce courant est assez considérable, elles continuent à se mouvoir; mais au moment où les eaux peuvent s'étendre dans un plus grand espace, leur vîtesse diminue tout-à-coup; et le dépôt de ces matières commence à s'opérer dans le prolongement du courant qui les transportait. Le fleuve, obligé de contourner le banc qu'elles forment, se partage nécessairement en deux branches, au milieu de chacune desquelles s'établit, par les mêmes causes, un banc secondaire qui, prenant journellement de nouveaux accroissemens, finit par se réunir au premier. Les attérissemens trouvent ainsi, entre les deux branches du fleuve, un point d'appui qui, sous la forme d'un triangle ou du *delta* grec, s'étend de plus en plus, par l'écartement de ces branches. Outre les deux principales, il s'en forme d'intermédiaires, qui, suivant les circonstances, se comblent ou s'approfondissent, et qui jettent leurs eaux dans des lagunes ou des marécages, état par lequel passent toujours les attérissemens des fleuves, avant d'être rendus propres à la culture par un desséchement suffisant.

D'après l'explication que nous donnons ici de l'origine de la basse Égypte, on conçoit comment quelques historiens de l'antiquité n'ont admis que deux branches naturelles du

Nil; la Canopique à l'occident, et la Pélusiaque à l'orient. Ils regardaient les cinq autres comme des canaux artificiels, parce qu'en effet le travail des hommes dut s'opposer à ce que les rameaux intermédiaires s'obstruassent par des attérissemens, puisqu'ils pouvaient servir de canaux d'irrigation et porter les eaux du Nil sur les terres de nouvelle formation, dont l'agriculture s'était emparée.

Par cela seul que les branches Canopique et Pélusiaque portaient à la mer le volume presque entier du Nil, c'est à leurs embouchures que dut se former presque exclusivement le dépôt des alluvions qu'il chariait.

Les rives de chacune de ces branches se prolongèrent ainsi vers le large, entre deux plages sablonneuses qui étaient leur propre ouvrage; leurs embouchures s'avancèrent dans la Méditerranée plus au nord que le reste de la côte; leur développement devenant plus considérable, leur pente diminua proportionnellement, et les eaux du Nil se jetèrent dans les canaux intermédiaires les plus voisins, suivant lesquels elles pouvaient s'écouler à la mer avec plus de rapidité. Une partie du fleuve se porta à l'est en descendant de la branche Canopique dans la Bolbitine, tandis que les eaux de la branche Pélusiaque descendirent dans la Sébennitique. Ce changement eut lieu graduellement; car, s'il eût été produit tout-à-coup, on aurait conservé le souvenir de l'époque à laquelle il s'opéra. Ce qu'on peut affirmer, c'est que le rétrécissement du Delta par le rapprochement des bras du Nil qui le renferment, est postérieur au siècle de Pline, puisque cet auteur désigne encore comme les plus considérables les anciennes branches Canopique et Pélusiaque, qui sont aujourd'hui oblitérées.

Celles qui s'enrichirent de leur appauvrissement, les

branches Bolbitine et Sébennitique, ou, comme on les appelle aujourd'hui, celles de Rosette et de Damiette, ont, à leur tour, étendu leurs embouchures en saillie sur la côte d'Égypte, de sorte qu'elles présentent maintenant dans le système hydrographique de ce pays, un état semblable à celui où se trouvèrent autrefois les branches Canopique et Pélusiaque, quand les eaux cessèrent d'y couler pour se porter vers l'intérieur du Delta.

Que l'on compare, en effet, le développement actuel de la branche de Damiette au développement de l'ancienne branche de Péluse jusqu'au lac Menzaleh, qui peut, sans beaucoup d'erreur, être supposé de niveau avec la Méditerranée, et l'on trouvera que les longueurs de l'ancienne branche Pélusiaque et de la branche actuelle de Damiette sont entre elles, à-très-peu-près, dans le rapport de 17 à 18; d'où l'on voit que, si les eaux du Nil étaient abandonnées à leur cours naturel entre le Kaire et le *Ventre de la Vache*, elles se porteraient aujourd'hui dans la branche de Péluse, qui redeviendrait ainsi, comme autrefois, l'une des deux principales branches du Nil.

Les eaux de la branche de Damiette tendent également à se jeter dans le canal de Menouf, parce que, suivant la remarque que nous en avons déja faite, le développement de ce canal, entre son embouchure et le *Ventre de la Vache*, est moindre que le développement de la branche de Rosette entre ces deux mêmes points.

La digue de Fâra'ounyeh, située à l'origine du canal de Menouf, s'étant rompue il y a quelques années, il fallut entreprendre des travaux considérables pour la réparer; on se rappellera long-temps dans le pays la violence avec laquelle les eaux se portèrent par cette voie dans la branche

occidentale du Nil. Celle de Damiette, que cet accident avait considérablement atténuée, fut envahie par les eaux de la mer : elles y remontèrent jusqu'au-delà de Fareskour, inondèrent les terres cultivables, et les rendirent stériles pour plusieurs années.

Les effets qui suivirent la rupture de la digue de Fâra'ounyeh, se manifesteraient de la même manière, si l'on cessait d'entretenir les barrages à l'aide desquels on règle l'entrée des eaux dans les canaux de Moueys et d'Achmoun, qui correspondent aux anciennes branches Tanitique et Mendésienne, et qui ont leurs embouchures dans le lac Menzaleh. Si, par la destruction ou le défaut d'entretien de ces barrages, la branche de Damiette venait à s'appauvrir, les eaux de la mer y reflueraient; la petite langue de terre qui sépare cette branche du lac Menzaleh, se romprait en quelques points; et comme les bords du Nil, près de son embouchure, sont plus élevés que la campagne voisine, il suffirait aussi que ce fleuve s'ouvrît une issue à travers l'une de ses berges, pour que ces campagnes se transformassent d'abord en lagunes et ensuite en lacs semblables à ceux de Menzaleh et de Bourlos. On pourra, à force de travaux, retarder l'époque de ce changement; mais l'ordre de la nature le rend inévitable. Il viendra un temps où l'allongement des deux branches de Damiette et de Rosette sera si considérable, que les eaux qui y coulent maintenant, se rendront à la mer en suivant des canaux plus courts, jusqu'à ce que l'allongement de ceux-ci, occasionné par de nouveaux dépôts à leurs embouchures, oblige les eaux qu'ils auront reçues, à reprendre plus tard les routes qu'elles suivent aujourd'hui. Ainsi les eaux du Nil, sillonnant successivement la basse Égypte en différentes directions, oscillent sans cesse pour se rendre dans la Médi-

terranée par les lignes de plus grande pente, et cette tendance continuelle modifie nécessairement l'étendue du Delta, sans altérer sensiblement sa forme. Il nous reste à indiquer la marche des sables qui en couvrent la côte.

Nous ferons remarquer, d'abord, que la bande de rochers calcaires qui forme le rivage de la mer depuis la Tour des Arabes jusqu'à la pointe d'Abouqyr, est presque constamment battue par les vents régnans de nord et de nord-ouest. L'action des vagues poussées contre cette côte en occasionne la destruction. On retrouve, en la parcourant au sud-ouest d'Alexandrie, les vestiges d'anciens ouvrages creusés dans le roc, parmi lesquels on distingue celui que les voyageurs ont désigné sous le nom de *bains de Cléopâtre*, et les catacombes pratiquées sous l'ancien quartier d'Alexandrie appelé *Nécropolis*.

Parallèlement au rivage, et à trois mille mètres de distance, règne une ligne de rochers sous-marins, ouverte par quatre passes, qui servent d'entrée au port occidental de cette ville; il est formé, comme on sait, par le prolongement de la côte et par l'ancienne île de *Pharos,* dont la pointe qui regarde le sud-ouest porte le nom de *cap des Figuiers,* à cause des arbres de cette espèce que l'on y cultive. Ce cap, continuellement attaqué par les flots, n'a pu résister à leur action. On aperçoit vers le large, sur son prolongement, une suite de catacombes qui avaient été creusées au-dessous du niveau de la mer; elle a envahi l'espace qu'elles occupaient, ainsi que l'emplacement de catacombes semblables dont la partie septentrionale de l'île était bordée. Cependant les sables calcaires qui proviennent de la côte d'Égypte, et que les vents de nord-ouest mettent en mouvement, sont venus s'accu-

muler au fond du port vieux d'Alexandrie, où ils ont formé, contre la digue par laquelle Alexandre joignit l'île de *Pharos* au continent, le grand attérissement sur lequel la ville actuelle des Turcs est bâtie. Les débris des rochers sous-marins qui couvrent l'avant-port, se sont avancés le long de la côte de l'île des Figuiers, et, après en avoir doublé la pointe septentrionale, ils l'ont alongée par un banc de sable qui la réunit maintenant au rocher isolé où l'on a élevé le château du Phare. Ce château, et l'espèce de chemin couvert qui y conduit, ferment le port neuf à l'ouest. L'autre côté de ce port se termine par un château plus petit, appelé *le Pharillon ;* la plage à l'extrémité de laquelle il se trouve, est exposée aux vents régnans, et continuellement attaquée par les vagues : ses débris, poussés au fond du port neuf, s'y sont accumulés contre l'*Heptastadium*, qui leur a présenté un point d'appui ; ils s'y étendent de plus en plus, et forment la place qui sépare, de nos jours, la ville moderne des Turcs de celle que les Arabes démembrèrent de la ville d'Alexandre, dans les siècles du moyen âge.

Au-delà du Pharillon, c'est-à-dire au nord-est du port neuf, la côte d'Égypte, se prolongeant dans la même direction que celle qui vient du Marabout, est battue par les mêmes vents et soumise aux mêmes causes de destruction ; on remarque, dans ses escarpemens, des restes d'édifices considérables dont le sol est actuellement submergé. C'est là qu'on reconnaît, jusqu'à une petite distance d'Abouqyr, l'emplacement de l'ancien quartier de *Nicopolis* aujourd'hui tout-à-fait détruit.

Le fort d'Abouqyr est bâti sur une pointe de rocher qui termine cette côte : c'est la dernière limite de la base solide du rivage d'Afrique ; elle couvre, au sud-ouest, une rade

trop fameuse. Les sables qui doublent le fort sont poussés par les vents dans l'intérieur des terres, sur la rive gauche de la branche occidentale du Nil; mais ils sont arrêtés par la végétation que les eaux douces du lac d'Edkoû entretiennent à sa limite septentrionale; ils s'y amoncellent en dunes, ou se dispersent, entre le lac et la mer, sur la plage que l'on traverse en se rendant par terre d'Abouqyr à Rosette. Une partie de ces sables parvient jusqu'au Nil; ils y sont jetés par les vents, et augmentent ainsi la masse de ceux que ce fleuve charie, soit qu'il les amène de la haute Égypte, soit qu'il les ait reçus dans son cours en côtoyant le désert Libyque: car si la végétation à laquelle la présence de l'eau douce donne naissance sur les bords du Nil, détermine la formation des dunes, ces dunes elles-mêmes ne sont point inattaquables par l'action des vents qui en agitent continuellement la surface, et qui en précipitent les débris dans le fleuve, à l'embouchure duquel ils sont entraînés. C'est ainsi que la barre qui obstrue l'embouchure du Nil à Rosette, et qui oblige le courant de se bifurquer en deux passes, s'accroîtrait indéfiniment, si l'action des vents ne déterminait pas, d'un côté ou d'un autre de cette barre, le rejet d'une partie des matières dont elle est composée. Celles qui passent sur la rive gauche viennent se ranger à l'ouest de cette embouchure, et courent du nord-est au sud-ouest, le long de la côte orientale de la baie d'Abouqyr : elles se mêlent avec celles qui en parcourent la plage, et reviennent encore sur le bord du Nil, où elles sont projetées de nouveau après être restées quelque temps stationnaires sur les dunes de Rosette et d'Abou-Mandour. On voit que ces sables circulent en quelque sorte dans l'espace circonscrit par la mer, le lac d'Edkoû et la partie infé-

rieure du cours du Nil; et l'on ne doit point être étonné que cet espace éprouve peu de changemens dans son aspect, puisqu'une partie des matières qui le recouvrent y est rejetée du boghâz, où elle revient quelque temps après.

Le même effet n'a pas lieu sur la rive opposée. Les matières détachées du boghâz et rejetées sur la droite du Nil forment la pointe de cette rive et la bande étroite qui sépare le lac Bourlos de la mer. La direction de cette bande et la figure qu'elle affecte, s'expliquent naturellement par l'action combinée des vents et des courans auxquels elle est soumise : car, pendant que les vents d'ouest, de nord-ouest et de nord tendent à faire pénétrer dans l'intérieur de l'Égypte les sables poussés sur la côte, les canaux alimentaires du lac Bourlos, qui ont leur embouchure dans la partie occidentale de son pourtour, ne pouvant jeter leurs eaux à la mer qu'après avoir contourné le rivage de ce lac, il arrive qu'un courant continuel de ces eaux en balaie, du sud-ouest au nord-est, la côte intérieure; la plage sablonneuse qui le sépare de la mer, se trouve ainsi pressée en quelque sorte par le courant littoral intérieur et par les vents d'ouest et de nord qui soufflent du large. Aussi voit-on cette langue de sable se prolonger sous cette double action, en s'amincissant de plus en plus jusqu'au pertuis de Bourlos, seule issue par laquelle s'évacuent les eaux du Delta, lesquelles y entretiennent, suivant les saisons, un courant plus ou moins rapide.

Les sables de l'embouchure de Rosette, parvenus à la pointe de Bourlos, sont jetés par les vents dans le pertuis dont cette pointe est l'une des rives; ils y forment, comme aux embouchures du Nil, une barre dont les matériaux traversent le courant et passent sur la rive opposée; la partie la plus saillante de cette rive est le cap Bourlos. Une tour en

pierre, élevée sur ce cap, sert à le faire reconnaître, et procure aux sables qui lui servent de soubassement, une sorte de stabilité. Au surplus, comme au-delà de ce cap, en allant du côté de l'est, il n'y a plus, derrière la plage, de lac intérieur qui arrête la marche des sables, ces matières, obéissant à la seule action des vents régnans, couvrent un espace de douze cents mètres de largeur, jusqu'aux bords de l'une des dérivations du canal de Ta'bânyeh, où elles sont obligées de s'arrêter. Cette côte sablonneuse s'incline du nord-ouest au sud-est, à partir du cap Bourlos; et comme les eaux douces du lac peuvent aisément filtrer au-dessous, elles y entretiennent des espèces de cultures qui sont particulières à ce territoire.

La direction suivant laquelle nous venons de dire que la côte de la basse Égypte s'inclinait vers le sud-est, à partir du cap Bourlos, se prolongerait indéfiniment, si la saillie que l'embouchure de la branche de Damiette présente sur ce rivage, à quatre myriamètres au-delà, n'obligeait pas cette partie de la côte à changer de direction et à se retourner vers le nord-est.

La branche de Damiette, qui traverse le milieu du Delta ne charie que des sables de la haute Égypte, jusqu'à la prise d'eau du canal d'Abou-Ghâlyb, qui en est dérivé, et qui se dirige du sud-est au nord-ouest, à deux myriamètres environ au-dessus de cette ville. Ce canal sert de limite aux sables qui viennent de Bourlos et qui couvrent la plage. Il se trouvent ainsi maintenus entre ce canal, la partie inférieure de la branche orientale du Nil, et la mer.

Poussés par les vents de nord et de nord-ouest, ces sables après avoir stationné quelque temps sur les dunes qui bordent la rive gauche du Nil, y sont enfin précipités en partie;

il les entraîne à la mer avec ceux qui viennent de plus haut; et la barre qui obstrue l'embouchure de cette branche, se forme de leur accumulation.

On conçoit que, produit par les mêmes causes, ce banc doit présenter les mêmes effets que celui de la branche de Rosette. Les deux courans qui le contournent en détachent les débris, qui sont portés, les uns à gauche du côté de l'ouest, les autres à droite du côté de l'est. Les premiers forment une ligne de dunes le long de la côte, et, s'ajoutant avec ceux qui sont amenés de Bourlos, ils reviennent au bord du Nil pour y être jetés de nouveau.

Telle est l'espèce de circulation des sables qui couvrent la rive gauche de ce fleuve près de l'embouchure de Damiette. On voit que, par un mouvement absolument le même que celui des sables dont nous avons décrit la marche à l'ouest de l'embouchure de Rosette, ils avancent également vers le large en décrivant, de l'est à l'ouest et du nord au sud, une suite de courbes qui rentrent continuellement les unes dans les autres.

Une autre partie des sables que le courant enlève du boghâz de Damiette, est rejetée sur la rive droite de cette embouchure. Les vagues de la mer et les vents régnans tendent à les jeter dans le lac Menzaleh, qui finirait par en être comblé, si le courant littoral entretenu dans ce lac, le long de la plage qui le sépare de la mer, par les eaux des anciennes branches de Mendès, de Tanis et de Péluse, ne repoussait pas ces matières; de sorte que, pressées d'un côté par la mer et de l'autre par le lac Menzaleh, elles se réduisent en une petite langue étroite, bordée intérieurement de quelques arbustes, et par conséquent de quelques dunes. Mais ces dunes s'élèvent peu au-dessus du sol, parce que les plantes

qui leur servent de point d'appui, et dont la végétation n'est entretenue qu'avec des eaux saumâtres, sont faibles et rabougries. Cette espèce de digue sablonneuse qui part de l'embouchure même du Nil, descend du nord-ouest au sud-est : elle est percée de trois pertuis qui correspondent aux trois embouchures des branches Mendésienne, Tanitique et Pélusiaque. Chacune de ces trois ouvertures, qui servent ensemble à l'évacuation de toutes les eaux de cette partie du Delta, est elle-même obstruée par un banc de sable, contre lequel se porte l'action du courant; ce courant rejette les débris de ces bancs sur sa droite, où les vents régnans les reprennent à leur tour et les étalent, en prolongement de cette digue étroite, jusqu'à l'ancienne plaine de Péluse, à laquelle elle se rattache. Ces sables, dont la marche s'étend au-delà de l'emplacement de cette ancienne ville, se réunissent à ceux qui viennent de l'intérieur de la Syrie et forment les dunes qui couvrent la partie septentrionale de l'isthme de Suez.

Les déserts de cet isthme, à l'orient du Delta, diffèrent par leur aspect de ceux qui bordent l'Égypte à l'occident. Ces derniers, à leur limite, n'offrent que des sables légers qui y ont été transportés par les vents : la surface de l'isthme est, au contraire, une plage unie, composée de graviers et de cailloux, dont la masse ne laisse aucune prise aux vents d'ouest et de nord-ouest. Ces vents ont depuis long-temps balayé cette surface, et emporté vers l'est toutes les matières pulvérulentes qui pouvaient recouvrir le sol. Il suffit, au reste, de le fouiller à une très-petite profondeur, ou plutôt d'en labourer légèrement la surface, pour s'assurer qu'il est composé de cailloux roulés, de graviers et de sables fins; matières qui se sont accumulées en désordre à une époque

où, comme nous l'avons dit ailleurs, deux courans, qui venaient, l'un, de la Méditerranée, et l'autre, de la mer Rouge, se choquant avec violence sur l'emplacement actuel de l'isthme de Suez, s'y mirent en équilibre et y déposèrent les débris des côtes dont ils avaient sapé la base, et le long desquelles ils s'étaient dirigés jusque-là.

Les observations que nous avons recueillies sur la vallée d'Égypte et que nous venons de rapporter, rendent maintenant évidentes les causes qui l'ont amenée à son état actuel, et qui en modifient continuellement l'aspect. Les debordemens annuels du Nil en exhaussent le sol par le dépôt de limon qu'ils y laissent. Sans cesse rajeunie, pour ainsi dire, par le bienfait de l'inondation, cette terre, présent du fleuve, s'avance de plus en plus dans la mer, et offre à ses habitans, sur une plage qui n'a pas cessé de s'accroître depuis une longue suite de siècles, les produits d'une fertilité sans exemple, tandis que, par une inondation d'une autre nature, les sables que transportent les vents du fond des déserts de la Libye, tendent à envahir cette terre et à la frapper de stérilité. Ainsi s'expliquent naturellement ces continuels efforts dans lesquels, suivant l'ancienne fable égyptienne, Osiris et Typhon, alternativement vainqueurs et vaincus, se disputent un terrain où ni l'un ni l'autre ne peut exercer un empire exclusif, et que la nature a disposé pour être entre eux l'objet d'un éternel combat.

Fig. 1

... et du décroissement du Nil

Juillet | Août | Septembre | Octobre | Novembre | Décembre | Janvier | Février | Mars | Avril | Mai | Juin | Juillet | Août | Septembre | Octobre | Novembre | Décembre | Janvier | Février | Mars

Année 1799 — Année 1800 — Année 1801

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6

Fig. 7

Nilomètre d'Eléphantine
Fig. 8
Crues Actuelles

Meqyâs de Roudah
Fig. 9
Crues Actuelles
Anciennes Crues

Piédestal du Colosse de Memnon
Fig. 10
Crues Actuelles
Niveau du ...
Bloc de Grès

Sphinx de Karnak
Fig. 11

Angle du Palais de Louqsor
Fig. 12
Sol Actuel de la Plaine
Ancien Sol

Obélisque de Louqsor
Fig. 13
... de la Place de Louqsor
... de Granit
... de la Plaine

Colonne de Syout
Fig. 14
... Crues de Syout
Sol de la Plaine

Obélisque d'Héliopolis
Fig. 15
Crues Actuelles
Sol de la Plaine

5 Mètres

Ech. des Fig. 8. 9. 10. 11

6 Mètres

Ech. des Fig. 12. 13. 14. 15

Imp. Firmin Didot Fils & Cie Paris

MÉMOIRE

Sur le mouvement des fluides élastiques dans des tuyaux cylindriques, et sur la théorie des instrumens à vent;

PAR M. POISSON.

Lu à l'Académie royale des Sciences le 30 mars 1818 et le 8 février 1819.

Les questions que je me propose de traiter dans ce Mémoire, ont déja été, pour les physiciens et les géomètres, l'occasion d'un grand nombre de recherches importantes; néanmoins on verra que ces questions, et sur-tout la théorie des instrumens à vent, peuvent encore être envisagées sous un nouveau point de vue, qui aura l'avantage de faire disparaître les différences essentielles que l'on a rencontrées jusqu'ici, entre l'observation et le calcul appliqué à cet objet.

Ce Mémoire est divisé en quatre paragraphes. Le premier est employé à rappeler, d'une manière succincte, la théorie connue du mouvement de l'air dans un tube cylindrique, telle que Lagrange l'a donnée dans les anciens Mémoires de Turin; je montre son insuffisance, lorsqu'on en fait l'appli-

cation aux instrumens à vent, et la nécessité de celle que je propose d'y substituer : celle-ci est l'objet principal da paragraphe suivant. Dans le troisième, j'applique les mêmes considérations au mouvement de l'air dans un tube composé de deux cylindres de différens diamètres; enfin, dans le quatrième, je considère, aussi de la même manière, le mouvement de deux fluides différens, superposés dans un même tube. Par rapport à cette dernière question, dont personne, que je sache, ne s'était encore occupé, je détermine la réflexion que le son éprouve à la jonction des deux fluides, et je considère semblablement la réflexion de la lumière, sous l'incidence perpendiculaire, dans l'hypothèse de Huyghens fondée sur les ondulations d'un fluide élastique permanent.

§ I.er

Mouvement d'un fluide élastique, contenu dans un tuyau cylindrique.

(1) Le fluide élastique que nous considérons est homogène; sa température est par-tout la même; ses molécules ne sont sollicitées par aucune force particulière, en sorte que, dans l'état d'équilibre, sa densité et sa force élastique sont constantes. Il est contenu dans un tube cylindrique ou prismatique; et l'on suppose que les molécules fluides qui appartiennent à une même section perpendiculaire à la longueur du tube, ont toutes la même vîtesse suivant cette longueur, et n'ont aucun mouvement dans le plan de la section; c'est-à-dire, qu'il ne sera question dans ce Mémoire, que du mouvement *linéaire* des fluides. Ainsi, en décomposant le fluide

en tranches infiniment minces et perpendiculaires au tube qui le contient, on aura seulement à déterminer, pour un instant quelconque, la vîtesse de chaque tranche suivant la longueur du tube, et la condensation ou la dilatation qu'elle éprouve par l'effet du mouvement.

Il serait superflu de rappeler ici l'analyse, maintenant bien connue, qui conduit aux équations générales du mouvement des fluides; dans le cas particulier que nous venons d'expliquer, ces équations se réduisent à deux, savoir : (*)

$$\left.\begin{aligned} & a^2 \log.\frac{\rho}{D}+\frac{d\varphi}{dt}+\frac{1}{2}\frac{d\varphi^2}{dx^2}=0, \\ & \frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx\,dt}+\frac{d\varphi^2}{dx^2}\frac{d^2\varphi}{dx^2}=a^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}. \end{aligned}\right\} (1)$$

La variable t représente le temps que nous compterons de l'origine du mouvement; x la distance d'une tranche quelconque du fluide, à une section déterminée du tube; a une quantité constante, dont la valeur dépend de la nature du fluide; D exprime sa densité dans l'état d'équilibre ; enfin ρ et φ sont deux fonctions inconnues de t et x : la première représente la densité du fluide dans l'état de mouvement; la différence partielle de la seconde par rapport à x, exprime sa vîtesse parallèle à la longueur du tube; en sorte qu'en appelant v cette vîtesse, on a

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{d\varphi}{dx}.$$

(2) Si l'on fait $at=y$, la seconde des deux équations (1)

(*) *Mémoire sur la théorie du son*, 14e cahier du Journal de l'École polytechnique, pag. 364.

devient

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{2v}{a}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}+\frac{v^2}{a^2}\frac{d^2\varphi}{dx^2}=\frac{d^2\varphi}{dx^2};$$

or, dans tous les mouvemens que nous allons considérer, la vîtesse v sera toujours supposée très-petite par rapport à a, qui exprime, dans le cas ordinaire de l'air atmosphérique, une vîtesse de plus de 300 mètres par seconde sexagésimale; afin donc de pouvoir intégrer l'équation précédente sous forme finie, nous y supprimerons les termes multipliés par la fraction $\frac{v}{a}$, ou par son quarré; ce qui la réduit à

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2}=\frac{d^2\varphi}{dx^2}. \quad (2)$$

Cette équation s'applique spécialement à la théorie du son; mais elle peut aussi convenir aux mouvemens de l'air qui constituent *les vents;* car si l'on en excepte quelques cas particuliers, la vîtesse de l'air observée dans ces phénomènes n'est pas comparable à la vîtesse a; de sorte que l'on pourra déterminer ces mouvemens avec une approximation suffisante, au moyen de l'équation (2).

Nous supposerons de même que les condensations ou les dilatations que les tranches fluides éprouvent pendant le mouvement, sont très-petites par rapport à leur densité primitive; faisant donc

$$\rho=D(1+s),$$

s sera une très-petite fraction; et si nous négligeons son quarré, ainsi que celui de la vîtesse $\frac{d\varphi}{dx}$, la première équation (1) deviendra

$$as+\frac{d\varphi}{dy}=0.$$

Cela posé, l'intégrale complète de l'équation (2) est de la forme :

$$\varphi = fonct.\,(x - y) + Fonct.\,(x + y);$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$\left.\begin{array}{r} v = f(x-y) + \mathrm{F}(x+y), \\ as = f(x-y) - \mathrm{F}(x+y); \end{array}\right\} (3)$$

f et F désignant deux fonctions arbitraires, qu'il s'agira de déterminer d'après le mode d'ébranlement du fluide, et les conditions qui auront lieu aux extrémités du tube.

(3) Supposons qu'à l'origine du mouvement, on a imprimé, par un moyen quelconque, aux differentes tranches fluides, des vîtesses connues; qu'en même temps, on leur a fait subir des condensations aussi données; et qu'ensuite on a abandonné le fluide lui-même. Soient

$$v = \psi x, \quad s = \Psi x,$$

les expressions de ces vîtesses et de ces condensations; ψ et Ψ indiquant des fonctions données pour toute l'étendue de la colonne fluide. Comme à l'origine du mouvement, on a $y = at = 0$, il en résulte

$$\psi x = fx + \mathrm{F}x, \quad a\Psi x = fx - Fx;$$

d'où l'on tire

$$fx = \tfrac{1}{2}\psi x + \tfrac{a}{2}\Psi x, \quad \mathrm{F}x = \tfrac{1}{2}\psi x - \tfrac{a}{2}\Psi x.$$

Mettant successivement $x+y$ et $x-y$ à la place de x dans ces valeurs de fx et $\mathrm{F}x$, on aura celles des fonctions qui

entrent dans les équations (3), et ces équations deviendront

$$\left.\begin{aligned} v&=\tfrac{1}{2}\Big(\psi(x-y)+\psi(x+y)\Big)+\tfrac{a}{2}\Big(\Psi(x-y)-\Psi(x+y)\Big),\\ as&=\tfrac{1}{2}\Big(\psi(x-y)-\psi(x+y)\Big)+\tfrac{a}{2}\Big(\Psi(x-y)+\Psi(x+y)\Big).\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

(4) Maintenant il faut distinguer deux cas essentiellement différens : celui où le tube se prolonge indéfiniment, et le cas où sa longueur est finie et déterminée. Dans le premier cas, que nous allons d'abord examiner, les valeurs des fonctions ψx et Ψx sont données pour toutes les valeurs positives ou négatives de x; les quantités $\psi(x-y)$, $\psi(x+y)$, $\Psi(x-y)$, $\Psi(x+y)$, qui entrent dans les équations (4), sont donc aussi connues pour toutes les valeurs possibles de x et de y; par conséquent, ces équations renferment la solution complète du problême, puisqu'elles font connaître, à un instant quelconque, et en tel point du tube qu'on voudra, la vîtesse v et la condensation s du fluide.

Si, à l'origine du mouvement, le fluide n'a été ébranlé que dans une partie déterminée de sa longueur, ce cas sera celui de la production du son; et il s'agira de savoir comment cet ébranlement partiel se propage dans toute la colonne fluide. Pour cela, fixons l'origine des distances x au milieu de l'ébranlement primitif, que nous supposerons s'étendre depuis $x=-\alpha$ jusqu'à $x=\alpha$, α étant une quantité donnée. Les condensations et les vîtesses initiales des tranches fluides étaient donc nulles hors de ces limites, c'est-à-dire qu'on a $\psi x=0$, $\Psi x=0$, pour toutes les valeurs de x plus grandes que α, abstraction faite du signe; or, le temps t étant compté de l'origine du mouvement, la variable $y=at$

est toujours une quantité positive; si donc on considère un point du fluide pris hors de l'ébranlement primitif, et situé, pour fixer les idées, du côté des x positives, on aura toujours $x+y>\alpha$, et par conséquent

$$\psi(x+y)=0, \quad \Psi(x+y)=0;$$

ce qui réduit les équations (4) à

$$v=\frac{1}{2}\psi(x-at)+\frac{a}{2}\Psi(x-at),$$

$$as=\frac{1}{2}\psi(x-at)+\frac{a}{2}\Psi(x-at).$$

Or, voici les conséquences qui se déduisent immédiatement de l'inspection de ces valeurs de v et as.

Tant qu'on aura $at<x-\alpha$, les fonctions $\psi(x-at)$ et $\Psi(x-at)$ seront nulles, et, par suite, les quantités v et s; elles cesseront de l'être à l'instant où l'on aura $at=x-\alpha$; puis elles redeviendront égales à zéro, quand on aura $at=x+\alpha$. Ainsi l'ébranlement des tranches situées du côté des x positives, commence quand $t=\frac{x-\alpha}{a}$; il dure depuis $t=\frac{x-\alpha}{a}$, jusqu'à $t=\frac{x+\alpha}{a}$, ou pendant un intervalle de temps égal à $\frac{2\alpha}{a}$; et la portion de fluide ébranlée à-la-fois, est comprise depuis $x=at-\alpha$ jusqu'à $x=at+\alpha$; de manière que sa longueur est 2α, comme celle de l'ébranlement primitif. On aurait des résultats semblables relativement aux tranches fluides, situées du côté des x négatives : dans les deux sens, le son, ou l'ébranlement qui le produit, se propage avec une vîtesse constante, égale à a, et indépendante de l'étendue et de la nature de l'ébranlement primitif. Nous renverrons au *Mémoire sur la théorie du son* (*), déja cité, l'examen

(*) Pages 360 et suivantes.

de cette vîtesse, et sa comparaison à celle qui résulte de l'observation.

(5) La portion de fluide en mouvement à un instant quelconque, d'un côté ou de l'autre de l'ébranlement primitif, forme ce qu'on entend par une *onde sonore :* on peut appeler *onde primitive,* celle qui a lieu à l'origine du mouvement, et *ondes secondaires* les deux ondes dans lesquelles la première se partage, et qui se propagent de part et d'autre de celle-ci. Dans l'onde primitive, la condensation et la vîtesse des tranches fluides sont absolument arbitraires; ces quantités sont représentées par les deux fonctions Ψx et ψx, qui n'ont entre elles aucun rapport nécessaire : il n'en est plus de même à l'égard des ondes secondaires; car, d'après les valeurs de as et de v du nº précédent, on a, du côté des x positives, $s=\frac{v}{a}$; et, relativement aux points qui répondent aux x négatives, les équations (4) se réduisent à

$$v=\frac{1}{2}\psi(x+at)+\frac{a}{2}\Psi(x+at),$$

$$as=-\frac{1}{2}\psi(x+at)-\frac{a}{2}\Psi(x+at);$$

ce qui donne $s=-\frac{v}{a}$. Il s'ensuit donc que dans les ondes secondaires, la variation de densité de chaque tranche fluide est proportionnelle à sa vîtesse : cette variation et la vîtesse sont nulles, et atteignent leur *maximum* aux mêmes points; de plus, la valeur de s est positive, et le fluide éprouve une condensation dans les tranches qui, d'après le signe de leur vîtesse, s'éloignent du lieu de l'ébranlement primitif; dans celles qui s'en rapprochent, elle est au contraire négative, et le fluide éprouve une dilatation.

Ce rapport remarquable qui s'établit, dans les ondes secondaires, entre la vîtesse et la condensation, est, suivant la remarque d'Euler, la raison pour laquelle ces ondes se propagent dans un seul sens, et ne se partagent plus comme l'onde primitive; de sorte que si ce même rapport avait lieu, par hasard, dans celle-ci, elle se propagerait aussi tout entière d'un seul côté, à la manière des ondes secondaires. En effet, supposons qu'on ait $a\Psi x = \psi x$, il en résultera

$$a\Psi(x+y)=\psi(x+y), \quad a\Psi(x-y)=\psi(x-y);$$

et les équations (4) deviendront

$$v=\Psi(x-y), \quad as=\psi(x-y);$$

d'où l'on peut conclure que l'ébranlement ne se transmettra que dans le sens des x positives, et nullement dans l'autre sens. De même, si nous supposions $a\Psi x = -\psi x$, les équations (4) se réduiraient à

$$v=\Psi(x+y), \quad as=-\psi(x+y);$$

et l'on en conclurait que l'ébranlement se propagera seulement dans le sens des x négatives.

(6) Examinons maintenant le cas où le tube qui renferme le fluide a une longueur finie et déterminée. Représentons cette longueur par l; fixons l'origine des distances x à l'un des deux bouts du tube, et comptons les x positives sur sa longueur, en sorte que ses extrémités répondent à $x=0$ et $x=+l$. Il n'y aura aucune tranche fluide qui réponde, soit à des x négatives, soit à des x positives et plus grandes que l; les fonctions ψx et Ψx, qui représentent les vîtesses et les condensations initiales, ne seront donc données que

pour les valeurs de x comprises depuis $x=0$ jusqu'à $x=l$: par conséquent, les fonctions fx et Fx seront aussi connues pour ces mêmes valeurs (n° 3); mais, hors des limites $x=0$ et $x=l$, les valeurs de fx et Fx ne pourront plus se se conclure de l'état initial du fluide; et l'on en disposera, comme on va le voir, pour satisfaire aux conditions relatives aux extrémités du tube.

Supposons d'abord que le tube est ouvert à ses deux bouts, et que l'air qu'il renferme communique librement avec l'air extérieur, lequel est de la même nature que le fluide intérieur, de manière que son élasticité et sa densité naturelles sont les mêmes que celles de ce fluide. On admet, dans ce cas, que les tranches fluides situées aux extrémités du tube, n'éprouvent ni condensation, ni dilatation, pendant toute la durée du mouvement : dans cette hypothèse, on doit donc avoir $s=0$, quand $x=0$ et quand $x=l$; d'où il résulte, d'après la seconde équation (3),

$$f(-y)-Fy=0,\quad f(l-y)-F(l+y)=0;$$

et dans ces deux nouvelles équations, on ne pourra donner à y que des valeurs positives, mais aussi grandes que l'on voudra.

A la place de y, mettons, dans la seconde, $y+l-x$, nous aurons

$$f(x-y)=F(2l-x+y);$$

au moyen de quoi, nous pouvons éliminer la fonction f des équations (3), ce qui les change en

$$\left.\begin{aligned} v&=F(x+y)+F(2l-x+y),\\ as&=-F(x+y)+F(2l-x+y). \end{aligned}\right\}\ (5)$$

Les quantités $x+y$ et $2l-x+y$, qui entrent ici sous la fonction F, sont toujours positives; lors donc que nous connaîtrons les valeurs de cette fonction pour toutes les valeurs positives de la variable, nous pourrons assigner la vîtesse v et la condensation s, en chaque point du tube et à un instant quelconque, et le problème sera complètement résolu.

Or, en faisant $x=0$ dans la valeur de $f(x-y)$, on a $f(-y)=F(2l+y)$; mais on a aussi, d'après une des équations précédentes, $f(-y)=Fy$; il en résulte donc

$$F(y+2l)=Fy; \quad (6)$$

équation qui fera connaître la fonction F, pour toutes les valeurs positives de la variable, lorsqu'elle sera connue depuis $x=0$ jusqu'à $x=2l$. Mais déja Fx est connue, d'après l'état initial du fluide, depuis $x=0$ jusqu'à $x=l$; de plus, en faisant $y=0$ dans la valeur de $f(x-y)$, il vient $fx=F(2l-x)$; et comme fx est aussi connue depuis $x=0$ jusqu'à $x=l$, il s'ensuit que $F(2l-x)$ le sera entre les mêmes limites, ou, ce qui revient au même, Fx sera connue depuis $x=l$, jusqu'à $x=2l$; donc, les valeurs de cette fonction sont déterminées depuis $x=0$ jusqu'à $x=2l$, et par conséquent pour toutes les valeurs positives de la variable.

On peut remarquer que les valeurs de la fonction F, qui répondraient à des valeurs négatives de la variable, restent entièrement arbitraires : il en est de même des valeurs de la fonction f, correspondantes à des variables positives et plus grandes que l; mais cette indétermination d'une partie des deux fonctions f et F, n'empêche pas le mouvement du fluide d'être complètement déterminé.

40.

(7) L'équation (6) montre que Fy reprend la même valeur, toutes les fois que la variable y augmente de $2l$; et comme cette fonction est la seule qui entre dans les valeurs de v et s données par les équations (5), il en résulte que ces valeurs redeviendront aussi les mêmes, lorsque y ou at se trouvera augmentée de $2l$; le fluide contenu dans le tube reviendra donc au même état, soit par rapport aux vîtesses, soit par rapport aux condensations de ses tranches, au bout de chaque intervalle de temps égal à $\frac{2l}{a}$; par conséquent, il fera une suite infinie d'oscillations isochrones et semblables entre elles, dont la durée commune sera égale à $\frac{2l}{a}$.

Ces oscillations se transmettent à l'air extérieur; le nombre de celles qui ont lieu dans un temps donné, détermine le *ton* que le tube fait entendre, et qui est d'autant plus élevé, que ce nombre est plus grand : appelant donc n le nombre de ces oscillations dans l'unité de temps, on aura $n=\frac{a}{2l}$, pour calculer le ton de l'instrument, d'après sa longueur et la nature du fluide qu'il contient. Réciproquement, l'observation du ton fait connaître le nombre n des oscillations du fluide; d'où l'on pourra conclure, sans l'observer directement, la vîtesse a de la propagation du son dans ce même fluide.

(8) La durée des oscillations ne dépend pas, comme on voit, de l'état initial du fluide ; néanmoins cet état peut être tel que chaque oscillation se décompose en un nombre exact d'autres oscillations isochrones et semblables entre elles : le nombre de celles-ci, dans l'unité de temps, sera alors un multiple de celui des premières ; et l'instrument pourra rendre des tons différens du ton principal. En effet, les va-

leurs de Fy, depuis $y=0$ jusqu'à $y=2l$, dépendant de l'état initial et arbitraire du fluide, on peut prendre arbitrairement cette fonction entre ces limites : on peut donc supposer que ses valeurs sont égales et de même signe, pour deux valeurs de y, qui diffèrent l'une de l'autre d'un sous-multiple donné de $2l$; en sorte qu'on ait

$$F\left(y+\frac{2l}{i}\right)=Fy;$$

i étant un nombre entier donné. Dans ce cas, les valeurs de v et de s, données par les équations (5), redeviendront les mêmes toutes les fois que y ou at augmentera de $\frac{2l}{i}$; par conséquent, les oscillations du fluide se feront dans un temps egal à $\frac{2l}{ia}$; et, en appelant $n_{,}$ leur nombre dans l'unité de temps, on aura

$$n_{,}=\frac{ia}{2l}=in.$$

Ainsi, dans la théorie que nous exposons maintenant, un même tube ouvert par les deux bouts, peut rendre la série des tons qui répondent aux nombres d'oscillations n, $2n$, $3n$, $4n$, etc, et il n'en peut faire entendre aucun autre : le premier, ou le plus grave de tous, est celui qu'on nomme le ton *fondamental.*

(9) La différence des deux quantités $2l-x+y$ et $x+y$, qui entrent sous la fonction F dans les équations (5), est indépendante du temps et égale à $2l-2x$; si donc l'on considère les points du tube, pour lesquels on a

$$2l-2x=\frac{2i'l}{i}, \text{ ou } x=\frac{(i-i')\,l}{i},$$

i' étant zéro ou un nombre entier qui ne surpasse pas i, on

aura, dans l'hypothèse du n° précédent,

$$F(2l-x+y)=F(x+y);$$

et la seconde équation (5) donnera alors $s=0$. En faisant successivement $i'=0, 1, 2, 3$, etc, jusqu'à $i'=i$, on déterminera donc, sur le tube, un nombre $i+1$ de points équidistans, qui comprendront ses deux extrémités, et dans lesquels la condensation du fluide sera nulle pendant toute la durée du mouvement; en sorte que si l'on venait à couper le tube, ou bien à y pratiquer une ouverture en l'un de ces points, de manière à établir la communication avec l'air extérieur, le mouvement du fluide n'en serait aucunement changé. Ces points partagent la colonne fluide en un nombre i de portions égales, qui ont toutes le même mouvement, et dont chacune fait entendre le ton fondamental d'un tube ouvert à ses deux bouts, d'une longueur égale à $\frac{l}{i}$.

Si l'on supposait que les valeurs de Fy sont égales et de signes contraires, pour deux valeurs de y qui diffèrent entre elles de la moitié de $\frac{2l}{i}$, de sorte qu'on eût

$$F\left(y+\frac{l}{i}\right)=-Fy,$$

cette hypothèse comprendrait celle du n° précédent; mais alors, en faisant

$$2l-2x=\frac{i'l}{i}, \text{ ou } x=\frac{(2i-i')l}{2i},$$

et supposant i' un nombre impair plus petit que i, il en résulterait

$$F(2l-x+y)=-F(x+y);$$

et en vertu de la première équation (5), on aurait $v=0$. En donnant donc à i', cette suite de valeurs : $i'=1, 3, 5$, etc., jusqu'à $i'=2i-1$, on déterminera, dans ce cas, un nombre i de nouveaux points équidistans sur le tube, pour lesquels la vîtesse du fluide sera nulle pendant toute la durée du mouvement. Chacun de ces points sera tel, qu'en y plaçant une cloison fixe dans l'intérieur du tube, qui le ferme exactement, le mouvement du fluide ne sera pas changé ; car l'effet d'une semblable cloison serait de détruire la vîtesse de la tranche fluide qui lui est juxta-posée, laquelle vîtesse est déja constamment égale à zéro.

(10) Ces points où le fluide reste toujours immobile, se nomment des *nœuds de vibrations ;* ceux dans lesquels sa densité n'éprouve aucune variation, sont connus sous le nom de *ventres*. Les uns joints aux autres divisent la colonne fluide en un nombre $2i$ de parties égales, qui font toutes leurs oscillations dans le même intervalle de temps, savoir, dans un temps égal à $\frac{2l}{ia}$. Or, il est évident que ces portions de fluide, dont la longueur commune est $\frac{l}{2i}$, sont dans le même état que si chacune d'elles oscillait dans un tube fermé par un bout et ouvert à l'autre : donc, en faisant $\frac{l}{2i}=l'$, il en faudra conclure que la durée des oscillations dans un semblable tube, d'une longueur l', est exprimée par $\frac{4l'}{a}$, c'est-à-dire qu'elle est double, toutes choses d'ailleurs égales, de celle qui a lieu pour un tube ouvert à ses deux bouts ; par conséquent, dans le tube fermé par un bout, le nombre des oscillations dans l'unité de temps est moitié moindre, et le ton moitié moins élevé que dans le tube ouvert de même longueur.

Il ne s'agit ici que du ton fondamental; mais si l'on retranche du tube ouvert aux deux bouts, la partie comprise entre une extrémité et l'un des nœuds de vibrations, par exemple, celui qui est le plus voisin de cette extrémité, il restera un tube fermé par un bout et ouvert à l'autre, dont la longueur sera $\frac{(2i-1)l}{2i}$, et dans lequel la durée des oscillations sera toujours $\frac{2l}{ia}$; posant donc $\frac{(2i-1)l}{2i}=l'$, cet intervalle de temps sera exprimé par $\frac{4l'}{(2i-1)a}$, et le nombre des oscillations dans l'unité de temps, par $\frac{(2i-1)a}{4l'}$, ou par $(2i-1)n'$, en faisant, pour abréger, $\frac{a}{4l'}=n'$. Donc un tube ouvert par un seul bout, dont la longueur est l', peut faire entendre la suite des tons qui répondent aux nombres d'oscillations n', $3n'$, $5n'$, $7n'$, etc.; le premier, ou le plus grave de tous, étant le ton fondamental.

On parvient aux mêmes conséquences en considérant directement le cas d'un tube fermé par un bout, et exprimant que la vîtesse du fluide est constamment nulle en ce point, et sa condensation toujours nulle à l'extrémité ouverte. Nous ne nous arrêterons point à cette vérification; et, pour abréger, nous ne nous occuperons pas non plus du tube fermé aux deux bouts, dans lequel l'analyse montre que les oscillations du fluide se font suivant les mêmes lois que dans le tube ouvert aux deux extrémités.

(11) Les équations des nos 1, 2 et 3, et les conséquences que nous en avons déduites, conviennent également au cas où le fluide est contenu dans un tube recourbé, ouvert ou fermé à ses extrémités, ou qui se prolonge indéfiniment : il

suffit que sa largeur soit la même dans toute son étendue, et que les distances x soient comptées sur la courbe qu'il forme; mais le cas où le tube rentre sur lui-même et forme une courbe fermée, mérite quelque attention; c'est pourquoi nous allons le considérer d'une manière succincte.

Fixons l'origine des x en un point du tube choisi arbitrairement, et désignons toujours sa longueur par l; les valeurs des deux fonctions fx et $\mathrm{F}x$ seront données d'après l'état initial du fluide (n° 3), pour toutes les valeurs positives de x, depuis $x=0$ jusqu'à $x=l$; mais pour assigner, au moyen des équations (3), les valeurs de v et de s en un point et à un instant quelconque, il faut en outre connaître la fonction f, pour toutes les valeurs négatives de la variable, et la fonction F, pour toutes les valeurs positives et plus grandes que l. Or, le point où l'on a placé l'origine des x, répond également à $x=0$ et à $x=l$; il faut donc que les valeurs de v et de s soient les mêmes pour l'une et l'autre valeurs de x; donc, en vertu des équations (3), nous aurons

$$f(-y)+\mathrm{F}y=f(l-y)+\mathrm{F}(l+y),$$

$$f(-y)-\mathrm{F}y=f(l-y)-\mathrm{F}(l+y);$$

d'où l'on conclut

$$f(-y)=f(l-y),\quad \mathrm{F}y=\mathrm{F}(l+y);$$

et comme ces équations ont lieu pour toutes les valeurs positives de y, elles détermineront les valeurs des fonctions f et F, qu'on a besoin de connaître, au moyen de celles qui sont déja connues : la détermination du mouvement du fluide est donc complète, et le problême est résolu.

Ces mêmes équations montrent que chacune des deux

fonctions f et F reprendra la même valeur, toutes les fois que y ou at sera augmenté de l; en vertu des équations (3), il en sera de même des quantités v et s; le fluide fera donc des oscillations isochrones, dont la durée commune sera égale à $\frac{l}{a}$, c'est-à-dire moitié de celle qui répond à un tube de même longueur, ouvert par les deux bouts. Si, d'après l'état initial du fluide, les valeurs de fx et Fx, depuis $x=o$ jusqu'à $x=l$, sont les mêmes et de même signe, pour des valeurs de x, dont la différence est un sous-multiple donné de l, que nous représenterons par $\frac{l}{i}$, on en conclura, comme dans le nº 8, que chaque oscillation du fluide se partagera en un nombre i d'oscillations égales; la durée des vibrations du fluide se trouvera donc alors réduite à $\frac{l}{ia}$; mais, en considérant les équations (3), et observant que les fonctions f et F sont, dans le problême qui nous occupe, indépendantes l'une de l'autre, il est aisé de voir qu'il n'y aura pas nécessairement des points du tube, dans lesquels la vîtesse ou la condensation du fluide soit constamment égale à zéro. On ne saurait donc appliquer aux tuyaux rentrans sur eux-mêmes, la théorie connue de D. Bernouilli sur les vibrations de l'air dans un tube (*); car, suivant cette théorie, la durée des oscillations ne peut être réduite, qu'autant que le fluide se divise en portions terminées par des ventres ou des nœuds de vibrations.

(12) Lorsqu'on a ébranlé l'air d'une manière quelconque dans un tube, et qu'on l'abandonne ensuite à lui-même, l'expérience prouve que le son qui était produit, et, par consé-

(*) Académie des sciences de Paris, année 1762.

quent, les vibrations du fluide, deviennent insensibles dans un intervalle de temps très-court et presque inappréciable; résultat contraire à la théorie précédente, d'après laquelle les oscillations du fluide doivent se continuer indéfiniment sans altération, du moins quand on fait abstraction du frottement qu'il éprouve contre les parois du tube. En ayant égard à ce frottement et en le supposant proportionnel à la vîtesse du fluide en chaque point du tube, on trouverait que l'amplitude des oscillations doit continuellement diminuer, et finir par être insensible; mais on verrait aussi que cette extinction ne saurait être aussi rapide que l'observation l'indique; en sorte que le frottement n'en est pas, en général, la cause principale. On doit l'attribuer, selon nous, à ce qu'aux extrémités ouvertes ou fermées des tubes sonores, la condensation ou la vîtesse du fluide n'est pas rigoureusement nulle, comme on le suppose dans la théorie précédente. En effet, pour qu'il n'y eût aucune vîtesse à l'extrémité d'un tube fermé, il faudrait que la matière contre laquelle la colonne d'air s'appuie, ne fût aucunement flexible; ce qu'on ne peut jamais supposer dans la pratique; et quant aux tubes ouverts, il est évident que la colonne d'air intérieur, qui représente le corps sonore, ne peut mettre en mouvement l'air extérieur, sans que celui-ci n'éprouve en même temps des condensations proportionnelles aux vîtesses qui lui sont imprimées. Il résulte de là, que les ondes sonores, lorsqu'elles parviennent aux extrémités du tube, n'y subissent pas une réflexion parfaite: à chaque réflexion, la vîtesse propre des molécules d'air se trouve un tant soit peu diminuée; et si l'on observe que dans un tube d'une longueur ordinaire, d'un mètre, par exemple, il se fait plus de 300 réflexions en une

seconde, on pourra juger du peu de temps que les vibrations du fluide devront mettre en général à s'anéantir.

Nous admettrons donc désormais qu'il y a toujours à-la-fois vîtesse et condensation ou dilatation du fluide aux extrémités des tubes sonores : condensation, lorsque le fluide, d'après la direction de sa vîtesse, tend à sortir du tube, et dilatation dans le cas contraire. De plus, nous supposerons qu'il s'établit un rapport constant entre la vîtesse de la dernière tranche fluide et la variation de sa densité; nous montrerons comment on peut déterminer ce rapport à l'extrémité d'un tube bouché, quand on connaît le degré de flexibilité de la matière qui ferme le tube : nous pourrons aussi trouver la valeur de ce même rapport, dans le cas d'un tube cylindrique qui s'ouvre dans un autre cylindre, en supposant toutefois que les tranches fluides conservent leur parallélisme dans les deux cylindres; mais la détermination de cette valeur, lorsque le tube s'ouvre dans l'air libre, serait un problème très-difficile, que nous n'essaierons pas de résoudre.

(13) Il suit de l'observation que nous venons de faire, que, pour produire un son d'une certaine durée, il est nécessaire que le mouvement de la colonne vibrante soit entretenu par une cause qui agisse sans interruption sur le fluide; et ce ne sont pas, comme nous l'avons fait précédemment, les vibrations dues à l'état initial du fluide, mais bien celles qui résultent de cette action constante, qu'il importe de déterminer. C'est en soufflant continuellement dans le tube par l'embouchure, que l'on entretient ce mouvement; or, dans la théorie ordinaire des instrumens à vent, on assimile les embouchures aux extrémités ouvertes des tubes, et l'on y

regarde comme nulle la condensation du fluide. Cependant la manière dont il faut souffler dans un tube pour lui faire rendre un son, est beaucoup trop compliquée pour qu'il soit possible de déterminer *à priori*, ni la vîtesse, ni la condensation de l'air intérieur près de l'embouchure : il n'y a que l'expérience qui puisse décider si la densité de l'air est invariable en ce point; et comme la durée des vibrations, conclue du ton observé, s'écarte notablement de celle qui aurait lieu dans la supposition d'une densité constante, il en résulte qu'il faut rejeter cette hypothèse, et n'en faire aucune autre, s'il est possible.

D'après ces considérations, voici comment nous nous proposons d'envisager la question, dans la suite de ce Mémoire.

Nous regarderons la vîtesse du fluide à l'embouchure du tube, comme donnée arbitrairement, et exprimée par une fonction périodique du temps, dont nous ne spécifierons pas la forme : cette vîtesse sera produite et entretenue en soufflant d'une manière quelconque dans le tube, ou tout autrement; le problême qu'on aura à résoudre consistera à en déduire la vîtesse et la densité du fluide dans toute la longueur du tube; et l'on déterminera même, par l'analyse, les variations de densité qui ont lieu à l'embouchure, et qui répondent à cette expression donnée de la vîtesse en ce point. Quant à l'extrémité du tube opposée à l'embouchure, on supposera, comme on l'a expliqué dans le n° précédent, qu'il s'y établit un rapport constant entre la vîtesse du fluide et la variation de sa densité. C'est ce rapport qui nous permettra d'avoir égard à une action continue sur le fluide, en empêchant les ondulations produites par cette action, de s'accumuler sans cesse dans la colonne vibrante.

§ II.

Nouvelle manière d'envisager la question du mouvement des fluides élastiques dans les tubes cylindriques.

(14) Dans ce second paragraphe, nous conserverons toutes les notations employées dans le premier; nous compterons le terme t de l'origine du mouvement, et les distances x à partir de l'extrémité du tube, où nous regardons la vîtesse du fluide, d'après ce qui vient d'être dit dans le n° précédent, comme donnée arbitrairement en fonction de t, laquelle extrémité est l'embouchure dans les instrumens à vent : nous appellerons en général, première tranche fluide, celle qui répond à cette extrémité du tube.

Considérons, en premier lieu, le cas d'un tube indéfiniment prolongé; et supposons que le fluide qu'il renferme soit d'abord à l'état de repos, sans condensation ni dilatation dans toute son étendue. On aura alors, pour toutes les tranches fluides, $v=0$, $s=0$, quand $t=0$; d'où il résulte, d'après les équations (3) du n° 2, $fx=0$, $Fx=0$, pour toutes les valeurs positives de x; donc, puisque y ou at est une variable positive, on aura toujours $F(x+y)=0$; ce qui réduit ces mêmes équations à

$$v=as=f(x-at).$$

Désignons maintenant par φt, la vîtesse de la première tranche fluide, au bout du temps t; en sorte que φ indique une fonction donnée, pour toutes les valeurs positives de la variable. Nous aurons $v=\varphi t$, pour $x=0$; ce qui donne $f(-at)=\varphi t$. Tant que x surpasse at, on a $f(x-at)=0$; mais si l'on

suppose que at soit devenu $>x$, ou $t>\frac{x}{a}$, on pourra mettre $t-\frac{x}{a}$ à la place de t, dans cette équation $f(-at)=\varphi t$; on aura donc $f(x-at)=\varphi\left(t-\frac{x}{a}\right)$, et par conséquent

$$v=as=\varphi\left(t-\frac{x}{a}\right). \quad (7)$$

On conclut de là que la tranche fluide qui répond à la distance x, commencera à s'ébranler à l'instant où l'on aura $t=\frac{x}{a}$; de manière que le mouvement se transmettra dans toute la colonne fluide, avec une vîtesse constante et égale à a, ainsi que nous l'avons déja vu dans le paragraphe précédent. De plus, chaque tranche fluide passera par les mêmes degrés de vîtesse que la première; elle éprouvera en même temps des variations de densité proportionnelles à sa vîtesse; et si le mouvement de la première tranche ne subsiste que pendant un temps déterminé, le mouvement et la condensation d'une tranche quelconque, ne dureront non plus que pendant le même intervalle de temps.

(15) Supposons que la vîtesse de la première tranche fluide lui soit imprimée par le mouvement d'un corps sonore, en contact avec elle, et qui exécute une suite de vibrations isochrones. Le fluide, comme on a coutume de le supposer, répétera successivement dans toute sa longueur, ces mêmes vibrations, dont le nombre, dans l'unité de temps, détermine le *ton*, tandis que la force du son dépend de leur amplitude. Si nous représentons par θ, la durée d'une vibration entière, l'allée et le retour compris, la fonction φt, qui représente la vîtesse de ce mouvement, sera nulle pour toutes les valeurs de t qui sont un

multiple de θ; désignant donc par i, un nombre entier ou zéro, et faisant $t - \frac{x}{a} = i\theta$, ou $x = at - i\theta$, on aura $\varphi\left(-\frac{x}{a}\right) = 0$; d'où il résulte $v = 0$, $s = 0$, en vertu des équations (7). Ainsi, en prenant successivement, dans cette valeur de x, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, etc, on déterminera, pour un instant donné, une suite de points où il n'y aura, à cet instant, ni vîtesse, ni condensation. La portion d'air en mouvement, c'est-à-dire la partie comprise entre le corps sonore et la molécule qui commence à s'ébranler, se trouvera partagée par ces points remarquables, en *ondes sonores* parfaitement égales et semblables entre elles, qui se propageront avec la vîtesse a, et dont la longueur commune sera égale à l'espace $a\theta$, que chaque onde parcourt pendant la durée d'une vibration.

Dans les corps sonores, l'allée et le retour qui composent chaque vibration, se font par des mouvemens semblables; en sorte que, dans ces deux parties, la vîtesse φt ne diffère que par le signe : elle est nulle au bout de la demi-vibration, positive dans la première moitié, négative dans la seconde. Il résulte de là, qu'au point milieu de chaque onde sonore, la vîtesse et la condensation seront nulles comme aux points extrêmes; dans la partie antérieure le fluide sera condensé, et les molécules, en vertu de leurs vîtesses propres, s'écarteront du corps sonore, pour se mouvoir dans le sens de la propagation de l'onde; au contraire, dans l'autre partie, le fluide sera dilaté, et les molécules se rapprocheront du corps sonore, en revenant à leurs positions primitives. Quant à l'excursion totale de chaque molécule, elle sera la même que celle de la première tranche fluide, et exprimée par l'intégrale $\int \varphi t dt$, prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \frac{1}{2}\theta$. Elle sera donc

toujours très-petite relativement à la demi-longueur de l'onde sonore; car, par hypothèse (n° 2), les différentes valeurs de la fonction φ, qui représentent les vîtesses des molécules, doivent être très-petites par rapport à la constante a; d'où il résulte que cette intégrale $\int \varphi t dt$, sera aussi très-petite par rapport à la quantité $\frac{1}{2}a\theta$.

Pour simplifier la question, nous avons supposé que le mouvement du fluide était produit à l'une de ses extrémités; mais si l'on faisait vibrer arbitrairement une tranche quelconque du fluide, et que le tube se prolongeât indéfiniment de part et d'autre de ce point, il faudrait considérer séparément chacune de ses deux parties, comme un tube dans lequel le mouvement se propagerait suivant les lois qu'on vient d'expliquer. Deux tranches fluides, prises à égales distances de part et d'autre de celle qui est directement ébranlée, éprouveraient en même temps des variations de densité égales et de signes contraires; il en serait de même à l'égard de leurs vîtesses, et l'une de ces tranches se rapprocherait de l'origine du mouvement, tandis que l'autre s'en éloignerait.

(16) La longueur du tube étant infinie, on peut supposer qu'au lieu d'un simple mouvement d'oscillations, la première tranche ait reçu un mouvement progressif suivant cette longueur, pourvu toutefois que sa vîtesse soit toujours très-petite par rapport à la vîtesse a. La fonction φt continuant de représenter cette vîtesse de la première tranche, les équations (7) détermineront, comme précédemment, la vîtesse et la condensation d'une tranche quelconque, à partir de l'instant où elle commence à s'ébranler; et cet instant sera celui qui répond à $t=\frac{x}{a}$, la distance x de cette tranche et le temps t

étant comptés du point d'où la première tranche est partie et de l'époque de son départ. Ainsi, lorsqu'on pousse une colonne d'air dans un tube d'une longueur indéfinie, ses différentes tranches prennent successivement la vîtesse que l'on imprime à la première; la transmission du mouvement n'est point instantanée; elle se fait avec une vîtesse indépendante de celle du fluide et égale à la vîtesse du son dans ce même fluide : en même temps chaque tranche éprouve une augmentation de densité, qui est à sa densité naturelle comme sa vîtesse est à celle de la propagation du mouvement.

Il est évident que l'on produira un mouvement de la même nature, en condensant ou raréfiant l'air à l'un des bouts du tube : on passera du cas précédent à celui-ci, en supposant que $\frac{1}{a}\varphi t$ représente la condensation qu'on fait subir au fluide à cette extrémité; et l'on en déduira les mêmes conséquences que nous venons d'énoncer. Ce nouveau cas est, en général, celui de la production du vent; on peut donc dire que, dans ce phénomène, les vîtesses des molécules d'air sont proportionnelles à leurs variations de densité, et réciproquement. Si, par exemple, la densité varie de $\frac{1}{30}$ de sa valeur dans l'état naturel, la vîtesse de l'air, au même instant, sera égale à $\frac{1}{30}$ de la constante a qui exprime la vîtesse du son; c'est-à-dire qu'elle sera d'environ onze mètres par seconde sexagésimale. Le fluide, avec cette vîtesse, s'éloignera ou se rapprochera de l'origine du vent, selon que sa densité aura été augmentée ou diminuée; mais, dans tous les cas, le vent fort ou faible se propagera en s'éloignant de son origine, avec une vîtesse égale à celle du son dans le même fluide.

(17) Nous pouvons encore supposer que le tube qui contient le fluide soit dans une position verticale, et que le fluide soit mis en mouvement par un corps solide, qui tombe le long du tube en vertu de son poids. Ce corps est une sorte de piston, de forme cylindrique, qui ferme exactement le tube, et dont les bases sont perpendiculaires à son axe. Dans son mouvement, il poussera la partie de la colonne fluide qui est au-dessous de lui, et sera suivi par la partie qui lui est supérieure : sa vîtesse sera celle des deux tranches fluides, avec lesquelles il est en contact. Désignons par u, cette vîtesse au bout du temps t; la condensation de la tranche inférieure sera exprimée par $\frac{u}{a}$, et celle de la tranche supérieure, par $-\frac{u}{a}$; or, d'après l'expression connue de la vîtesse a, si D représente la densité naturelle du fluide, le produit $\mathrm{D}a^2 s$ représentera l'augmentation d'élasticité, correspondante à une condensation quelconque s; donc, dans l'état de mouvement, l'excès de l'élasticité de la tranche inférieure sur celle de la tranche supérieure, sera exprimée par $2\mathrm{D}au$. Cette force est directement opposée au poids du corps; appelant donc D' sa densité, h sa longueur, et g sa gravité, nous aurons, pour l'équation de son mouvemement,

$$\mathrm{D}' h \frac{du}{dt} = \mathrm{D}' hg - 2\mathrm{D}au.$$

Si l'on intègre cette équation, que l'on suppose nulle la vîtesse initiale, et qu'on fasse, pour abréger,

$$\frac{2\,\mathrm{D}a}{\mathrm{D}'h} = \alpha,$$

on trouve

$$u = \frac{g}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right);$$

e designant la base des logarithmes dont le module est égal à l'unité. On prendra cette valeur de u, pour celle de φt; et le mouvement du fluide sera déterminé, au moyen des équations (7), comme dans les n^os précédens.

La quantité $2Dau$ exprime la résistance que le fluide oppose au mouvement du corps : cette force n'est donc pas seulement proportionnelle à la densité du fluide, comme on le suppose ordinairement; elle est en raison composée de cette densité et de la vîtesse du son dans le même fluide; en sorte que la densité restant la même, elle varierait, par exemple, avec la température. Mais l'expression de la résistance serait sans doute différente, si le corps qui l'éprouve se mouvait dans l'air libre, au lieu d'être contenu, ainsi que le fluide, dans un canal cylindrique. On ne doit pas non plus oublier que notre analyse suppose la vîtesse du corps très-petite par rapport à celle du son; de manière qu'elle ne serait point applicable au cas des grandes vîtesses, comme celle des projectiles lancés par les bouches à feu. Nous observerons, en passant, qu'on ne parviendra à une théorie satisfaisante sur la résistance des fluides, qu'en considérant à-la-fois, ainsi que nous venons de le faire, le mouvement du projectile et celui du fluide, et prenant pour l'expression de la résistance, la résultante des pressions que le fluide exerce sur la surface du corps solide.

(18) Maintenant considérons le cas où le fluide est contenu dans un tube d'une longueur finie et déterminée, que nous représenterons par l. Nous admettrons, comme nous l'avons dit plus haut, qu'il s'établit un rapport constant entre la vîtesse et la condensation du fluide, à l'extrémité qui répond à $x=l$. Soit donc, en ce point,

$$as = kv;$$

le coëfficient k étant une constante positive, afin qu'il y ait condensation ou dilatation, selon que le fluide est poussé en dehors ou en dedans du tube (n° 12). Il en résultera, d'après les équations (3),

$$f(l-y) - F(l+y) = k\big(f(l-y) + F(l+y)\big):$$

d'où l'on déduit

$$f(l-y) = \frac{1+k}{1-k} F(l+y);$$

équation qui aura lieu pour toutes les valeurs positives de y. En y mettant $y+l-x$ à la place de cette variable, on a

$$f(x-y) = \frac{1+k}{1-k} F(2l-x+y);$$

donc, en remettant at pour y, les équations (3) deviendront

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{1+k}{1-k} F(2l-x+at) + F(x+at), \\ as &= \frac{1+k}{1-k} F(2l-x+at) - F(x+at). \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Si l'on voulait que la vîtesse du fluide fût rigoureusement nulle à l'extrémité du tube qui répond à $x=l$, il faudrait faire k infini, dans ces formules : on aurait, quel que soit t, $v=0$ pour $x=l$. Ce cas ne peut avoir lieu qu'en supposant le tube fermé par une matière tout-à-fait inflexible ; dans la pratique, elle est seulement très-peu flexible; et, par conséquent, le coëfficient k devra seulement être regardé eomme un très-grand nombre. Si l'on fait, au contraire, $k=0$, on aura, quel que soit t, $s=0$ pour $x=l$; mais, dans un tube

ouvert à l'extrémité correspondante à $x=l$, la condensation n'est jamais entièrement nulle en ce point; celle qui a lieu doit dépendre du diamètre du tube; et l'on peut la supposer très-petite, si ce diamètre est peu considérable, et si le tube s'ouvre dans l'air libre; de manière que, dans le cas du tube ouvert, nous pourrons, en général, regarder la quantité k comme une très-petite fraction. Ainsi, dans la suite, nous supposerons cette quantité très-grande ou très-petite, selon que nous voudrons exprimer qu'il s'agit d'un tube fermé, ou d'un tube ouvert, à l'extrémité qui répond à $x=l$. Tant qu'on ne fera aucune hypothèse particulière sur la valeur de k, les résultats seront communs aux deux espèces de tube.

(19) Cela posé, supposons la vîtesse et la condensation initiales du fluide, données dans toute la longueur du tube; en faisant $t=0$, dans les équations (8), on en déduira des expressions de $\mathrm{F}x$ et $\mathrm{F}(2l-x)$, qui auront lieu depuis $x=0$ jusqu'à $x=l$; d'où il résulte que la fonction F sera censée connue, d'après l'état primitif du fluide, pour toutes les valeurs de la variable comprises entre zéro et $2l$. Mais, pour déterminer, au moyen des équations (8), les valeurs de v et de s à un autre instant quelconque, il faut connaître cette fonction F, pour toutes les valeurs positives de la variable. Or, si nous représentons, comme précédemment, par φt la vîtesse de la première tranche fluide au bout du temps t, laquelle vîtesse est censée donnée, nous aurons, en faisant $x=0$ dans la première équation (8),

$$\frac{1+k}{1-k}\mathrm{F}(2l+at)+\mathrm{F}(at)=\varphi t;$$

et comme on pourra donner à la variable at, une valeur

positive quelconque, il est évident que cette équation fera connaître toutes les valeurs de la fonction F dont on a besoin.

Pour en obtenir l'expression générale, désignons par i un nombre entier positif ou zéro, et par z, une quantité positive plus petite que $2l$; prenons $at=2il+z$, et faisons, pour abréger,

$$\frac{k-1}{k+1}=b;$$

nous déduirons facilement de l'équation précédente

$$\left.\begin{aligned}F\left(2(i+1)\,l+z\right)=b^{i+1}\,Fz-b\varphi\left(\frac{2il+z}{a}\right)-b^{2}\varphi\left(\frac{2(i-1)\,l+z}{a}\right)\\ -b^{3}\,\varphi\left(\frac{2(i-2)\,l+z}{a}\right)\ldots\ldots\ldots-b^{i+1}\,\varphi\left(\frac{z}{a}\right)\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

On pourra attribuer à la première tranche fluide, tel mouvement de vibrations qu'on voudra, pourvu que la fonction φt, qui représente sa vîtesse, soit toujours très-petite, par rapport à a, et qu'il en soit de même des valeurs résultantes pour la fonction F; car, sans cela, les valeurs de v et de s, données, par les équations (8), cesseraient aussi d'être très-petites; le mouvement du fluide ne pourrait plus se déterminer par notre analyse (n° 2), et ce mouvement ne serait plus de la même nature que les vibrations sonores. Nous allons donc examiner successivement les principales formes que l'on peut attribuer à la fonction φ, et nous exclurons celles dont il résulterait de trop grandes valeurs pour la fonction F.

(20) Supposons d'abord que la première tranche fluide fasse des oscillations isochrones dont la durée commune soit égale à $\frac{2l}{a}$, en sorte que sa vîtesse redevienne la même et de même signe, toutes les fois que le temps augmente de $\frac{2l}{a}$, ou

d'un multiple de cette quantité. Les valeurs de la fonction φ, qui entrent dans le second membre de l'équation (9), seront toutes égales entre elles ; il en résultera une progression géométrique ; et, en en faisant la somme, on aura

$$F\left(2(i+1)\,l+z\right)=b^{i+1}\,Fz-\frac{b(1-b^{i+1})}{1-b}\varphi\left(\frac{z}{a}\right).$$

Or, k étant une quantité positive, la quantité représentée par b est plus petite que l'unité, abstraction faite du signe ; après un très-grand nombre d'oscillations marqué par i, la puissance i de b sera donc très-petite et tout-à-fait négligeable ; et, vu la rapidité des vibrations des corps sonores, cela arrivera après un intervalle de temps qui sera, en général, peu considérable. Ainsi, au bout d'un certain temps, la quantité Fz, qui dépend de l'état initial du fluide, disparaîtra de l'équation précédente ; de manière que le mouvement du fluide se trouvera alors indépendant de cet état. De plus, cette équation se réduira, sans erreur sensible, à

$$F\left(2(i+1)\,l+z\right)=-\frac{b}{1-b}\varphi\left(\frac{z}{a}\right);$$

donc, en y substituant pour b sa valeur, remettant at à la place de $2il+z$, et observant que

$$\varphi\left(\frac{z}{a}\right)=\varphi\left(\frac{2il+z}{a}\right)=\varphi t,$$

il en résultera

$$F(at+2l)=\frac{1-k}{2}\varphi t;$$

ce qui montre que les valeurs de la fonction F seront devenues périodiques, comme celles de la fonction φ.

En éliminant cette fonction F des équations (8), elles de-

viennent

$$\left.\begin{aligned} v&=\frac{1+k}{2}\varphi\left(\frac{at-x}{a}\right)+\frac{1-k}{2}\varphi\left(\frac{at+x}{a}\right),\\ as&=\frac{1+k}{2}\varphi\left(\frac{at-x}{a}\right)-\frac{1-k}{2}\varphi\left(\frac{at+x}{a}\right); \end{aligned}\right\}\quad(10)$$

la vîtesse v et la condensation s reprendront donc exactement les mêmes valeurs, et le fluide reviendra au même état, toutes les fois que t augmentera de $\frac{2l}{a}$; par conséquent, le fluide fera alors, comme sa première tranche, des oscillations régulières et isochrones, dont la durée sera égale à $\frac{2l}{a}$. Ce mouvement sera possible, s'il s'agit d'un tube ouvert; car alors la quantité k n'étant pas très-grande, les valeurs de v et de s demeureront très-petites, comme celles de la fonction φ. Mais si le tube est fermé à l'extrémité qui répond à $x=l$, on devra supposer la quantité k extrêmement grande (nº 18); les valeurs de v et de s cesseront donc d'être très-petites; et, d'après la remarque du nº précédent, cette espèce de mouvement devra être exclue : il en faudra conclure que, dans un tube fermé de longueur l, le fluide ne peut exécuter des vibrations sonores dont la durée soit $\frac{2l}{a}$.

Dans le cas du tube ouvert, si chacune des oscillations de la première tranche fluide se partage en un nombre quelconque n d'oscillations égales et isochrones, les vibrations du fluide se partageront de la même manière : car, si l'on a généralement

$$\varphi\left(t+\frac{2l}{na}\right)=\varphi t,$$

les valeurs de v et de s redeviendront aussi les mêmes, au bout de chaque intervalle de temps égal à $\frac{2l}{na}$. Si, en outre,

l'allée et le retour, dans chaque vibration de la première tranche, se font par des mouvemens semblables, de manière qu'on ait

$$\varphi\left(t+\frac{l}{na}\right)=-\varphi t,$$

il en sera de même des oscillations du fluide, soit par rapport aux vîtesses de ses molécules, soit par rapport à leurs variations de densité. Dans ce cas particulier, on fera voir, comme dans le nº 9, au moyen des équations (10), que la colonne fluide se partage, pendant son mouvement, en un nombre $2n$ de parties égales et semblables, terminées alternativement par des ventres et des nœuds de vibrations; toutefois il arrivera, à cause de la quantité k qui n'est pas tout-à-fait nulle, que ni les condensations ni les vîtesses en ces points ne seront rigoureusement égales à zéro : elles seront seulement très-petites par rapport aux valeurs de s et de v relatives à d'autres points du tube.

(21) A l'extrémité du tube qui répond à $x=0$, il s'établit entre les valeurs de v et de s, données par les équations (10), le même rapport $as=kv$ qu'à l'autre extrémité; mais il est bon d'observer que ce rapport n'a pas la même signification au premier point qu'au second; car la vîtesse de la première tranche fluide, dans le sens de la longueur du tube, étant $+v$, et la quantité k étant positive, il suit de ce rapport que cette tranche éprouvera une condensation, lorsqu'elle sera poussée en dedans du tube, et une dilatation quand elle sera poussée en dehors. Ce serait le contraire, dans l'hypothèse du nº 12, si l'on supprimait la cause quelconque qui agit sur cette tranche, et que l'on abandonnât le fluide à lui-même; on aurait alors en ce point $as=-kv$, le

coëfficient k étant le même qu'à l'autre bout du tube. Or, il est aisé de vérifier que, de cette manière, le mouvement du fluide décroîtrait continuellement et finirait par s'anéantir.

En effet, en faisant $x=0$, dans les équations (8), et ensuite $as=-kv$, on en déduit

$$F(2l+at)=\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 F(at);$$

posant donc, comme plus haut,

$$at=2il+z, \quad \frac{k-1}{1+k}=b;$$

cette équation devient

$$F\left(2(i+1)l+z\right)=b^2 F(2il+z);$$

et l'on en conclut

$$F\left(2(i+1)l+z\right)=b^{2+2i}Fz;$$

résultat qui montre que les valeurs de la fonction F, et par suite les valeurs de v et de s données par les équations (8), forment des progressions géométriques décroissantes, dont le rapport est b, le temps croissant par différences constantes et égales à $\frac{2l}{a}$.

(22) Pour second exemple, supposons que la première tranche fluide exécute chaque vibration dans un intervalle de temps égal à $\frac{4l}{a}$; de manière que φt reprenne la même valeur et le même signe, toutes les fois que t augmente de cette quantité. Les valeurs de cette fonction qui entrent dans le second membre de l'équation (9), seront toutes égales à $\varphi\left(\frac{z}{a}\right)$, ou à $\varphi\left(\frac{2l+z}{a}\right)$; et l'on trouvera facilement que

cette équation devient

$$F\left(2(i+1)\,l+z\right)=b^{i+1}\,Fz-\frac{(1-b^{i+1})\,bp}{1-b}-\frac{(-1)^i\,(1-(-b)^{i+1})\,bq}{1+b};$$

en faisant, pour abréger,

$$\varphi\left(\frac{z}{a}\right)+\varphi\left(\frac{2\,l+z}{a}\right)=2p,\quad \varphi\left(\frac{z}{a}\right)-\varphi\left(\frac{2\,l+z}{a}\right)=2q.$$

Lorsque i sera devenu un très-grand nombre, on pourra supprimer les termes qui contiennent la puissance i de b; le mouvement sera alors indépendant de l'état initial du fluide; et, en remettant pour b sa valeur, on aura simplement

$$F\left(2(i+1)\,l+z\right)=\frac{(1-k)p}{2}+\frac{(-1)^i\,(1-k)\,q}{2k}.$$

Les valeurs de la fonction F, données par cette équation, redeviendront les mêmes toutes les fois que i augmentera de deux unités, c'est-à-dire lorsque at augmentera de $4l$, ou t de $\frac{4l}{a}$; en vertu des équations (8), les valeurs de v et de s suivent les mêmes lois que celles de cette fonction; le fluide fera donc, comme sa première tranche, des oscillations isochrones dont la durée sera égale à $\frac{4l}{a}$. Mais ce mouvement ne sera conforme à l'hypothèse du n° 2, qu'autant que l'une ou l'autre des quantités p et q sera égale à zéro : la première, dans le cas du tube fermé à l'extrémité du tube qui répond à $x=l$, et la seconde, dans le cas du tube ouvert; car, sans cela, les valeurs de la fonction F, et par suite celles de v et de s deviendraient extrêmement grandes, à cause de la quantité k que nous supposons très-grande dans le premier cas, et très-petite dans le second (n° 18).

On fera donc $q=0$, dans le cas du tube ouvert; ce qui

donne $\varphi\left(\frac{2l+z}{a}\right)=\varphi\left(\frac{z}{a}\right)$: la durée des oscillations se trouvera alors réduite à moitié, ou à $\frac{2l}{a}$, et l'on retombera dans l'analyse du n° 20.

Dans le cas du tube fermé, nous ferons $p=0$; nous aurons alors $\varphi\left(\frac{2l+z}{a}\right)=-\varphi\left(\frac{z}{a}\right)$; la durée des oscillations restera égale à $\frac{4l}{a}$; mais l'allée et le retour, dans chaque vibration, se feront par des mouvemens semblables; circonstance qui n'a pas nécessairement lieu dans le cas du tube ouvert. Il en résulte, comme il est aisé de le concevoir, que, dans le tube fermé, chaque oscillation ne peut se partager qu'en un nombre impair de vibrations égales, dans lesquelles l'allée et le retour se font aussi par des mouvemens semblables. Ce nombre étant représenté par $2n+1$, la durée des vibrations se trouvera réduite à $\frac{4l}{(2n+1)a}$; et l'on fera voir, au moyen des équations (8), que la colonne fluide se divise, dans ce cas, en un pareil nombre $2n+1$ de parties égales et semblables, qui sont terminées alternativement par des ventres et des nœuds de vibrations.

(23) Nous pourrions pousser plus loin ces hypothèses particulières, sur la nature de la fonction φ; mais, pour parvenir à un résultat général, nous supposerons maintenant que la première tranche fluide fasse des vibrations simples, d'une durée quelconque; et, pour cela, nous prendrons

$$\varphi t=h\,sin.\frac{2\pi at}{\lambda};$$

h étant une constante qui exprime une vîtesse très-petite par rapport à a; λ une autre constante quelconque, et π le rap-

port de la circonférence au diamètre. La durée de chaque vibration sera égale à $\frac{\lambda}{a}$; de sorte que λ exprimera l'espace parcouru par le son, en vertu de la vîtesse a, pendant cette durée.

Lorsque i sera devenu un nombre très-grand, on pourra, sans erreur sensible, prolonger jusqu'à l'infini la série que renferme le second membre de l'équation (9), au lieu de l'arrêter à la puissance $i+1$ de la fraction b; si l'on supprime, de plus, le terme qui contient Fz, et qui a pour facteur cette même puissance de b, on aura, en remettant at à la place de $2il+z$,

$$F(at+2l)=-hb\left(\sin.\frac{2\pi at}{\lambda}+b\sin.\frac{2\pi(at-2l)}{\lambda}\right.$$
$$\left.+b^2\sin.\frac{2\pi(at-4l)}{\lambda}+\text{etc.}\right);$$

et en sommant cette série convergente par les procédés connus, il vient

$$F(at+2l)=\frac{-hb\left(\sin.\frac{2\pi at}{\lambda}-b\sin.\frac{2\pi(at+2l)}{\lambda}\right)}{1-2b\cos.\frac{4\pi l}{\lambda}+b^2}. \quad (11)$$

Nous voyons d'abord, par ce résultat, que les valeurs de la fonction F seront périodiques comme celles de la fonction φ; en vertu des équations (8), il en sera de même des valeurs de v et de s; de manière que le fluide fera aussi des oscillations isochrones, dont la durée sera égale à $\frac{\lambda}{a}$. De plus, ces valeurs de la fonction F, de v et de s demeureront toujours très-petites, comme la constante h, excepté lorsque le dénominateur $1-2b\cos.\frac{4\pi l}{\lambda}+b^2$ sera aussi très-petit ; or, s'il s'agit d'un tube fermé, la quantité k est très-grande, et

b diffère très-peu de l'unité; s'il s'agit d'un tube ouvert, k est supposée très-petite; et l'on a, à très-peu-près, $b = -1$ (n° 18); ce dénominateur est donc à très-peu-près égal à $4 \sin.^2 \frac{2\pi l}{\lambda}$, dans le premier cas, et à $4 \cos.^2 \frac{2\pi l}{\lambda}$, dans le second; donc il devient très-petit, dans le cas du tube fermé, quand la quantité λ est égale à $\frac{2l}{n+1}$, ou qu'elle en diffère très-peu; et, dans le cas du tube ouvert, lorsqu'on a exactement, ou à très-peu-près, $\lambda = \frac{4l}{2n+1}$; n désignant, dans les deux cas, un nombre entier, ou zéro. Ainsi, dans un tube ouvert, de longueur l, le fluide ne peut pas faire de vibrations sonores dont la durée soit égale à $\frac{4l}{(2n+1)a}$, ou en diffère très-peu; et dans un tube fermé de même longueur, cette durée ne peut pas être égale à $\frac{2l}{(n+1)a}$, ou peu différente d'une telle quantité.

(24) Ces résultats s'accordent avec ceux des n[os] 20 et 22; mais nous voyons, en outre, que toute autre espèce de vibrations sonores est possible, soit que le tube soit ouvert, ou qu'il soit fermé, puisque les valeurs de λ que nous venons d'exclure, sont les seules pour lesquelles les quantités v et s cessent d'être très-petites. Il n'est donc pas contraire aux lois du mouvement des fluides élastiques, que, dans un tube ouvert de longueur l, la durée des vibrations soit plus grande que $\frac{2l}{a}$, et qu'elle surpasse $\frac{4l}{a}$ dans un tube fermé de même longueur; par conséquent, le ton rendu par un tuyau de l'une ou l'autre espèce peut être au-dessous de celui qui répond à ces limites, que la théorie ordinaire avait fixées (n[os] 8

et 10). L'expérience montre, en effet, que les instrumens à vent, sur-tout ceux dont la longueur est peu considérable, font entendre des tons plus graves que le ton fondamental, calculé d'après la théorie admise jusqu'ici; ce qui tient à ce que cette théorie est fondée sur des suppositions trop restreintes, qui n'ont pas toujours lieu dans la pratique, et dont nous nous sommes affranchis dans les n^{os} précédens.

La conclusion générale qui se déduit de notre analyse, est qu'on ne saurait déterminer *à priori* la série des tons différens, ni même fixer le ton le plus grave que peut rendre un tube sonore, ouvert ou fermé, d'après sa longueur et la nature du fluide qu'il contient; mais qu'on peut seulement assigner certaines classes de tons, qui sont impossibles, et qu'en effet l'observation n'a jamais présentés. Heureusement, l'analyse conduit, sur un autre point, à des résultats précis et positifs, qui peuvent être comparés à l'expérience; nous voulons parler du nombre et de la position des ventres et des nœuds de vibrations, qui sont liés, comme on va le voir, au ton qu'on observe dans chaque cas particulier.

(25) Dans la détermination de ces points, nous supposerons, pour simplifier, qu'on a exactement $b=-1$, ou $b=+1$, selon que le tube est ouvert ou fermé; ce qui n'aura pas d'influence sensible sur leur position, si la quantité k est, ou presque nulle, ou presque infinie, comme nous l'avons expliqué précédemment (n° 18).

En faisant $b=+1$, l'équation (11) se réduit à

$$F(at+2l)=\frac{h\, sin.\, \frac{2\pi(at+l)}{\lambda}}{2\, cos.\, \frac{2\pi l}{\lambda}};$$

et si l'on fait en même temps $k=-1$ dans les équations (8), et qu'on en élimine la fonction F, elles deviennent

$$v=\frac{h\cos.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}\cdot\sin.\frac{2\pi at}{\lambda}}{\cos.\frac{2\pi l}{\lambda}},$$

$$as=\frac{h\sin.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}\cdot\cos.\frac{2\pi at}{\lambda}}{\cos.\frac{2\pi l}{\lambda}}.$$

On déterminera donc les nœuds de vibrations, où la vîtesse est constamment nulle, en posant

$$\cos.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}=0,\quad \text{ou } l-x=\frac{(2i+1)\lambda}{4};$$

et les points qu'on appelle ventres, où la condensation est toujours égale à zéro, en faisant

$$\sin.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}=0,\quad \text{ou } l-x=\frac{i\lambda}{2};$$

i désignant, dans les deux cas, un nombre entier ou zéro.

L'extrémité du tube correspondante à $x=l$, est au nombre de ces derniers points; ce qui tient à ce que la condensation en ce point où le tube est ouvert, est proportionnelle à la quantité k que nous avons négligée et traitée comme nulle. Ce même point serait aussi un nœud de vibrations, ce qui serait absurde, si λ était un sous-multiple impair de $4l$; mais alors la durée des oscillations serait le même sous-multiple de $\frac{4l}{a}$, et l'on vient de voir (n° 23) que cette espèce de mouvement est inadmissible dans le cas du tube ouvert : effectivement, les valeurs de v et de s, relatives à d'autres points,

deviendraient infinies, à raison du dénominateur $\cos. \frac{2\pi l}{\lambda}$, qu'une telle valeur de λ rendrait nul.

Les valeurs de $l-x$ qui appartiennent à des ventres ou à des nœuds de vibrations, et qui expriment leurs distances à l'extrémité ouverte du tube, peuvent être comprises dans une seule formule, savoir :

$$l-x=\frac{i\lambda}{4};$$

i désignant toujours un nombre entier, pair ou impair. Les nombres pairs répondront à des ventres, les nombres impairs à des nœuds de vibrations : les points de l'une et l'autre espèce se succéderont alternativement; ils seront équidistans, et l'intervalle compris entre deux points consécutifs sera égal à $\frac{1}{4}\lambda$, c'est-à-dire au quart de l'espace parcouru par le son, pendant la durée d'une vibration du fluide. Comme la quantité $l-x$ ne doit jamais surpasser la longueur entière du tube, il en résulte que si λ surpasse $4l$, il n'y aura ni ventres ni nœuds de vibrations, le bout du tube excepté : si λ est compris entre $4l$ et $2l$, il y aura un nœud; si cette quantité est comprise entre $2l$ et $\frac{4l}{3}$, il y aura un nœud et un ventre; si elle est comprise entre $\frac{4l}{3}$ et l, il y aura un second nœud; et ainsi de suite. Celui de ces points qui sera le plus voisin de l'extrémité du tube qui répond à $x=0$, et qui représente son embouchure, pourra être un ventre ou un nœud; dans tous les cas, sa distance à cette extrémité sera moindre que $\frac{1}{2}\lambda$.

Il est à remarquer que toutes les fois que λ sera égale à $2l$, ou à un sous-multiple de $2l$, ce bout du tube sera un

ventre, ou, plus rigoureusement, la condensation du fluide y sera proportionnelle à la quantité k que nous avons négligée; résultat qui s'accorde avec celui du n° 20, puisque la durée des vibrations est alors un sous-multiple de $\frac{2l}{a}$. Pour toute autre espèce de vibrations, la condensation ne sera pas nulle en ce point; si donc on supposait que la densité du fluide y dût être invariable, on restreindrait par-là tous les tons que le tube peut rendre, à ceux qui répondent aux durées de vibrations comprises dans la série : $\frac{2l}{a}$, $\frac{2l}{2a}$, $\frac{2l}{3a}$, $\frac{2l}{4a}$, etc. Mais, ainsi que nous l'avons dit plus haut (n° 13), on ne saurait établir *à priori* la nécessité d'une telle condition; et l'expérience donnant des tons qui sortent de cette série, cela prouve qu'en effet cette condition n'est pas toujours remplie.

Enfin, en comparant la vîtesse du fluide à l'extrémité ouverte du tube, à la vîtesse de la première tranche, c'est-à-dire les valeurs de v qui répondent à $x=l$ et $x=0$, on voit que la première est à la seconde comme l'unité est à $\cos. \frac{2\pi l}{\lambda}$. Ces deux vîtesses sont donc égales, abstraction faite du signe, toutes les fois que λ est un sous-multiple de $2l$; alors le tube transmet à l'air extérieur, les vibrations imprimées à la première tranche fluide, sans en changer l'amplitude; mais dans tout autre cas, le tube augmente cette amplitude, et, par conséquent, l'intensité du son. Ce résultat est analogue au phénomène que présente le *porte-voix*, et il pourra servir à en donner l'explication.

(26) Pour passer du tube ouvert au tube fermé, nous emploierons la même considération que dans le n° 10. Nous re-

44.

marquerons donc que la vîtesse du fluide étant nulle ou insensible dans les nœuds de vibrations, il en résulte que si l'on place une cloison fixe en l'un de ces points, sans rien changer à la manière de souffler dans l'instrument, on ne changera rien non plus au mouvement du fluide dans la partie comprise depuis cette cloison jusqu'à l'embouchure. Si donc on retranche de la longueur du tube que nous avons considéré dans le n° précédent, à partir de son extrémité ouverte, un multiple impair quelconque de $\frac{1}{4}\lambda$, la partie restante pourra former un tube bouché, dans lequel la durée des vibrations du fluide sera toujours égale à $\frac{\lambda}{a}$: les intervalles des ventres et des nœuds consécutifs n'auront pas changé; les distances des nœuds à l'extrémité bouchée, seront exprimées par les multiples pairs de $\frac{1}{4}\lambda$, et celles des ventres, par les multiples impairs.

La longueur du nouveau tube sera égale à $l-\frac{1}{4}(2i+1)\lambda$, i étant un nombre entier ou zéro; en mettant donc $l+\frac{1}{4}(2i+1)\lambda$ à la place de l, dans les valeurs de v et de s du n° précédent, on aura les expressions de ces quantités qui se rapportent à un tube fermé de longueur l, et à des vibrations dont la durée est égale à $\frac{\lambda}{a}\cdot$ Cette substitution donne

$$v=-\frac{h\,sin.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}\,sin.\frac{2\pi at}{\lambda}}{sin.\frac{2\pi l}{\lambda}},$$

$$as=-\frac{h\,cos.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}\,sin.\frac{2\pi at}{\lambda}}{sin.\frac{2\pi l}{\lambda}}.$$

On voit que ces valeurs deviendraient infinies, si λ était un sous-multiple impair de $2l$; une telle valeur de cette quantité est donc inadmissible; et, en effet, la durée des vibrations du fluide serait le même sous-multiple de $\frac{2l}{a}$; ce qui est impossible dans le cas du tube fermé (n° 23).

Afin de vérifier ces formules et de les obtenir directement, je fais, dans les équations (11) et (8), $b=1$ et $k=\infty$, comme il convient dans le cas du tube bouché (n° 18) : la première se réduit à

$$F(at+2l)=\frac{h\cos.\frac{2\pi(at+l)}{\lambda}}{2\sin.\frac{2\pi l}{\lambda}};$$

les équations (8) deviennent

$$v=-F(2l-x+at)+F(at+x),$$
$$as=-F(2l-x+at)-F(at+x);$$

et en en chassant la fonction F au moyen de l'équation précédente, on obtient exactement les valeurs de v et de s qu'on voulait vérifier.

(27) Maintenant voyons comment on pourra déterminer par l'expérience, le lieu de chaque nœud de vibrations, et reconnaître si elle s'accorde sur ce point avec la théorie.

Pour cela, imaginons un tube sonore, bouché par un piston qui le ferme exactement, et qui puisse glisser dans son intérieur; de manière qu'il soit aisé de raccourcir le tube sans rien changer à l'embouchure ni à la manière de souffler. En comparant le ton rendu par ce tuyau à celui d'une corde vibrante à son unisson, on connaîtra la durée d'une vibration du fluide, qui sera la même que celle d'une oscil-

lation de la corde, l'allée et le retour compris. En effet, pour une corde donnée, on connaît le nombre de vibrations qui répond à chaque note de la gamme; et de ce nombre, on conclut sans peine la durée de chaque vibration. Désignant donc cette durée par ω, et par a la vîtesse du son dans le fluide qui remplit le tube, notre quantité λ sera égale à $a\,\omega$. Si elle surpasse le double de la longueur du tube, il n'y aura aucun nœud de vibrations; en sorte qu'en enfonçant graduellement le piston pour raccourcir le tuyau, le ton changera, et le ton primitif ne pourra pas se reproduire. Si, au contraire, $\frac{1}{2}\lambda$ est moindre que la longueur du tube, il arrivera, en enfonçant le piston, un certain point où le ton se trouvera identique avec le ton primitif : on en conclura qu'on est alors parvenu à un nœud de vibrations; et si la théorie est exacte, la quantité dont le tube aura été diminuée, devra être égale à $\frac{1}{2}\lambda$. Si $\frac{1}{2}\lambda$ est encore moindre que la longueur du nouveau tube, en continuant d'enfoncer le piston, on retrouvera un second nœud dont on sera averti par le ton primitif qui s'y reproduira; et ainsi de suite, jusqu'à ce que la partie du tube qui reste comprise entre le piston et l'embouchure, soit devenue plus courte que $\frac{1}{2}\lambda$. Or, l'expérience que nous décrivons d'une manière succincte, est précisément celle qu'a faite D. Bernouilli (*), et dont il a trouvé les résultats parfaitement d'accord avec la théorie, telle que nous la présentons. On pourrait aussi, mais un peu moins facilement, vérifier la position des points qu'on appelle ventres; car, par leur nature, si l'on coupe le tube en l'un de ces points, et qu'on

(*) Acad. des Sciences de Paris, année 1762.

le laisse ouvert, le ton de l'instrument ne sera pas changé, pourvu que l'embouchure et la manière de souffler soient restées les mêmes.

Il serait à desirer que cette ingénieuse expérience de D. Bernouilli fût répétée sur des tuyaux remplis de différens gaz, substitués à l'air atmosphérique. Ce serait le seul moyen exact de connaître la vîtesse du son dans ces fluides, laquelle s'obtiendrait en mesurant l'intervalle compris entre deux nœuds de vibrations consécutifs, et le divisant par la durée d'une demi-vibration, conclue du ton rendu par le tuyau. En la comparant à son expression analytique, donnée par la théorie du son, on déterminerait, comme je l'ai fait pour l'air atmosphérique (*), l'augmentation de température produite par la compression des différens gaz; et quoiqu'il paraisse singulier de faire servir la gamme à cet usage, le moyen dont nous parlons est cependant le plus propre à comparer ce développement de chaleur dans les gaz de nature diverse, et à en donner la mesure approchée. On pourrait même, en répétant l'expérience à différens degrés du thermomètre, reconnaître si la température primitive de chaque fluide influe sur la quantité de chaleur développée par la compression.

(28) Nous terminerons ce paragraphe en examinant ce qui arriverait dans le cas d'un tuyau ouvert par une extrémité, si l'on supposait la condensation rigoureusement nulle en ce point, tandis qu'on agirait d'une manière continue à son autre extrémité, pour imprimer sans cesse de nouvelles vîtesses à la tranche fluide qui s'y trouve située.

(*) Journal de l'École polytechnique, 14e cahier, pag. 363.

Pour cela, reprenons l'équation (9), où nous ferons $k=0$, ce qui donne $b=-1$; de plus, supposons qu'à l'origine du mouvement, le fluide était en repos, et n'éprouvait aucune condensation dans toute sa longueur : dans cette hypothèse, nous aurons, en vertu des équations (8), $Fx=0$ et $F(2l-x)=0$, depuis $x=0$ jusqu'à $x=l$; d'où il résulte $Fz=0$, depuis $z=0$ jusqu'à $z=2l$; et l'équation (9) deviendra, en conséquence,

$$F\left(2(i+1)l+z\right)=\varphi\left(\frac{2il+z}{a}\right)-\varphi\left(\frac{2(i-1)l+z}{a}\right)+\varphi\left(\frac{2(i-2)l+z}{a}\right)$$
$$-\varphi\left(\frac{2(i-3)l+z}{a}\right)+\ldots\ldots+(-1)^i\varphi\left(\frac{z}{a}\right).$$

Nous nous bornerons, pour abréger, à considérer la vîtesse du fluide à l'extrémité du tube opposée à l'embouchure. Faisant donc $k=0$ et $x=l$, dans la première équation (8), nous aurons

$$v=2F(at+l);$$

où l'on voit d'abord que cette vîtesse est nulle depuis $t=0$ jusqu'à $t=\frac{l}{a}$; ce qui est, en effet, l'intervalle de temps nécessaire pour que le premier ébranlement du fluide se propage d'un bout à l'autre du tube. Si l'on suppose que le temps soit devenu plus grand que $\frac{l}{a}$, et que l'on mette $t+\frac{l}{a}$ à la place de t, on aura

$$v=2F(at+2l)=2F\left(2(i+1)l+z\right);$$

par conséquent, la vîtesse v, à partir de l'instant où elle cesse d'être nulle, sera exprimée par le double de la valeur précédente de la fonction F. Ainsi, le temps t étant compté

de l'instant où la dernière tranche fluide commence à s'ébranler, et i représentant toujours le plus grand multiple de $2l$ contenu dans at, nous aurons

$$v=2\left\{\varphi t-\varphi\left(\frac{at-2l}{a}\right)+\varphi\left(\frac{at-4l}{a}\right)\right.$$
$$\left.-\varphi\left(\frac{at-6l}{a}\right)+\ldots\ldots+(-1)^i\varphi\left(\frac{at-2il}{a}\right)\right\}.$$

Cette expression de v montre que les ondes sonores qui partent de l'embouchure du tube, vont s'ajouter ou se détruire à l'autre extrémité; en sorte qu'il en peut résulter au dehors, au lieu d'un son continu, des intervalles alternatifs de bruit et de silence. Supposons, par exemple, que la première tranche fluide fasse des oscillations égales et isochrones dont la durée soit $\frac{2l}{a}$; toutes les valeurs de la fonction φ, qui entrent dans l'équation précédente, seront égales entre elles; et l'on aura simplement

$$v=\left(1+(-1)^i\right)\varphi t;$$

c'est-à-dire, $v=2\varphi t$, depuis $t=0$ jusqu'à $t=\frac{2l}{a}$, $t=\frac{4l}{a}$ jusqu'à $t=\frac{6l}{a}$, $t=\frac{8l}{a}$ jusqu'à $t=\frac{10l}{a}$, etc.; et $v=0$, depuis $t=\frac{2l}{a}$ jusqu'à $t=\frac{4l}{a}$, $t=\frac{6l}{a}$ jusqu'à $t=\frac{8l}{a}$, etc. Ces alternatives de mouvement et de repos de la dernière tranche fluide se répéteraient dans l'air extérieur avec lequel cette tranche communique; et elles pourraient être senties par l'organe de l'ouïe, si elles avaient effectivement lieu.

On parviendra à d'autres résultats également singuliers, en faisant d'autres hypothèses sur la loi des vibrations de la

première tranche fluide. Leur durée étant toujours égale à $\frac{2l}{a}$, on pourrait néanmoins obtenir un mouvement continu à l'extrémité opposée du tube : il suffirait de supposer les amplitudes de toutes les vibrations de la première tranche égales entre elles, excepté celle de la première vibration que l'on réduirait à moitié. On aurait alors $\varphi t = \varphi\left(\frac{at - 2nl}{a}\right)$, lorsque n serait un nombre entier moindre que le plus grand multiple de $2l$, contenu dans at; et $\varphi t = 2\varphi\left(\frac{at - 2nl}{a}\right)$, quand n serait ce plus grand multiple; au moyen de quoi la valeur précédente de v se réduirait à $v = \varphi t$; de sorte qu'elle serait la même que la vitesse imprimée à la première tranche fluide. Mais nous ne nous arrêterons pas davantage à l'examen de ces diverses circonstances, qui ne peuvent se rencontrer dans la pratique, où l'on doit toujours admettre aux extrémités ouvertes des tubes sonores, des degrés de condensation quelque petits qu'ils soient, comme nous l'avons expliqué dans le n° 12.

§ III.

Mouvement d'un fluide élastique contenu dans un tuyau composé de plusieurs cylindres.

(29) Le tube qui renferme le fluide est composé de deux cylindres de différens diamètres, qui ont leurs axes dans le prolongement l'un de l'autre. Le cylindre du plus petit diamètre est adapté à une ouverture faite à la base de l'autre cylindre, et ne pénètre pas dans l'intérieur de celui-ci. On suppose, comme précédemment, que les tranches fluides perpendiculaires à l'axe du tube, se meuvent parallèlement à elles-mêmes, et que les molécules qui les composent, n'ont

pas de mouvement dans leurs plans. A la vérité, ce parallélisme des tranches ne saurait avoir lieu rigoureusement à la jonction des deux cylindres; mais on fait abstraction de l'espèce d'entonnoir qui devra se former en ce point, et qui aura très-peu d'influence sur les oscillations du fluide entier, du moins lorsque les longueurs des deux cylindres seront beaucoup plus grandes que la différence entre leurs diamètres.

Nous rapporterons les distances x des tranches fluides, dans les deux cylindres, à une même extrémité du tube; nous appellerons *premier* cylindre, celui auquel appartient cette extrémité, et nous désignerons sa longueur par l: l'autre s'appellera *second* cylindre; sa longueur sera l', et le rapport de sa base à celle du premier cylindre sera désigné par c. On représentera par v et s dans le premier cylindre, et par v' et s' dans le second, la vîtesse et la condensation de la tranche fluide qui répond à la distance x au bout du temps t, lequel sera compté de l'origine du mouvement. Enfin a désignera la vîtesse du son dans le fluide qui remplit les deux cylindres, et l'on fera $at=y$. Comme dans le nº 2, les vîtesses v et v' seront supposées très-petites par rapport à a, et les condensations s et s', de très-petites fractions.

Cela posé, nous aurons

$$v=f(x-y)+F(x+y),$$

$$as=f(x-y)-F(x+y),$$

$$v'=f'(x-y)+F'(x+y),$$

$$as'=f'(x-y)-F'(x+y);$$

f, F, f' et F$'$ indiquant des fonctions arbitraires.

Ces quatre fonctions sont liées entre elles par deux équations nécessaires à la continuité du fluide. En effet, pour qu'elle ne soit pas interrompue en passant d'un cylindre à l'autre, il est aisé de voir qu'à la jonction des deux cylindres, les quantités s et s' doivent être égales, et les vîtesses v et v', en raison inverse de leurs bases ; en faisant $x=l$, qui se rapporte à ce point de jonction, on aura donc $s=s'$ et $v=cv'$; d'où il résulte

$$\left.\begin{aligned} f(l-y)-\mathrm{F}(l+y)&=f'(l-y)-\mathrm{F}'(l+y), \\ f(l-y)+\mathrm{F}(l+y)&=c\left[f'(l-y)+\mathrm{F}'(l+y)\right]; \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

équations qui auront lieu pendant toute la durée du mouvement, ou pour toutes les valeurs positives de la variable y.

La détermination complète du mouvement du fluide dans les deux cylindres, se réduit donc à trouver les valeurs des fonctions f, F, f', F', d'après ces deux équations, l'état initial du fluide, et ce qu'on supposera avoir lieu aux deux extrémités du tube.

(30) Avant de nous en occuper, nous ferons observer que, quel que soit le mouvement du fluide dans le premier cylindre, si la longueur du second est supposée infinie, de manière que les ébranlemens qui s'y propagent ne puissent pas revenir sur eux-mêmes, il s'établira au point de jonction des deux cylindres, un rapport constant entre la vîtesse et la condensation du fluide; ce qui vient à l'appui de la supposition générale que nous avons faite précédemment (n° 12).

En effet, supposons la vîtesse et la condensation initiales du fluide, nulles dans toute la longueur du second cylindre; en sorte qu'on ait $v'=0$, $s'=0$, quand $y=0$, et par consé-

quent $f'x=0$, $F'x=0$, pour toutes les valeurs de x plus grandes que l. Comme la variable y est toujours positive, il en résulte qu'on aura constamment $F'(l+y)=0$; les équations (12) se réduiront donc à

$$f(l-y)-F(l+y)=f'(l-y),$$
$$f(l-y)+F(l+y)=cf'(l-y);$$

leurs premiers membres sont les valeurs de as et de v qui répondent à $x=l$; on aura donc, à l'extrémité du premier cylindre, l'équation $v=cas$, qui renferme le rapport qu'on voulait démontrer. Dans ce cas, la quantité que nous avons désignée par k dans le n° 18, serait égale à $\frac{1}{c}$; et ce serait cette valeur qu'il faudrait lui attribuer, si l'on voulait déterminer, par l'analyse du n° 19, le mouvement du fluide dans le premier cylindre.

Si la base du second cylindre était infinie, la condensation serait nulle à l'extrémité du premier; mais ce résultat tient à l'hypothèse du parallélisme des tranches hors du premier cylindre ; et l'on n'en doit rien conclure contre la supposition du n° 12, relativement à un tube qui s'ouvre dans l'air libre.

(31) Rendons maintenant au second cylindre une longueur finie, et représentée par l'; et supposons qu'on ait, à l'extrémité du tube qui répond à $x=l+l'$, l'équation $as'=kv'$, entre la condensation et la vîtesse du fluide; k étant une constante positive, qui sera très-grande, si le tube est fermé en ce point, et qu'on regardera comme très-petite, s'il s'agit d'un tube ouvert (n° 18). Cette équation deviendra, en y substituant pour v' et as' leurs valeurs,

$$f'(l+l'-y)-F'(l+l'+y)=k\left(f'(l+l'-y)+F'(l+l'+y)\right):$$

comme elle a lieu pour toutes les valeurs positives de y, on y peut mettre $y+l'$ à la place de y; et alors on en déduit

$$f'(l-y)=\frac{1+k}{1-k}F'(l+2l'+y).$$

D'ailleurs, les équations (12) donnent

$$\left.\begin{aligned}2cf'(l-y)&=(1+c)f(l-y)+(1-c)F(l+y),\\ 2cF'(l+y)&=(1-c)f(l-y)+(1+c)F(l+y);\end{aligned}\right\}(13)$$

mettant donc $y+2l'$ à la place de y dans la seconde, et éliminant ensuite les fonctions f' et F', entre ces deux équations et la précédente, il vient

$$\left.\begin{aligned}(1+c)(1-k)f(l-y)-(1-c)(1+k)f(l-2l'-y)&=\\ (1+c)(1+k)F(l+2l'+y)-(1-c)(1-k)F(l+y).&\end{aligned}\right\}(14)$$

Représentons par φt la vîtesse de la première tranche fluide, que nous regardons comme donnée arbitrairement pendant toute la durée du mouvement; cette tranche étant celle qui répond à $x=0$, nous aurons

$$f(-y)+Fy=\varphi t.$$

Substituant $y+2l'$ à la place de y, ou $t+\frac{2l'}{a}$ à la place de t, ce qui est permis, on aura

$$f(-y-2l')+F(y+2l')=\varphi\left(\frac{at+2l'}{a}\right);$$

et si l'on met de même $y+l$ à la place de y dans l'équation (14), on pourra ensuite éliminer $f(-y)$ et $f(-y-2l')$,

entre cette équation et les deux dernières. De cette manière, on trouve

$$\left.\begin{aligned}(1+c)(1+k)\,\mathrm{F}(y+2l+2l')-(1-c)(1-k)\,\mathrm{F}(y+2l)\\ -(1-c)(1+k)\,\mathrm{F}(y+2l')+(1+c)(1-k)\,\mathrm{F}y=\\ (1+c)(1-k)\varphi t-(1-c)(1+k)\,\varphi\left(\frac{at+2l'}{a}\right);\end{aligned}\right\}(15)$$

équation qui devra servir à déterminer la fonction F. Quand elle sera connue, l'une des équations précédentes fera connaître la fonction f; ensuite les équations (13) détermineront les fonctions f' et F'; et le problème sera complètement résolu.

Cette analyse s'appliquerait également au cas d'un tube composé de plus de deux cylindres; elle conduirait à une équation finale de la même nature que celle-ci, mais beaucoup plus compliquée.

(32) Au bout d'un certain temps, le mouvement du fluide devient indépendant de son état initial, et ne dépend plus que des vibrations de la première tranche. C'est à cette époque qu'il importe de le déterminer, afin de connaître, s'il est possible, les différens modes de vibrations qu'un même tube peut admettre, et la position des ventres et des nœuds qui répondent à un ton donné.

Pour y parvenir, supposons qu'on ait, comme dans le nº 23,

$$\varphi t = h\,\sin.\frac{2\pi at}{\lambda};$$

en sorte que h soit une constante très-petite par rapport à a, λ une autre constante quelconque, π le rapport de la cir-

conférence au diamètre, et $\frac{\lambda}{a}$, la durée d'une vibration de la première tranche fluide, dont φt exprime la vîtesse. Soit, en même temps,

$$Fy = A\,sin.\,\frac{2\pi at}{\lambda} + B\,cos.\,\frac{2\pi at}{\lambda},$$

la partie de la valeur de Fy, qui répond à cette valeur de φt; A et B désignant des constantes indéterminées. En substituant ces valeurs de φt et Fy, dans les deux membres de l'équation (15), et égalant de part et d'autre les coëfficiens de $sin.\,\frac{2\pi(at+l+l')}{\lambda}$, et ceux de $cos.\,\frac{2\pi(at+l+l')}{\lambda}$, on formera deux équations qui serviront à déterminer A et B, savoir:

$$2A\left((1+c)cos.\,\frac{2\pi(l+l')}{\lambda} - (1-c)\,cos.\,\frac{2\pi(l-l')}{\lambda}\right)$$

$$-2Bk\left((1+c)\,sin.\,\frac{2\pi(l+l')}{\lambda} + (1-c)\,sin.\,\frac{2\pi(l-l')}{\lambda}\right) =$$

$$h\left((1+c)(1-k)\,cos.\,\frac{2\pi(l+l')}{\lambda} - (1-c)(1+k)\,cos.\,\frac{2\pi(l-l')}{\lambda}\right),$$

$$2Ak\left((1+c)\,sin.\,\frac{2\pi(l+l')}{\lambda} + (1-c)\,sin.\,\frac{2\pi(l-l')}{\lambda}\right)$$

$$+2B\left((1+c)\,cos.\,\frac{2\pi(l+l')}{\lambda} - (1-c)\,cos.\,\frac{2\pi(l-l')}{\lambda}\right) =$$

$$-h\left((1+c)(1-k)\,sin.\,\frac{2\pi(l+l')}{\lambda} - (1-c)(1+k)\,sin.\,\frac{2\pi(l-l')}{\lambda}\right).$$

Si le tube est ouvert à l'extrémité qui répond à $x = l + l'$, la quantité k sera regardée comme très-petite; et en négligeant les termes qui la contiennent, ces deux équations deviennent

$$A=\frac{1}{2}h,\ B=\frac{-\frac{h}{2}\left((1+c)\,sin.\frac{2\pi(l+l')}{\lambda}-(1-c)\,sin.\frac{2\pi(l-l')}{\lambda}\right)}{(1+c)\,cos.\frac{2\pi(l+l')}{\lambda}-(1-c)\,cos.\frac{2\pi(l-l')}{\lambda}}.$$

Si le tube est fermé en ce point, il faudra, au contraire, supposer k une très-grande quantité; on négligera, en conséquence, tous les termes de ces équations qui ne la contiennent pas; et l'on aura

$$A=\frac{1}{2}h,\ B=\frac{\frac{h}{2}\left((1+c)\,cos.\frac{2\pi(l+l')}{\lambda}+(1-c)\,cos.\frac{2\pi(l-l')}{\lambda}\right)}{(1+c)\,sin.\frac{2\pi(l+l')}{\lambda}+(1-c)\,sin.\frac{2\pi(l-l')}{\lambda}}.$$

Dans l'un et l'autre cas, les valeurs de la fonction F, et par suite celles des quantités v, s, v', s', seront périodiques : le fluide fera des oscillations égales et isochrones, de même durée que celles de sa première tranche; mais, pour que leur amplitude soit très-petite, il faudra que le dénominateur de la valeur de B ne soit pas nul, ni même très-petit; il faudra donc que l'on n'ait pas, dans le cas du tube ouvert,

$$(1+c)\,cos.\frac{2\pi(l+l')}{\lambda}-(1-c)\,cos.\frac{2\pi(l-l')}{\lambda}=0,$$

et, dans le cas du tube fermé,

$$(1+c)\,sin.\frac{2\pi(l+l')}{\lambda}+(1-c)\,sin.\frac{\alpha\pi(l-l')}{\lambda}=0.$$

Les valeurs de λ tirées de ces équations, ou celles qui en diffèrent très-peu, sont les seules qui doivent être exclues. On ne peut donc pas, d'après les dimensions des deux parties du tube, et la nature du fluide qu'il contient, détermi-

ner toutes les lois possibles des vibrations sonores, ni fixer les limites des plus lentes, ou le ton le plus bas que l'instrument puisse rendre : on peut seulement exclure certaines lois de vibrations qui sont impossibles, quelle que soit la manière de souffler; mais quand le ton est donné par l'observation, il est facile de calculer la position des ventres et des nœuds de vibrations sur les deux parties du tube; et c'est sur ce seul point que la théorie peut être comparée à l'expérience.

(33) Pour cela, prenons d'abord les expressions de A et B, qui ont lieu dans le cas du tube ouvert, et substituons-les dans la valeur de Fy; nous aurons

$$Fy=\frac{h}{2g}\left((1+c)\,sin.\frac{\alpha\pi(at-l-l')}{\lambda}-(1-e)\,sin.\frac{2\pi(at-l+l')}{\lambda}\right),$$

en faisant, pour abréger,

$$(1+c)\,cos.\frac{2\pi(l+l')}{\lambda}-(1-c)\,cos.\frac{2\pi(l-l')}{\lambda}=g.$$

Substituons ensuite cette valeur de Fy, et celle de φt, dans l'équation $f(-y)+Fy=\varphi t$, nous en déduirons

$$f(-y)=\frac{h}{2g}\left((1+c)\,sin.\frac{2\pi(at+l+l')}{\lambda}-(1-c)\,sin.\frac{2\pi(at+l-l')}{\lambda}\right);$$

et si nous mettons $y+l$ et $y-l$ à la place de y, dans ces valeurs de fy et $F(-y)$, nous aurons celles de $F(y+l)$ et $f(l-y)$, au moyen desquelles les équations (13) donnent

$$F'(l+y)=\frac{h}{g}\,sin.\frac{2\pi(at-l')}{\lambda},$$

$$f'(l-y)=\frac{h}{g}\,sin.\frac{2\pi(at+l')}{\lambda}.$$

Il est aisé maintenant de former les valeurs des fonctions qui entrent dans les expressions de v, as, v' et as' du n° 29, et d'obtenir ces quatre quantités : après quelques réductions, on trouve qu'elles deviennent

$$v=\frac{h}{g}\left((1+c)\cos.\frac{2\pi(l+l'-x)}{\lambda}-(1-c)\cos.\frac{2\pi(l-l'-x)}{\lambda}\right)\sin.\frac{2\pi at}{\lambda},$$

$$as=\frac{h}{g}\left((1+c)\sin.\frac{2\pi(l+l'-x)}{\lambda}-(1-c)\sin.\frac{2\pi(l-l'-x)}{\lambda}\right)\cos.\frac{2\pi at}{\lambda},$$

$$v'=\frac{2h}{g}\cos.\frac{2\pi(l+l'-x)}{\lambda}\sin.\frac{2\pi at}{\lambda},$$

$$as'=\frac{2h}{g}\sin.\frac{2\pi(l+l'-x)}{\lambda}\cos.\frac{2\pi at}{\lambda};$$

et l'on devra ne pas oublier que ces valeurs n'ont lieu qu'à partir de l'époque où le mouvement du fluide est devenu régulier et indépendant de son état initial.

Par un calcul semblable, et en employant les valeurs de A et de B qui se rapportent au cas du tube fermé, on obtiendra les expressions de v, as, v' et as', relatives à ce tube et à cette même époque; ce second calcul donne

$$v=\frac{h}{g'}\left((1+c)\sin.\frac{2\pi(l+l'-x)}{\lambda}+(1-c)\sin.\frac{2\pi(l-l'-x)}{\lambda}\right)\sin.\frac{2\pi at}{\lambda},$$

$$as=-\frac{h}{g'}\left((1+c)\cos.\frac{2\pi(l+l'-x)}{\lambda}+(1-c)\cos.\frac{2\pi(l-l'-x)}{\lambda}\right)\cos.\frac{2\pi at}{\lambda},$$

$$v'=\frac{2h}{g'}\sin.\frac{2\pi(l+l'-x)}{\lambda}\sin.\frac{2\pi at}{\lambda},$$

$$as'=-\frac{2h}{g'}\cos.\frac{2\pi(l+l'-x)}{\lambda}\cos.\frac{2\pi at}{\lambda};$$

en faisant, pour abréger,

$$(1+c)\sin.\frac{2\pi(l+l')}{\lambda}+(1-c)\sin.\frac{2\pi(l-l')}{\lambda}=g'.$$

On peut remarquer que ces valeurs se déduisent des précédentes, en ajoutant à l' un multiple impair de $\frac{1}{4}\lambda$; et réciproquement les précédentes se déduisent de celle-ci de la même manière; résultat qui tient à la position des ventres et des nœuds de vibrations sur le second cylindre.

(34) Les valeurs de v' et as' montrent que ces points sont distribués sur cette partie du tube, comme sur un tube ordinaire, d'un même diamètre dans toute sa longueur; ce qui devait être en effet. Quant au premier cylindre, on y déterminera les nœuds de vibrations, dans le cas du tube ouvert, au moyen de l'équation

$$(1+c)\cos.\frac{2\pi(l+l'-x)}{\lambda}-(1-c)\cos.\frac{2\pi(l-l'-x)}{\lambda}=0,$$

qui est la même que

$$c\cos.\frac{2\pi l'}{\lambda}\cos.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}-\sin.\frac{2\pi l'}{\lambda}\sin.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}=0; \quad (16)$$

et les points de condensation nulle, au moyen de celle-ci :

$$(1+c)\sin.\frac{2\pi(l+l'-x)}{\lambda}-(1-c)\sin.\frac{2\pi(l-l'-x)}{\lambda}=0,$$

que l'on peut changer en

$$c\cos.\frac{2\pi l'}{\lambda}\sin.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}+\sin.\frac{2\pi l'}{\lambda}\cos.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}=0. \quad (17)$$

Si l'on désigne par α, la plus petite racine positive de l'équation (16), résolue par rapport à $l-x$, et si l'on fait $l-x=\alpha+6$, cette équation devient

$$\left(c\cos.\frac{2\pi l'}{\lambda}\sin.\frac{2\pi\alpha}{\lambda}+\sin.\frac{2\pi l'}{\lambda}\cos.\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\right)\sin.\frac{2\pi 6}{\lambda}=0,$$

ou simplement $\sin. \frac{2\pi 6}{\lambda} = 0$; d'où l'on tire $6 = \frac{1}{2} i\lambda$, i étant un nombre entier quelconque, ou zéro. Il en résulte que les racines réelles de l'équation (16) sont en nombre infini, et toutes comprises sous la forme :

$$l - x = \alpha + \frac{1}{2} i\lambda.$$

Mais, pour avoir la position des nœuds de vibrations, on ne donnera à i que des valeurs positives, et l'on rejettera, parmi ces racines, toutes celles qui seront plus grandes que l.

Les racines réelles de l'équation (17) seront toutes contenues, comme il est aisé de le voir, dans la formule

$$l - x = \alpha + \frac{1}{4}(2i - 1)\lambda;$$

α étant toujours la plus petite racine positive de l'équation (16), et i un nombre entier quelconque, ou zéro. Pour en conclure la position des ventres, on supposera ce nombre positif, et l'on rejettera toutes les racines plus grandes que l. La quantité α est moindre que $\frac{1}{2}\lambda$; mais elle peut être plus grande que $\frac{1}{4}\lambda$: s'il arrive qu'elle le soit en effet, on comprendra zéro au nombre des valeurs de i, et la plus petite valeur de $l - x$, sera $\alpha - \frac{1}{4}\lambda$; si l'on a, au contraire, $\alpha < \frac{1}{4}\lambda$, cette plus petite valeur sera $\alpha + \frac{1}{4}\lambda$.

En comparant entre elles ces deux expressions générales de $l - x$, on voit que les ventres et les nœuds se succéderont alternativement sur le premier cylindre, qu'ils seront équidistans, et que l'intervalle compris entre un ventre et

un nœud consécutifs, sera égal à $\frac{1}{4}\lambda$, comme dans le cas d'un tube ordinaire. Le premier de ces points, à partir de la jonction des deux cylindres, sera un ventre ou un nœud, selon que α sera plus grande ou plus petite que $\frac{1}{4}\lambda$. Leur détermination complète se réduira au calcul de cette racine α, que l'on pourra toujours obtenir à tel degré d'approximation qu'on voudra, lorsqu'on aura donné en nombres les quantités l, l', c et λ, dont les trois premières dépendent des dimensions du tube, et la quatrième se conclut, comme nous l'avons expliqué (n° 27), du ton donné par l'observation.

(35) Relativement au tube fermé à l'extrémité qui répond à $x=l+l'$, les nœuds de vibrations sur le premier cylindre, seront déterminés par cette équation :

$$cos.\frac{2\pi l'}{\lambda}\,sin.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}+c\,sin.\frac{2\pi l'}{\lambda}\,cos.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}=0, \quad (18)$$

et les ventres par celle-ci :

$$cos.\frac{2\pi l'}{\lambda}\,cos.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}-c\,sin.\frac{2\pi l'}{\lambda}\,sin.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}=0. \quad (19)$$

Les valeurs réelles de $l-x$, tirées de ces deux équations, seront toutes comprises dans cette formule :

$$l-x=\alpha'+\frac{1}{4}i\lambda;$$

α' étant la plus petite racine positive de la première, et i un nombre entier, pair pour cette équation, et impair pour la seconde. Pour déterminer les ventres et les nœuds, on rejettera les valeurs négatives de $l-x$, et ses valeurs positives, plus grandes que l; si l'on a $\alpha'>\frac{1}{4}\lambda$, on pourra prendre

$i=-1$, et il y aura un ventre qui répondra à la distance $l-x=\alpha'-\frac{1}{4}\lambda$: dans le cas contraire, la plus petite valeur de $l-x$ répondra à un nœud, et sera $l-x=\alpha'$. Les nœuds et les ventres seront distribués, comme on vient de l'expliquer dans le cas du tube ouvert; leur détermination se réduira au calcul de la racine α', qui ne pourra s'obtenir que par approximation.

Observons que l'équation (18) se déduit de l'équation (17), et (19) de (16), en y changeant c en $\frac{1}{c}$; d'où l'on peut conclure que si l'on a deux tubes composés, l'un ouvert et l'autre fermé, qui fassent entendre le même son, de maniere que la quantité λ ne change pas de l'un à l'autre; dont les deux parties aient les mêmes longueurs l et l', et qui ne different qu'en ce que le rapport entre les sections de ces deux parties, soit c dans l'un et $\frac{1}{c}$ dans l'autre : il arrivera alors que tous les points qui sont des ventres sur l'un des deux tubes, seront des nœuds sur l'autre; *et vice versâ.*

(36) Si l'on voulait que la condensation du fluide fût nulle à l'extrémité du tube qui représente l'embouchure, en sorte qu'on eût constamment $s=0$, pour $x=0$; il faudrait qu'on eût, d'après l'équation (17),

$$c\cos.\frac{2\pi l'}{\lambda}\sin.\frac{2\pi l}{\lambda}+\sin.\frac{2\pi l'}{\lambda}\cos.\frac{2\pi l}{\lambda}=0,$$

dans le cas du tube ouvert à l'autre extrémité; et, d'après l'équation (19),

$$\cos.\frac{2\pi l'}{\lambda}\cos.\frac{2\pi l}{\lambda}-c\sin.\frac{2\pi l'}{\lambda}\sin.\frac{2\pi l}{\lambda}=0,$$

dans le cas du tube fermé. Le nombre des racines réelles et

positives de ces équations résolues par rapport à $\frac{1}{\lambda}$, est infini; celui des tons différens que l'instrument pourra rendre, le sera donc aussi; mais ces tons formeront une série déterminée; et, dans chaque cas, on pourra assigner le ton le plus grave, lequel répondra à la plus petite racine positive, ou à la plus grande valeur de λ.

Il est aisé de reconnaître l'identité de ces formules avec celles que D. Bernouilli a données, dans le Mémoire déja cité, pour déterminer les tons des tubes composés, et qui sont fondées, comme les précédentes, sur la supposition purement gratuite d'une condensation nulle à l'embouchure. Nous n'avons pas trouvé d'expériences publiées jusqu'ici, auxquelles on puisse comparer exactement ces formules, non plus que celles des deux n^{os} précédens, qui se rapportent à la position des ventres et des nœuds, correspondans à un ton donné par l'observation.

(37) Pour la valeur donnée de φt, la valeur de Fy trouvée dans le n° 32, n'est qu'une intégrale particulière de l'équation (15); on aura son intégrale complète, en ajoutant à cette valeur un nouveau terme que nous désignerons par $F_{,}y$: faisant donc

$$Fy = A\,sin.\frac{2\pi at}{\lambda} + B\,cos.\frac{2\pi at}{\lambda} + F_{,}y;$$

substituant dans l'équation (15), et déterminant les constantes A et B comme précédemment, son second membre disparaîtra, et cette équation se réduira à

$$(1+c)(1+k)F_{,}(y+2l+2l') - (1-c)(1-k)F_{,}(y+2l) \\ -(1-c)(1+k)F_{,}(y+2l') + (1+c)(1-k)F_{,}y = 0.$$

Son intégrale renfermera des quantités arbitraires qui dé-

pendront de l'état initial du fluide. Pour que le mouvement devienne régulier et indépendant de l'ébranlement primitif, la valeur de $F_{,}y$ devra donc s'anéantir à très-peu-près au bout d'un certain temps; et c'est en effet ce qui arrivera toujours, à moins qu'on ne suppose, ou la condensation du fluide, ou sa vîtesse, rigoureusement nulle à l'extrémité du tube qui répond à $x=l+l'$; c'est-à-dire, à moins qu'on ne fasse $k=0$ ou $k=\infty$. Mais, pour vérifier cette assertion dans toute son étendue, il faudrait considérer l'intégrale complète de l'équation précédente, et faire voir que tous les termes de l'expression de $F_{,}y$ sont multipliés par des quantités plus petites que l'unité, élevées à des puissances dont les exposans croissent avec le temps; c'est à quoi l'on ne parviendrait que par une analyse assez compliquée, dans le cas général où les longueurs l et l' des deux parties du tube ont entre elles un rapport quelconque : pour abréger, nous nous bornerons donc à donner un exemple particulier de cette analyse, et nous prendrons pour cela le cas le plus simple, celui où ces deux longueurs sont égales.

L'équation précédente devient alors

$$(1+c)(1+k)F_{,}(y+4l)-2(1-c)F_{,}(y+2l)$$
$$+(1+c)(1-k)F_{,}y=0;$$

ou bien, en désignant par z une quantité positive plus petite que $2l$, par i un nombre entier ou zéro, et faisant $y=2il+z$, elle se change en

$$(1+c)(1+k)F_{,}\big(z+2(i+2)l\big)-2(1-c)F_{,}\big(z+2(i+1)l\big)$$
$$+(1+c)(1-k)F_{,}(z+2il)=0.$$

L'intégrale complète de cette équation aux différences finies

du second ordre, est de la forme :

$$F_{,}(z+2il)=Zp^{i}+Z'p'^{i};$$

p et p' étant les deux racines de l'équation

$$(1+c)(1+k)u^{2}-2(1-c)u+(1+c)(1-k)=0,$$

et Z et Z′ désignant deux quantités indépendantes de i, mais qui pourront dépendre de la quantité z. On peut aisément s'assurer, par les formules du n° 31, que les valeurs de la fonction F sont connues, d'après l'état initial du fluide, pour toutes les valeurs de la variable, comprises entre zéro et $2(l+l')$, ou $4l$; les valeurs de Fz et $F(z+2l)$ sont donc censées données, et, par suite, celles de $F_{,}z$ et $F_{,}(z+2l)$, lesquelles pourront servir à déterminer Z et Z′ en fonctions de z. Mais cette détermination serait inutile à l'objet que nous nous proposons; il nous suffira de prouver que les puissances p^{i} et p'^{i} deviennent à très-peu-près nulles, lorsque l'exposant i est devenu un très-grand nombre.

Or, si l'on fait $u=1+u'$ l'équation précédente devient :

$$(1+c)(1+k)u'^{2}+2\Big(2c+k(1+c)\Big)u'+4c=0;$$

et comme c et k sont des quantités positives, il s'ensuit que u' ne pourra pas être une quantité positive; par conséquent, u ne saurait avoir une valeur réelle, plus grande que l'unité. On prouvera semblablement que u ne peut être négative et plus grande que l'unité, abstraction faite du signe. Si la quantité k est infinie, l'équation qui détermine u se reduit à $u^{2}-1=0$, et donne $u=\pm 1$; mais, pour toute autre valeur de k, on ne satisfait point à cette équation, au moyen de $u=\pm 1$. Ses racines réelles, lorsqu'elle en a, sont donc comprises

entre $+1$ et -1; et elles ne peuvent atteindre ces limites, que quand on a $k=\infty$: donc, excepté ce cas particulier, leurs puissances diminueront indéfiniment, à mesure que leurs exposans deviendront plus grands.

En résolvant cette même équation, on a

$$u=\frac{1-c\pm\sqrt{(1-c)^2-(1+c)^2(1-k^2)}}{(1+c)(1+k)};$$

ses racines seront donc imaginaires, lorsqu'on aura $(1-c)^2 < (1+c)^2(1-k^2)$; ce qui suppose $k<1$. Si l'on désigne alors par ω un angle réel, on pourra supposer

$$\frac{1-c}{(1+c)\sqrt{1-k^2}}=\cos.\omega;$$

et les deux racines deviendront

$$u=\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\left(\cos.\omega\pm\sin.\omega\sqrt{-1}\right);$$

d'où il résulte

$$u^i=\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{\frac{i}{2}}(\cos.i\omega\pm\sin.i\omega\sqrt{-1}).$$

Or, k étant toujours une quantité positive, $\frac{1-k}{1+k}$ est une fraction; par conséquent, cette valeur de u^i sera nulle ou insensible, quand l'exposant i sera un très-grand nombre : il en faut seulement excepter le cas où l'on aurait $k=0$; car alors les valeurs de u^i, correspondantes à une suite d'exposans croissans, seraient périodiques, au lieu d'être continuellement décroissantes.

On vérifie par-là, que les termes de la valeur complète de Fy, qui dépendent de l'état initial du fluide, finissent

toujours par disparaître au bout d'un certain temps; mais nous voyons aussi que cette circonstance tient à ce que nous ne supposons ni la condensation, ni la vîtesse du fluide, rigoureusement nulle à l'extrémité du tube opposée à l'embouchure.

§ IV.

Mouvement de différens fluides élastiques, contenus dans un même tube cylindrique.

(38) L'analyse que nous allons exposer, pourrait s'appliquer au cas où le tube contiendrait un nombre quelconque de fluides superposés; mais, pour ne pas se jeter dans des calculs trop compliqués, on ne considérera que deux fluides seulement. Ces fluides sont séparés par une section perpendiculaire à l'axe du tube; dans l'état d'équilibre, ils ont la même élasticité, et des densités différentes : on suppose qu'ils ne se mêlent pas pendant le mouvement; que chaque tranche fluide perpendiculaire à l'axe conserve son parallélisme, et que les molécules qui la composent ne se déplacent pas dans son plan.

Nous continuerons de désigner par x, la distance d'une tranche fluide quelconque à l'un des deux bouts du tube. L'un des deux fluides s'étendra, dans l'état d'équilibre, depuis $x=0$ jusqu'à $x=l$; nous appellerons celui-ci *premier* fluide; l'autre, que nous appellerons *second* fluide, occupera l'autre extrémité du tube, et s'étendra depuis $x=l$, jusqu'à $x=l+l'$; en sorte que $l+l'$ sera la longueur totale du tube. Soit aussi, dans le premier fluide, a la vîtesse du son, v et s la vîtesse et la condensation de la tranche qui répond à la distance x, au bout du temps t compté de l'origine du

mouvement ; représentons par v', s' et a', les quantités analogues dans le second fluide; et faisons $y=at$, et $a'=na$. Les quantités v, s, v', s', étant supposées très-petites, comme dans le n° 2, nous aurons

$$v=f(x-y)+\text{F}(x+y),$$
$$as=f(x-y)-\text{F}(x+y),$$
$$v'=f'(x-ny)+\text{F}'(x+ny),$$
$$a's'=f'(x-ny)-\text{F}'(x+ny);$$

f, F, f' et F$'$ désignant quatre fonctions arbitraires.

Il est évident que les valeurs de v et v' doivent être constamment égales entre elles à la jonction des deux fluides, laquelle répond à $x=l$; nous aurons donc, pour toutes les valeurs positives de y, l'équation

$$f(l-y)+\text{F}(l+y)=f'(l-ny)+\text{F}'(l+ny). \quad (20)$$

Il faudra de plus qu'au même point, les forces élastiques des deux fluides demeurent égales pendant toute la durée du mouvement; d'où il résultera une seconde équation qui s'obtient de la manière suivante.

Soient E et D, l'élasticité et la densité naturelles du premier fluide; dans l'état de mouvement, la densité devenant D$(1+s)$, l'élasticité deviendrait E$(1+s)$, abstraction faite du changement de température, dû à la variation de densité; mais si l'on veut avoir égard à ce développement de chaleur, et qu'on le suppose proportionnel à l'accroissement de densité, l'élasticité, dans l'état de mouvement, sera exprimée par E$(1+\gamma s)(1+s)$, ou, en négligeant le quarré de s, par E$\left(1+(1+\gamma)s\right)$; γ étant un coëfficient constant et posi-

dont la valeur dépend de la nature du fluide, et peut être aussi de sa température primitive. Désignant de même par γ' ce coëfficient, relativement au second fluide, et par D' et E' sa densité et son élasticité naturelles, ces quantités deviendront, dans l'état de mouvement, $D'(1+s')$ et $E'\left(1+(1+\gamma')s'\right)$. Ainsi, à la jonction des deux fluides, on aura constamment

$$E\left(1+(1+\gamma)s\right)=E'\left(1+(1+\gamma')s'\right);$$

et comme on a déja, dans l'état d'équilibre, $E=E'$, cette équation se réduit à $(1+\gamma)s=(1+\gamma')s'$, ou, ce qui est la même chose,

$$n(1+\gamma)as=(1+\gamma')a's'.$$

Si donc on fait $x=l$, dans les valeurs précédentes de as et $a's'$, et pour abréger,

$$\frac{1+\gamma'}{n(1+\gamma)}=\frac{a(1+\gamma')}{a'(1+\gamma)}=c,$$

on aura, pour toutes les valeurs positives de y, la seconde équation demandée, savoir :

$$f(l-y)-F(l+y)=c\left(f'(l-ny)-F'(l+ny)\right). \quad (21)$$

Les expressions exactes de la vîtesse du son dans les deux fluides seront

$$a=\sqrt{\frac{(1+\gamma)E}{D}}, \quad a'=\sqrt{\frac{(1+\gamma')E'}{D'}}.$$

On pourra donc calculer, au moyen de ces formules, les valeurs de γ et γ', d'après celles des vîtesses a et a', lesquelles

peuvent elles-mêmes se déterminer, pour les différens gaz, par l'expérience que nous avons indiquée dans le nº 27.

(39) Nous suivrons ici le même ordre que dans le paragraphe précédent; ainsi nous supposerons d'abord que la longueur l' du second fluide soit infinie, et que la vîtesse et la condensation initiales soient nulles dans toute son étendue. On aura alors $v'=0$, $s'=0$, quand $y=0$, pour toutes les valeurs de x plus grandes que l; d'où l'on conclut $f'x=0$, $F'x=0$, depuis $x=l$ jusqu'à $x=\infty$; et, par conséquent, $f'(l+ny)=0$, $F'(l+ny)=0$, puisque la variable y est toujours positive. D'après cela, si l'on élimine $f'(l-ny)$ entre les équations (20) et (21), on aura

$$f(l-y)-F(l+y)=c\Big(f(l-y)+F(l+y)\Big);$$

c'est-à-dire, $as=cv$, pour $x=l$. Donc, quel que soit le mouvement du premier fluide, il s'établit toujours, à l'extrémité où il s'appuie sur le second, un rapport constant et connu, entre la vîtesse et la condensation de sa dernière tranche; résultat analogue à celui du nº 30, et qui peut aussi servir à confirmer la supposition générale qu'on a faite dans le nº 12.

(40) Avant de quitter le cas où le second fluide était primitivement en repos, et où sa longueur est supposée infinie, il est bon d'examiner en détail comment une onde sonore, produite en un point du premier fluide, est en partie transmise dans le second et en partie réfléchie sur elle-même, lorsqu'elle parvient à la jonction des deux fluides.

Dans le second fluide, on a $x>l$; on aura donc constamment $F'(x+ny)=0$; ce qui réduit les équations relatives

à ce fluide, à

$$v' = a's' = f'(x - ny).$$

Tant qu'on aura $x > l + ny$, la fonction $f'(x - ny)$ sera nulle; quand, au contraire, $l + ny$ sera devenue $> x$, sa valeur dépendra de celle de la fonction F. En effet, l'équation du n° précédent donne

$$f(l - y) = \frac{1 + c}{1 - c} \mathrm{F}(l + y);$$

au moyen de quoi, et de $\mathrm{F}'(l + ny) = 0$, l'équation (20) devient

$$f'(l - ny) = \frac{2}{1 - c} \mathrm{F}(l + y);$$

et comme elle a lieu pour toutes les valeurs positives de y, on y peut mettre $\frac{ny + l - x}{n}$ à la place de cette variable, dès qu'on suppose $ny + l > x$: on aura, en conséquence,

$$f'(x - ny) = \frac{2}{1 - c} \mathrm{F}\left(\frac{l + nl + ny - x}{n}\right).$$

Donc, en remettant $a't$ à la place de ny, nous aurons

$$v' = a's' = \frac{2}{1 - c} \mathrm{F}\left(\frac{l + nl + a't - x}{n}\right),$$

à partir de $t = \frac{x - l}{a'}$; et, avant cette époque, on a $v' = 0$, $s' = 0$.

Relativement au premier fluide, on a $x < l$; on peut donc substituer dans la valeur précédente de $f(l - y)$, $y + l - x$ à la place de y; ce qui donne

$$f(x - y) = \frac{1 + c}{1 - c} \mathrm{F}(2l - x + y);$$

et les équations du mouvement de ce fluide deviennent

$$v = \frac{1+c}{1-c} F(2l - x + at) + F(x + at),$$

$$as = \frac{1+c}{1-c} F(2l - x + at) - F(x + at).$$

Ainsi les vîtesses et les condensations des tranches fluides, dans toute la longueur du tube, ne dépendront que des valeurs de la fonction F.

Or, si nous supposons qu'à l'origine du mouvement, le premier, comme le second fluide, était en repos et n'éprouvait aucune condensation en aucun de ses points, on en conclura $Fx = 0$, $F(2l - x) = 0$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$; par conséquent, la fonction F sera nulle pour toutes les valeurs de la variable comprises entre zéro et $2l$. Supposons ensuite que l'on imprime à la tranche fluide qui répond à $x = 0$, une vîtesse représentée par φt au bout du temps t; et afin de considérer isolément le mouvement d'une seule onde sonore, imaginons que cette vîtesse ne dure que pendant un intervalle de temps très-court et plus petit que celui que le son emploie à parcourir la longueur l du premier fluide. En le désignant par θ, et faisant $x = 0$, nous aurons $v = \varphi t$ depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \theta$. Entre ces limites, on a $F(at) = 0$; il en résultera donc

$$\frac{1+c}{1-c} F(2l + at) = \varphi t; \quad (22)$$

en sorte que la fonction F ne sera plus nulle pour les valeurs de la variable qui diffèrent très-peu de $2l$, et qui sont comprises depuis $2l$ jusqu'à $2l + a\theta$.

Cela posé, à raison des deux fonctions que renferment les

valeurs précédentes de v et as, la tranche du premier fluide qui répond à la distance quelconque x, sera mise en mouvement à deux époques différentes : elle s'ébranlera une première fois, lorsque t sera devenu égal à $\frac{x}{a}$; son mouvement durera depuis $t=\frac{x}{a}$ jusqu'à $t=\frac{x}{a}+\theta$; et l'on aura, pendant cet intervalle de temps,

$$v=as=\varphi\left(t-\frac{x}{a}\right).$$

Le temps continuant à croître, cette même tranche fluide s'ébranlera une seconde fois, quand on aura $t=\frac{2l-x}{a}$; le second mouvement durera aussi pendant le temps θ; et si l'on désigne à cette époque par $v_{,}$ et $s_{,}$, sa vîtesse et sa condensation, on aura

$$v_{,}=-as_{,}=\mathrm{F}(x+at);$$

ou bien, à cause de l'équation (22),

$$v_{,}=-as_{,}=\frac{1-c}{1+c}\varphi\left(t-\frac{2l-x}{a}\right).$$

La première valeur de v répond au son direct; celle de $v_{,}$, au son réfléchi : en comparant l'une à l'autre, pour une même valeur de φ, on aura

$$(1+c)\,v_{,}=(1-c)\,v;$$

ce qui montre que, dans la réflexion que le son éprouve à la jonction des deux fluides, la vîtesse propre des molécules est affaiblie dans le rapport de $1-c$ à $1+c$; par conséquent, l'intensité du son est diminuée dans le rapport de $(1-c)^2$ à $(1+c)^2$, en prenant pour sa mesure, dans un même fluide, le quarré de cette vîtesse.

Quant aux tranches du second fluide, chacune d'elles ne sera mise en mouvement qu'une seule fois : celle qui répond à la distance x, commencera à se mouvoir, quand on aura $l+nl+a't-x=2nl$, ou $t=\frac{x+nl-l}{a'}$; son mouvement durera pendant le temps θ; et l'on aura, en vertu de l'équation (22),

$$v'=a's'=\frac{2}{1+c}\varphi\left(t-\frac{x+nl-l}{a'}\right).$$

Pour une même valeur de la fonction φ, si l'on compare cette valeur de v' à celle de v, qui se rapporte à l'onde directe, on aura

$$v'=\frac{2v}{1+c};$$

d'où l'on conclut

$$v'-v_{,}=v.$$

Or, dans l'onde réfléchie, $-v_{,}$ est la vîtesse des molécules fluides pour s'éloigner de la jonction des deux fluides, ou du lieu de la réflexion : lors donc qu'une onde sonore se divise en deux autres, à la rencontre d'un second fluide, on peut dire que la somme des vîtesses propres des molécules, dans l'onde transmise et dans l'onde réfléchie, est toujours égale à la vîtesse qu'elles avaient dans l'onde directe.

(41) Les formules relatives à la comparaison des vîtesses v, $v_{,}$ et v' (*), trouvent une application importante dans la

(*) Depuis la lecture de ce Mémoire, j'ai appris que M. Th. Young a donné ces mêmes formules, mais déduites de considérations indirectes, et qu'il en a fait l'application à la réflexion de la lumière, dans le supplément à l'Encyclopédie britannique, article *Chromatics*.

théorie qui attribue la lumière aux vibrations d'un fluide permanent, répandu dans tout l'espace, et contenu même dans l'intérieur des corps, où sa densité est changée par leur action. Elles peuvent servir à calculer la quantité de lumière réfléchie à la surface de séparation de deux milieux différens, lorsque la direction des ondes lumineuses est perpendiculaire à cette surface. Il suffit, pour cela, de connaître la valeur de la quantité c, qui entre dans ces formules ; or, en faisant abstraction du développement de chaleur qui peut accompagner les condensations du fluide lumineux, ou seulement en supposant qu'il est le même dans les deux milieux, la valeur de c du n° 38 se réduit à $c=\frac{a}{a'}$; cette quantité exprime donc le rapport de la vîtesse de la lumière dans le premier milieu, à sa vîtesse dans le second, lequel est lui-même égal, dans cette théorie, au rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réfraction.

Supposons, par exemple, que les deux milieux soient l'air et l'eau; ce rapport est alors celui de 4 à 3; faisant donc $c=\frac{4}{3}$, on aura

$$v_{,}=\frac{1-c}{1+c}\,v=-\frac{1}{7}v;$$

et si l'on mesure l'intensité de la lumière dans un même milieu, par le quarré de la vîtesse des molécules lumineuses, l'intensité de la lumière réfléchie à la surface de l'eau, sous l'incidence perpendiculaire, sera exprimée par $\frac{1}{49}$, ou, à-peu-près, 0,020, celle de la lumière directe étant prise pour unité. Bouguer a trouvé 0,018; ce qui s'accorde assez bien avec le calcul.

Les deux milieux étant l'air et le verre, on aura, d'après Newton, $c=\frac{31}{20}$; il en résultera donc $v_{\prime}=-\frac{11}{51}v$; et, pour l'intensité de la lumière réfléchie à la surface du verre, à-peu-près 0,046. Suivant Bouguer, cette intensité n'est que 0,025, celle de la lumière directe étant toujours prise pour unité.

Il est à remarquer que le quarré de la vîtesse $v_{\prime}$ conserve la même valeur, soit que l'on fasse $c=\frac{a}{a'}$, ou qu'on renverse ce rapport, et que l'on prenne $c=\frac{a'}{a}$. L'observation de la quantité de lumière réfléchie n'est donc pas propre à décider si la vîtesse de la lumière augmente en passant de l'air dans un milieu plus dense, ainsi qu'on l'admet dans la théorie de l'émission; ou si elle diminue, comme on le suppose dans la théorie des ondulations. Mais, dans la première théorie, cette quantité de lumière n'est aucunement liée aux vîtesses de propagation dans les différens milieux; tandis que, dans la seconde, elle en dépend, comme on voit, d'une manière très-simple : pour cette raison, l'accord du calcul et de l'observation, sur ce point, pourrait être une assez forte présomption en faveur du second système, sur-tout si l'expérience était faite et comparée à la théorie, sur un grand nombre de substances réfléchissantes dans lesquelles le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction fût connu.

(42) Nous considérerons encore la quantité de lumière réfléchie à la seconde surface du verre, toujours sous l'incidence perpendiculaire. Nous avons d'abord pour la vîtesse propre des molécules fluides, qui appartiennent à l'onde

transmise dans l'intérieur du verre (nº 40),

$$v' = \frac{2v}{1+c}.$$

Pour plus de généralité, supposons que sa seconde surface est en contact avec un milieu différent de l'air; soit c', ce que devient la quantité c, relativement au verre et à ce nouveau milieu ; désignons par $v'_{,}$ la vîtesse des molécules lumineuses, appartenantes à l'onde réfléchie dans le verre, et par v'', celle des molécules qui font partie de l'onde transmise dans le nouveau milieu; nous aurons

$$v'_{,} = \frac{1-c'}{1+c'} v', \qquad v'' = \frac{2v'}{1+c'};$$

et si l'on veut que l'air soit aussi le nouveau milieu, il suffira de faire $c' = \frac{1}{c}$. Revenue à la première surface du verre, l'onde réfléchie dans cette matière se partagera de nouveau en deux autres, l'une réfléchie dans le verre, et l'autre transmise dans l'air : si l'on représente par $v_{,,}$, la vîtesse propre des molécules qui appartiennent à cette onde transmise, on aura

$$v_{,,} = \frac{2v'_{,}}{1+\frac{1}{c}} = \frac{1-c'}{1+c'} \cdot \frac{2cv'}{1+c};$$

donc, en exprimant les vîtesses $v_{,,}$ et v'' au moyen de v, nous aurons

$$v_{,,} = \frac{4c(1-c')v}{(1+c)^2(1+c')}, \qquad v'' = \frac{4v}{(1+c)(1+c')}.$$

Représentons maintenant par I, $I_{,}$ et $I_{,,}$, les intensités de la lumière primitive ou incidente, réfléchie à la première surface du verre, et réfléchie à sa seconde surface; ces trois

lumières se propageant dans le même milieu, leurs intensités seront mesurées par les quarrés des vîtesses v, $v_{,}$, et $v_{,,}$, qui leur correspondent; par conséquent, on aura

$$I_{,}=\left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2 I, \quad I_{,,}=\frac{16c^2(1-c')^2}{(1+c)^4(1+c')^2} I.$$

En supposant que l'air soit le milieu en contact avec la seconde surface du verre, et faisant $c'=\frac{1}{c}$, la valeur de $I_{,,}$ devient

$$I_{,,}=\frac{16c^2(1-c)^2}{(1+c)^6} I;$$

d'où l'on conclut

$$I_{,,}=\frac{16c^2}{(1+c)^4} I_{,}.$$

Dans ce même cas, on aura, pour la vîtesse des molécules appartenantes à l'onde transmise du verre dans l'air,

$$v''=\frac{2v'}{1+\frac{1}{c}}=\frac{4cv}{(1+c)^2};$$

par conséquent, si l'on appelle I'' l'intensité de cette lumière transmise, et si on la compare à celle de la lumière incidente, on aura

$$I''=\frac{16c^2}{(1+c)^4} I;$$

où l'on voit que, sous l'incidence perpendiculaire, il existe entre la lumière incidente et la lumière transmise à travers le verre, ou tout autre milieu à faces parallèles, le même rapport qu'entre les quantités de lumière réfléchie à la première et à la seconde surface de ce milieu. En prenant $c=\frac{31}{20}$, on trouve $I_{,,}=(0,909)I_{,}$; en sorte que, relativement au

verre, les intensités de la lumière réfléchie à la première et à la seconde surface, diffèrent peu l'une de l'autre; résultat qui s'accorde avec ce que M. Arago a trouvé par l'expérience.

Si la seconde surface du verre était en contact avec l'eau, on aurait $c'=\frac{4}{3}\cdot\frac{20}{31}=\frac{80}{93}$; et, au moyen de la valeur générale de $I_{,,}$, il en résulterait

$$I_{,,}=(0,909)\left(\frac{13}{173}\right)^2 I=(0,005)\,I;$$

c'est-à-dire que la quantité de lumière réfléchie à cette surface, serait alors presque nulle; ce qui paraît encore s'accorder avec l'expérience.

M. Arago a trouvé que, sous l'incidence perpendiculaire, il se réfléchit à la surface du mercure, environ la moitié de la lumière incidente; faisant donc $I_{,}=\frac{1}{2}I$, nous aurons, pour déterminer la valeur de c relative à l'air et au mercure, l'équation

$$\left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2=\frac{1}{2};$$

d'où l'on tire

$$c=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}, \qquad \text{ou } c=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$$

Il est indifférent d'employer l'une ou l'autre de ces valeurs de c; en prenant la seconde, nous aurons, à-très-peu-près, $c=5,829$. Si donc la seconde surface du verre est en contact avec le mercure, la valeur de c' relative au verre et au mercure, sera $c'=5,829\cdot\frac{20}{31}=3,761$; et la quantité de lumière

réfléchie à cette seconde surface, deviendra

$$I_{\prime\prime}=(0,909)\left(\frac{2761}{4761}\right)^2 I=(0,306)\,I,$$

ou un peu moins que le tiers de la lumière incidente.

Il serait à desirer que l'on pût déterminer, de même par l'analyse, les modifications que les ondes qui se propagent dans un fluide élastique, éprouvent au passage d'un milieu à un autre, lorsqu'elles parviennent à leur surface de séparation sous des incidences obliques : la solution de ce problême difficile pourrait seule faire connaître les lois de la réflexion et de la réfraction ; et l'on vérifierait ensuite si elles s'accordent avec les lois connues du mouvement de la lumière. Ce serait le moyen de donner une base certaine à la théorie des ondulations, dans laquelle tous les phénomènes que la lumière présente, doivent être ramenés aux lois générales du mouvement des fluides.

(43) Après cette digression sur la lumière, reprenons la suite de notre travail, au point où nous l'avons interrompu.

Dans l'hypothèse du nº 40, les tranches fluides qui composent l'onde sonore directe à un instant quelconque, s'étendent depuis $x=at-a\theta$ jusqu'a $x=at$; si donc on fait abstraction de la petite variation de leur densité, la somme de leurs forces vives sera donnée par l'intégrale $\int \mathrm{D}\,v^2\,dx$, prise entre ces valeurs de x. Mettant pour v sa valeur, on aura

$$\int \mathrm{D}\,v^2\,dx=\mathrm{D}\int\left(\varphi\left(t-\frac{x}{a}\right)\right)^2 dx;$$

et si l'on désigne par z, une nouvelle variable, telle qu'on ait $t-\frac{x}{a}=z$, il en résultera

$$\int \mathrm{D} v^2\, dx = \mathrm{D} a \int (\varphi z)^2\, dz;$$

l'intégrale étant prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=\theta$.

L'onde réfléchie s'étend depuis $x=2l-at$ jusqu'à $x=2l-at+a\theta$; la somme des forces vives des tranches fluides qui la composent, sera égale à l'intégrale $\int \mathrm{D} v_{,}^2\, dx$, prise entre ces limites; et en substituant pour $v_{,}$ sa valeur, et faisant $t-\frac{2l-x}{a}=z$, il vient

$$\int \mathrm{D} v_{,}^2\, dx = \frac{\mathrm{D}(1-c)^2 a}{(1+c)^2} \int (\varphi z)^2\, dz;$$

l'intégrale relative à z étant aussi prise depuis $z=0$, jusqu'à $z=\theta$.

Enfin, l'onde transmise dans le second fluide, dont la densité naturelle est D', s'étend depuis $x=a't-a'\theta+nl-l$ jusqu'à $x=a't+nl-l$; la somme des forces vives sera donc $\int \mathrm{D}' v'^2\, dx$, prise entre ces limites : je substitue pour v' sa valeur, il en résulte

$$\int \mathrm{D}' v'^2\, dx = \frac{4\mathrm{D}'}{(1+c)^2} \int \left(\varphi\left(t-\frac{x+nl-l}{a'}\right)\right)^2 dx;$$

et si l'on fait $t-\frac{x+nl-l}{a'}=z$, on aura

$$\int \mathrm{D}' v'^2\, dx = \frac{4\mathrm{D}' a'}{(1+c)^2} \int (\varphi z)^2\, dz;$$

les limites de l'intégrale étant toujours $z=0$ et $z=\theta$.

On voit d'abord que chacune de ces trois sommes de forces vives est une quantité constante; je dis, de plus, que la première est égale à la somme des deux autres, ou qu'on a

$$\int D v^2 dx = \int D v_{\prime}^2 dx + \int D' v'^2 dx.$$

En effet, si l'on substitue les valeurs de ces trois quantités, et qu'on supprime le facteur commun $\int (\varphi z)^2 dz$, on aura

$$Da = \frac{Da(1-c)^2}{(1+c)^2} + \frac{4 D' a'}{(1+c)^2};$$

équation qui se réduit à $Dac = D' a'$, et qui devient, en y mettant pour c, ce que cette lettre représente (nº 38),

$$(1+\gamma') Da^2 = (1+\gamma) D' a'^2;$$

or, d'après les formules de ce nº 38, qui servent à déterminer les vîtesses a et a', on voit que cette équation exprime que les élasticités naturelles des deux fluides, que nous avons désignées par E et E$'$, sont égales entre elles; ce qui est effectivement vrai.

La conservation de la somme des forces vives avant et après la division de l'onde sonore, résulte des principes généraux de la mécanique; il n'était cependant pas inutile d'en donner ici la vérification.

(44) Venons maintenant au cas où les deux fluides ont des longueurs finies l et l'; et supposons, comme nous l'avons admis dans les cas semblables, qu'il existe un rapport constant entre la condensation et la vîtesse du fluide, à l'extrémité du tube qui répond à $x = l + l'$. Soit donc en ce point $a' s' = kv'$, k étant un coëfficient constant et positif, que nous regarderons comme une très-petite ou une très-grande quantité, selon que le tube sera ouvert ou fermé à cette extrémité (nº 18). Cette équation sera, d'après les for-

mules du n° 38,

$$f'(l+l'-ny)-F'(l+l'+ny)=k\Big(f'(l+l'-ny)+F'(l+l'+ny)\Big);$$

et elle aura lieu pour toutes les valeurs positives de y. On tire des équations (20) et (21),

$$\left.\begin{aligned}2cf'(l-ny)&=(1+c)f(l-y)+(c-1)F(l+y),\\ 2cF'(l+ny)&=(c-1)f(l-y)+(1+c)F(l+y);\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

or, il est aisé d'éliminer les fonctions f' et F' entre ces trois équations; car, si l'on met à la place de y, $y+\frac{l'}{n}$ dans la première, et $y+\frac{2l'}{n}$ dans la troisième, elles ne contiendront plus que les deux quantités $f'(l-ny)$ et $F'(l+2l'+ny)$, qui dépendent de ces fonctions. L'élimination faite, on trouve

$$(1+c)(1+k)F\left(l+\frac{2l'}{n}+y\right)+(1-c)(1-k)F(l+y)=$$
$$(1+c)(1-k)f(l-y)+(1-c)(1+k)f\left(l-\frac{2l'}{n}-y\right).$$

Désignons, de plus, par φt la loi des vîtesses que l'on imprime par un moyen quelconque à la première tranche fluide (n° 13), laquelle correspond à $x=0$; en sorte qu'on ait, pendant toute la durée du mouvement,

$$f(-y)+Fy=\varphi t.$$

Substituant, dans l'équation précédente, $y+l$ à la place de y, et dans celle-ci, $t+\frac{2l'}{na}$ à la place de t, ou $y+\frac{2l'}{n}$ au lieu de y, il sera aisé d'éliminer ensuite $f(-y)$ et $f\left(-y-\frac{2l'}{n}\right)$,

et de parvenir à une équation qui ne renferme plus que la fonction F. Le calcul fait, on trouve

$$\left.\begin{aligned}&(1+c)(1+k)F\left(y+2l+\frac{2l'}{n}\right)+(1-c)(1-k)F(y+2l)\\&+(1-c)(1+k)F\left(y+\frac{2l'}{n}\right)+(1+c)(1-k)Fy=\\&\qquad(1+c)(1-k)\varphi t+(1-c)(1+k)\varphi\left(t+\frac{2l'}{na}\right).\end{aligned}\right\}\quad(24)$$

Cette équation servira à déterminer la fonction F; lorsqu'elle sera connue, la fonction f le sera aussi au moyen de l'équation précédente; ensuite les équations (23) feront connaître les fonctions f' et F'; et, de cette manière, la vîtesse et la condensation des tranches fluides, qui dépendent de ces quatre fonctions, se trouveront déterminées en fonctions du temps, dans toute la longueur du tube. Ainsi la solution complète du problême est réduite à l'intégration de l'équation (24); mais on doit observer que la valeur de Fy, tirée de son intégrale générale, contiendra deux parties : l'une dépendante de la fonction φ; l'autre indépendante de cette quantité, et qui satisfera à l'équation (24), abstraction faite de son second membre. Celle-ci dépendra de l'état initial des deux fluides, et finira, comme dans le n° 37, par s'anéantir au bout d'un certain temps, à moins qu'on ne suppose rigoureusement $k=0$ ou $k=\infty$; l'autre subsistera seule, lorsque le mouvement sera devenu régulier et indépendant de son état initial; en sorte qu'il suffira de connaître cette partie de la valeur de Fy, pour déterminer les vibrations des deux fluides, correspondantes à celles de la première tranche.

(45) Supposons donc que la première tranche fluide fasse

des oscillations simples et isochrones, et que sa vîtesse soit représentée par

$$\varphi t = h\, sin.\, \frac{2\pi at}{\lambda};$$

les constantes h, λ et π ayant la même signification que dans les n°s 23 et 32, et $\frac{\lambda}{a}$ exprimant la durée de chaque oscillation. Désignons par

$$Fy = A\, sin.\, \frac{2\pi at}{\lambda} + B\, cos.\, \frac{2\pi at}{\lambda},$$

la valeur de Fy, qui répond à celle de φt; A et B étant des constantes indéterminées. Substituant ces valeurs dans les deux membres de l'équation (24), et égalant, de part et d'autre, les coëfficiens de *sin.* et *cos.* $\left(\frac{2\pi\left(l+\frac{l'}{n}+at\right)}{\lambda}\right)$, on en conclut ces deux équations :

$$2A\left((1+c)\, cos.\, \frac{2\pi(nl+l')}{n\lambda} + (1-c)\, cos.\, \frac{2\pi(nl-l')}{n\lambda}\right)$$

$$-2kB\left((1+c)\, sin.\, \frac{2\pi(nl+l')}{n\lambda} - (1-c)\, sin.\, \frac{2\pi(nl-l')}{n\lambda}\right) =$$

$$h(1+c)(1-k)\, cos.\, \frac{2\pi(nl+l')}{n\lambda} + h(1-c)(1+k)\, cos.\, \frac{2\pi(nl-l')}{n\lambda},$$

$$2kA\left((1+c)\, sin.\, \frac{2\pi(nl+l')}{n\lambda} - (1-c)\, sin.\, \frac{2\pi(nl-l')}{n\lambda}\right)$$

$$+2B\left((1+c)\, cos.\, \frac{2\pi(nl+l')}{n\lambda} + (1-c)\, cos.\, \frac{2\pi(nl-l')}{n\lambda}\right) =$$

$$-h(1+c)(1-k)\, sin.\, \frac{2\pi(nl+l')}{n\lambda} - h(1-c)(1+k)\, sin.\, \frac{2\pi(nl-l')}{n\lambda},$$

d'où l'on tirera les valeurs de A et B.

Si le tube est ouvert à l'extrémité qui répond à $x=l+l'$, on regardera la quantité k comme très-petite, et, négligeant les termes dont elle est facteur, on aura

$$A=\frac{1}{2}h,\ B=-\frac{h}{2g}\left((1+c)\sin.\frac{2\pi(nl+l')}{n\lambda}+(1-c)\sin.\frac{2\pi(nl-l')}{\lambda}\right),$$

en faisant, pour abréger,

$$(1+c)\cos.\frac{2\pi(nl+l')}{n\lambda}+(1-c)\cos.\frac{2\pi(nl-l')}{n\lambda}=g.$$

S'il s'agit, au contraire, d'un tube fermé, k sera une quantité très-grande; et, en ne conservant que les termes qui la renferment, on aura

$$A=\frac{1}{2}h,\ B=\frac{h}{2g'}\left((1+c)\cos.\frac{2\pi(nl+l')}{n\lambda}-(1-c)\cos.\frac{2\pi(nl-l')}{n\lambda}\right),$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$(1+c)\sin.\frac{2\pi(nl+l')}{n\lambda}-(1-c)\sin.\frac{2\pi(nl-l')}{n\lambda}=g'.$$

En employant les premières valeurs de A et B, nous aurons, pour le cas du tube ouvert,

$$Fy=\frac{h}{2g}\left((1+c)\sin.\frac{2\pi(a't-nl-l')}{n\lambda}+(1-c)\sin.\frac{2\pi(a't-nl+l')}{n\lambda}\right);$$

et à cause de $f(-y)+Fy=h\sin.\frac{2\pi a't}{n\lambda}$, on en conclura

$$f(-y)=\frac{h}{2g}\left((1+c)\sin.\frac{2\pi(a't+nl+l')}{n\lambda}+(1-c)\sin.\frac{2\pi(a't+nl-l')}{n\lambda}\right).$$

Les équations (23) deviendront ensuite

$$f'(l-ny)=\frac{h}{g}\sin.\frac{2\pi(a't+l')}{n\lambda},$$

$$F'(l+ny)=\frac{h}{g}\sin.\frac{2\pi(a't-l')}{n\lambda}.$$

Au moyen de ces résultats, et des formules du n° 38, il est aisé de former les valeurs de v', $a's'$, v, as; on trouve, de cette manière :

$$v' = \frac{2h}{g} \cos. \frac{2\pi(l+l'-x)}{n\lambda} \sin. \frac{2\pi at}{\lambda},$$

$$a's' = \frac{2h}{g} \sin. \frac{2\pi(l+l'-x)}{n\lambda} \cos. \frac{2\pi at}{\lambda},$$

$$v = \frac{h}{g}\left\{(1+c)\cos. \frac{2\pi(nl+l'-nx)}{n\lambda} + (1-c)\cos. \frac{2\pi(nl-l'-nx)}{n\lambda}\right\} \sin. \frac{2\pi at}{\lambda},$$

$$as = \frac{h}{g}\left\{(1+c)\sin. \frac{2\pi(nl+l'-nx)}{n\lambda} + (1-c)\sin. \frac{2\pi(nl-l'-nx)}{n\lambda}\right\} \cos. \frac{2\pi at}{\lambda}.$$

Dans le cas du tube fermé, en partant des valeurs de A et B qui s'y rapportent, on parvient à ces autres expressions :

$$v' = \frac{2h}{g'} \sin. \frac{2\pi(l+l'-x)}{n\lambda} \sin. \frac{2\pi at}{\lambda},$$

$$a's' = -\frac{2h}{g'} \cos. \frac{2\pi(l+l'-x)}{n\lambda} \cos. \frac{2\pi at}{\lambda},$$

$$v = \frac{h}{g'}\left\{(1+c)\sin. \frac{2\pi(nl+l'-nx)}{n\lambda} - (1-c)\sin. \frac{2\pi(nl-l'-nx)}{n\lambda}\right\} \sin. \frac{2\pi at}{\lambda},$$

$$as = -\frac{h}{g'}\left\{(1+c)\cos. \frac{2\pi(nl+l'-nx)}{n\lambda} - (1-c)\cos. \frac{2\pi(nl-l'-nx)}{n\lambda}\right\} \cos. \frac{2\pi at}{\lambda};$$

et, relativement à ces expressions et aux précédentes, on

peut remarquer que les unes se déduisent des autres, en augmentant l' d'un multiple impair de $\frac{1}{4}n\lambda$; ce qui tient à la position des ventres et des nœuds de vibrations sur la partie du tube occupée par le second fluide. On ne doit pas non plus perdre de vue que ces résultats n'ont lieu qu'au bout d'un certain temps, et quand le mouvement des deux fluides est devenu indépendant de leur état initial.

L'inspection de ces valeurs de v', $a's'$, v, as, montre que les deux fluides font, à cette époque, des oscillations isochrones de même durée que les vibrations de la première tranche fluide; et que l'amplitude de ces oscillations, variable d'un point à un autre, reste toujours la même pour un même point. On peut donner à la quantité λ telles valeurs que l'on voudra, excepté celles qui rendraient nuls ou très-petits le dénominateur g dans le cas du tube ouvert, et g' dans le cas du tube fermé, et pour lesquelles, par conséquent, les vîtesses et les condensations des tranches fluides cesseraient d'être de très-petites quantités. Le ton le plus grave et les autres tons plus élevés, que peut rendre un tube qui contient deux fluides superposés, ne peuvent êtres déterminés, *à priori*, d'après la nature des deux fluides et les longueurs des parties du tube qu'ils occupent; mais il est possible, quand le ton est donné par l'observation, de fixer la position des ventres et des nœuds de vibrations qui lui correspondent; et c'est uniquement sous ce rapport que la théorie peut être comparée à l'expérience.

(46) En observant que $n\lambda$ exprime l'espace parcouru par le son dans le second fluide, pendant la durée d'une vibration, il résulte des valeurs de v' et $a's'$, que les points dont

nous parlons sont distribués dans ce fluide, à partir de l'extrémité du tube, comme si ce même fluide vibrait seul dans le tube; c'est-à-dire que, soit dans le tube ouvert, soit dans le tube fermé, les distances de ces points à cette extrémité, sont mesurées par les multiples de la quantité $\frac{1}{4}n\lambda$; et en effet, il est évident que cela devait être ainsi.

Relativement au premier fluide, on déterminera les nœuds de vibrations dans le cas du tube ouvert, au moyen de l'équation

$$\cos.\frac{2\pi l'}{n\lambda}\cos.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}-c\sin.\frac{2\pi l'}{n\lambda}\sin.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}=0,$$

et les points de condensation nulle, au moyen de celle-ci :

$$\cos.\frac{2\pi l'}{n\lambda}\sin.\frac{2\pi.(l-x)}{\lambda}+c\sin.\frac{2\pi l'}{n\lambda}\cos.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}=0.$$

Or, il est aisé de voir que toutes les racines réelles de ces deux équations, résolues par rapport à $l-x$, sont comprises dans la formule :

$$l-x=\alpha+\frac{1}{4}i\lambda;$$

α désignant la plus petite racine positive de la première, et i un nombre entier quelconque, pair pour la première équation, et impair pour la seconde. On rejettera les valeurs négatives de $l-x$, et les valeurs plus grandes que l. Les ventres et les nœuds de vibrations se succéderont alternativement; la distance comprise entre deux de ces points consécutifs, sera la même dans toute l'etendue du premier fluide, et égale à $\frac{1}{4}\lambda$. La racine α pourra toujours se déterminer par approximation; elle sera plus petite que $\frac{1}{2}\lambda$: si elle surpasse $\frac{1}{4}\lambda$, on

pourra faire $i = -1$, et le point le plus voisin de la jonction des deux fluides, sera un ventre correspondant à la distance $l-x=\alpha-\frac{1}{4}\lambda$. Si, au contraire, on a $\alpha<\frac{1}{4}\lambda$, ce point sera un nœud de vibrations, qui répondra à la distance $l-x=\alpha$.

Les nœuds de vibrations, dans le cas du tube fermé, seront déterminés par l'équation

$$\sin.\frac{2\pi l'}{n\lambda}\cos.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}+c\cos.\frac{2\pi l'}{n\lambda}\sin.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}=0,$$

et les ventres par celles-ci :

$$\sin.\frac{2\pi l'}{n\lambda}\sin.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}-c\cos.\frac{2\pi l'}{n\lambda}\cos.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}=0.$$

Leurs racines réelles se déduiront toutes de la formule :

$$l-x=\alpha'+\frac{1}{4}i\lambda;$$

α' désignant la plus petite racine positive de la première, et i étant un nombre entier, pair pour cette première équation et impair pour la seconde. On en déduira des conséquences semblables à celles que nous venons d'énoncer pour le cas du tube ouvert.

Après avoir déterminé par l'expérience, comme nous l'avons indiqué précédemment (n° 38), les valeurs des constantes c et n relatives à deux fluides donnés, il serait à desirer que l'on vérifiât, aussi par l'observation, ces lois de distribution des ventres et des nœuds dans les deux fluides, correspondantes à différentes valeurs de λ, lesquelles peuvent toujours se conclure des tons observés. Cette vérification présenterait plus de difficulté que dans le cas d'un seul fluide; elle ne serait cependant point impraticable; et, par la variété qu'on

pourrait mettre dans le choix des deux fluides et dans les longueurs l et l', elle fournirait une confirmation très-étendue de la théorie.

(47) Si l'on veut que la condensation soit nulle à l'extrémité du tube qui répond à $x=0$, on aura, dans le cas du tube ouvert à l'autre extrémité,

$$\cos. \frac{2\pi l'}{n\lambda} \sin. \frac{2\pi l}{\lambda} + c \sin. \frac{2\pi l'}{n\lambda} \cos. \frac{2\pi l}{\lambda} = 0,$$

et dans le cas du tube fermé,

$$\sin. \frac{2\pi l'}{n\lambda} \sin. \frac{2\pi l}{\lambda} - c \cos. \frac{2\pi l'}{n\lambda} \cos. \frac{2\pi l}{\lambda} = 0.$$

Dans cette hypothèse, on pourra fixer le ton le plus grave que le tube peut rendre : ce ton répondra à la plus grande valeur de λ, que l'on trouvera en cherchant la plus petite racine de l'une ou l'autre de ces équations, résolue par rapport à $\frac{1}{\lambda}$. La série des autres tons que l'on peut produire, avec les deux mêmes fluides et les mêmes longueurs l et l', en faisant varier l'embouchure et la manière de souffler, sera aussi déterminée, et elle répondra à la série des racines positives de ces équations ; mais nous répéterons ici ce que nous avons déja dit plusieurs fois, qu'on ne voit pas à *priori* la nécessité de cette hypothèse, et que ce serait à l'expérience seule à décider si elle a réellement lieu dans la pratique.

(48) On peut remplacer le second fluide élastique par un liquide tel que l'eau, par exemple : en la supposant un tant soit peu compressible, comme elle l'est effectivement dans la nature, les formules précédentes feront connaître les vibrations

de ses molécules, produites par celles du premier fluide qui restera toujours un fluide élastique proprement dit.

En effet, au bout du temps t, soit u le petit espace parcouru par la tranche liquide qui répondait primitivement à la distance x; désignons par p la pression qu'elle éprouve, et par δ la densité de l'eau : abstraction faite de la pesanteur et du frottement qui peut avoir lieu contre les parois du tube, l'équation du mouvement de cette tranche quelconque, sera

$$\frac{dp}{dx}+\delta\frac{d^2u}{dt^2}=0.$$

L'épaisseur de cette même tranche, qui était dx avant le mouvement, est devenue $dx+\frac{du}{dx}dx$ au bout du temps t; or, l'eau étant supposée compressible, le rapport de la seconde épaisseur à la première doit dépendre, d'une manière quelconque, de la pression p; et, réciproquement, p doit être une certaine fonction de ce rapport. Nous aurons donc

$$p=f\left(1+\frac{du}{dx}\right),$$

ou bien, en développant suivant les puissances de $\frac{du}{dx}$, et négligeant son quarré,

$$p=\pi-\epsilon\frac{du}{dx};$$

π et ϵ étant des constantes qui sont censées connues par l'expérience. Il est important d'observer que la quantité ϵ est toujours positive; ce qui résulte de ce qu'une dilatation du liquide suppose une diminution dans la pression.

Au moyen de cette valeur de p, l'équation du mouvement devient

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{\epsilon}{\delta}\frac{d^2u}{dx^2};$$

son intégrale complète est

$$u=\varphi\left(x-t\sqrt{\frac{6}{\delta}}\right)+\psi\left(x+t\sqrt{\frac{6}{\delta}}\right);$$

φ et ψ désignant les deux fonctions arbitraires. On en déduit, pour la vîtesse et la dilatation de la tranche fluide qui répond à la distance quelconque x,

$$\frac{du}{dt}=-\left(\varphi'\left(x-t\sqrt{\frac{6}{\delta}}\right)-\psi'\left(x+t\sqrt{\frac{6}{\delta}}\right)\right)\sqrt{\frac{6}{\delta}},$$

$$\frac{du}{dx}=\left(\varphi'\left(x-t\sqrt{\frac{6}{\delta}}\right)+\psi'\left(x+t\sqrt{\frac{6}{\delta}}\right)\right)\sqrt{\frac{6}{\delta}};$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\frac{d\varphi}{dx}=\varphi', \quad \frac{d\psi}{dx}=\psi'.$$

(49) Le coëfficient du temps sous les fonctions arbitraires, exprimera la vîtesse avec laquelle le mouvement se propage dans le liquide que l'on considère ; en sorte qu'en appelant a' cette vîtesse, on aura

$$a'=\sqrt{\frac{6}{\delta}}.$$

Elle dépendra donc de la quantité 6; or, on peut déterminer la valeur de 6, d'après la contraction de l'eau pour une augmentation donnée de pression ; car, en représentant par k, la hauteur d'une colonne d'eau sous une pression connue, et désignant par ε la petite diminution de cette hauteur, pour une augmentation Δ de pression, on conclura, de l'expression générale de p,

$$\Delta=6\,\frac{\varepsilon}{k}.$$

Ainsi la vîtesse de la propagation du son ou de tout autre mouvement dans l'eau, sera donnée par la formule

$$a' = \sqrt{\frac{\Delta k}{\delta \varepsilon}}.$$

La petitesse de ε rend cette quantité difficile à mesurer; le physicien Canton paraît néanmoins l'avoir déterminée avec exactitude : à la température de 10 degrés centigrades, et pour une charge égale à la pression ordinaire de l'atmosphère, il a trouvé que le volume de l'eau se contracte de 0,000046 (*). La colonne d'eau que nous considérons, étant contenue dans un tube dont le diamètre est regardé comme invariable, la diminution de sa hauteur est la même que celle de son volume; nous aurons donc $\varepsilon = (0{,}000046)\, k$, si nous prenons pour Δ une pression de $0{,}^{m}76$ de mercure, c'est-à-dire, si nous faisons $\Delta = (0{,}^{m}76)\, gm$, g désignant la gravité et m la densité du mercure. A la température que l'on suppose, on a $m = (13{,}5819)\, \delta$; la seconde sexagésimale étant prise pour unité, on a aussi $g = 9{,}^{m}8088$: au moyen de quoi, l'on trouve $a' = 1484^{m}$; de sorte que la vîtesse du son dans l'eau est plus que quadruple de sa vîtesse dans l'air.

Dans le mercure, cette vîtesse serait exprimée par $\sqrt{\frac{(0{,}^{m}76)\, gk}{\varepsilon}}$; d'après les expériences du même physicien Canton, on a $\varepsilon = (0{,}000003)\, k$; ce qui donne 1576^{m} pour cette vîtesse. On calculera de la même manière la vîtesse du son dans les corps solides, pourvu que l'on connaisse la contraction dont ils sont susceptibles pour une charge donnée.

Cet usage de la contraction de l'eau, ou de toute autre sub-

(*) Transactions philosophiques, année 1764.

stance liquide ou solide, pour déterminer la vîtesse avec laquelle le son doit s'y propager, a déja été remarqué par M. Th. Young et par M. Laplace.

(50) Pour faire coïncider les formules du n° 48 avec celles des n^{os} précédens, soit

$$\frac{du}{dt}=v', \frac{du}{dx}=-s', \sqrt{\frac{6}{\delta}}\varphi' x=-f' x, \sqrt{\frac{6}{\delta}}\psi' x=\mathrm{F}' x;$$

ces formules deviendront

$$v'=f'(x-a't)+\mathrm{F}'(x+a't),$$
$$a's'=f'(x-a't)-\mathrm{F}'(x+a't);$$

et à cause de $6=a'^2\delta$, on aura

$$p=\pi+a'^2\delta s.$$

Au point de jonction du fluide élastique et de l'eau, qui répond à $x=l$, les deux vîtesses v et v' seront égales entre elles. De plus, la pression p sera égale, en ce point, à la force élastique du fluide; d'après les notations du n° 38, et en observant que $\mathrm{E}(1+\gamma)=\mathrm{D}a^2$, on aura donc

$$\mathrm{E}+a^2\mathrm{D}s=\pi+a'^2\delta s;$$

mais, comme cette équation doit aussi subsister dans l'état naturel des deux fluides, on a séparément $\mathrm{E}=\pi$; ce qui la réduit à $as=ca's'$, en faisant, pour abréger,

$$\frac{a'\delta}{a\mathrm{D}}=c.$$

De cette manière, les conditions relatives à la jonction des deux fluides seront exprimées par les deux mêmes équations que dans le n° 38; et les formules que nous avons trouvées,

pour exprimer les valeurs des quatre quantités v, as, v' et $a's'$, s'appliqueront littéralement au mouvement de l'eau et d'un gaz quelconque, contenus dans un même tube.

On peut remarquer que, dans la question présente, la quantité c ne dépend pas seulement du rapport des vîtesses du son a' et a dans les deux fluides superposés : elle dépend aussi du rapport qui existe entre leurs densités δ et D; or, à cause que la densité du gaz est très-petite, relativement à celle de l'eau ou d'un liquide quelconque, il en résulte que, dans la question présente, la quantité c sera toujours très-grande : dans le cas de l'air et de l'eau, par exemple, on aura, à peu près, $c=3500$. On pourra donc, avec une exactitude suffisante, mettre c à la place de $c+1$ et de $c-1$, dans les valeurs de v et de as du n° 45; elles se réduisent alors à

$$v=\frac{h\,\sin.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}\,\sin.\frac{2\pi at}{\lambda}}{\sin.\frac{2\pi l}{\lambda}},$$

$$as=\frac{-h\,\cos.\frac{2\pi(l-x)}{\lambda}\,\cos.\frac{2\pi at}{\lambda}}{\sin.\frac{2\pi l}{\lambda}};$$

et, comme on voit, elles sont indépendantes du mouvement de la colonne d'eau, et les mêmes que si la surface de ce liquide était un plan fixe. Lors donc qu'un tube sonore est en partie plongé dans l'eau, ou dans tout autre liquide, il est permis de le considérer, sans erreur sensible, comme un tube bouché et terminé au point où le liquide s'élève dans son intérieur.

Généralement, l'onde sonore qui vient tomber sur la surface de l'eau, éprouve, dans la réflexion, un très-petit affaiblissement; car, d'après le n° 40, on a le rapport $(1+c)v_{,} = (1-c)v$, entre les vîtesses propres des molécules d'air dans l'onde directe et dans l'onde réfléchie; donc, à raison de la grandeur de c, la vîtesse $v_{,}$ différera très-peu de la vîtesse v, abstraction faite du signe. En même temps, la vîtesse que prennent les molécules d'eau, et qui est exprimée par la formule (n° 40),

$$v' = \frac{2v}{1+c},$$

sera aussi très-petite; et si l'on prend pour mesure de l'intensité du son, la densité du fluide dans lequel il se propage, multipliée par le quarré de la vîtesse propre de ses molécules, on trouvera que quand le son passe de l'air dans l'eau, son intensité est affaiblie dans le rapport de l'unité à 3600 environ, la densité de l'eau étant supposée 800 fois celle de l'air.

Si, au contraire, le son est produit dans l'eau et transmis dans l'air, on aura à-peu-près $c = \frac{1}{3500}$; la vîtesse des molécules d'eau se trouvera aussi très-peu diminuée dans la réflexion à la surface de l'air; mais la vîtesse v' que prendront les molécules d'air, sera à-très-peu-près double de celle des molécules d'eau; et, par suite, l'intensité du son transmis dans l'air, sera à son intensité dans l'eau dans le rapport de 1 à 200.

MÉMOIRE

Sur le moyen employé par les rainettes, pour s'élever le long des corps même les plus lisses;

PAR M. LA BILLARDIÈRE.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 11 janvier 1819.

LES naturalistes qui de nos jours ont donné l'histoire des rainettes, n'ont pas manqué de nous faire connaître leur opinion sur la manière dont ces jolis animaux grimpent le long des corps les plus polis. Ils pensent que c'est au moyen de pelottes visqueuses qu'ils ont à cet effet sous les doigts. La rainette commune *(hila viridis)* que j'ai conservée pendant plusieurs mois, m'a mis à portée de reconnaître qu'une cause bien plus puissante que la viscosité, les aide à merveille dans leur marche ascensionnelle. En effet, c'est en formant le vide au moyen de la pelotte dont l'extrémité de chaque doigt est munie, qu'ils se soutiennent dans toute position très-inclinée, et même à la renverse. Alors les muscles fléchisseurs des doigts se contractent, puis la pelotte hémisphérique dont chaque extrémité est garnie s'applique exactement contre l'objet auquel elle doit se fixer, en s'aplatissant du centre successivement jusque sur les bords. Là se trouve ce qu'on a

désigné sous le nom d'ongle; corps moins dur qu'un cartilage, mais résistant, à-peu-près circulaire, ayant en arrière une légère dépression; il circonscrit dans tout le pourtour chaque pelotte, qui est formée de fibres musculaires très-déliées et fort rapprochées, attachées principalement à la dernière phalange, qui, très-courte, dépasse à peine le milieu des pelottes rétractiles. Leur plus grand volume se fait remarquer dans l'état de relâchement par le renflement de ces mêmes pelottes qui sont revêtues, à l'extérieur, d'une membrane très-lisse. Avec une pareille disposition, il est bien aisé à cet animal de s'opposer plus ou moins, selon le besoin, à la pression atmosphérique. En effet, lorsqu'il se fixe sur un verre bien transparent et dans une position verticale, on voit ses pelottes se contracter au moyen de l'appareil musculaire dont nous venons de parler, le bord dur qui les entoure étant appliqué très-exactement pour défendre tout accès à l'air atmosphérique dans la cavité qui se forme alors. Il ne faut pas un grand effort pour l'y soutenir, puisqu'on le voit souvent employer à peine le tiers de ses moyens d'adhésion, pour laisser reposer les autres; toute contraction musculaire étant toujours pénible. La juxta-position de la peau du dessous du corps ajoute sans doute à ces mêmes moyens; mais il n'est question ici que de ceux qu'il emploie pour s'élever. Je l'ai vu plusieurs fois poursuivant sa proie le long du vitrage, se garantir de la chûte au moyen d'une seule de ses pelottes qui l'y ramenait.

Les rainettes présentent toutes la même conformation. Les naturalistes ont eu raison, sans doute, de ranger ces batraciens dans un genre nouveau, bien distinct des grenouilles, avec lesquelles cependant Linné les avait réunis. Mais il sera

à propos d'en modifier le caractère, d'après le moyen d'adhésion que je viens de développer.

La rainette commune ne laisse pas de mener une vie très-active, n'attaquant jamais, comme on sait, les insectes morts, pas même ceux qui, quoique vivans, sont immobiles. Presque tous lui sont bons; mais elle s'adresse de préférence à ceux qui sont faciles à saisir. Elle détruit, au grand avantage des jardiniers dans l'arrière-saison, beaucoup de perce-oreilles, On en voyait alors de nombreux débris dans ses matières excrémentielles. Elle s'élance avec avidité sur les faucheurs; les plus grosses araignées même ne l'épouvantent pas. Il était curieux de voir l'extrémité des longues pattes de l'insecte, tenues pendant assez long-temps hors la bouche de ce petit animal, tandis que le corps était déja presque descendu dans son estomac. Sa langue déprimée vers le centre du grand évasement circulaire qui la termine, est très-propre à retenir les insectes. Il lui arrive cependant par-fois de manquer sa proie, sur-tout à l'égard des grosses mouches, les ailes de celles-ci en empêchant l'adhérence à sa langue gluante et rétractile.

Catesby, dans son Histoire naturelle de la Caroline, publiée en 1731, avait dit, en parlant de la rainette blanc-rayée, qu'il appelle *green-tree frog,* et qu'on y voit figurée à la tab. 71 du tom. II, qu'elle a à l'extrémité des doigts des plaques arrondies, charnues et concaves, au moyen desquelles elle fait le vide (1) pour se tenir sous les feuilles des

(1) The feet being round, fleshy and concave.... They most commonly are found adhering to the under sides of green leaves.... Which they could not do without this extraordinary structure of their toes, by

arbres, afin d'éviter ses nombreux ennemis. Les naturalistes, même les plus célèbres, n'ont depuis tenu aucun compte de cette remarque judicieuse, sans doute parce que notre auteur paraissait annoncer comme constante la concavité de l'extrémité de chaque doigt, qui, ne formant le vide qu'au besoin, laisse cependant voir les pelottes musculaires saillantes, lorsque les fonctions de cette sorte d'organe ne sont point nécessaires, par exemple lorsque l'animal se tient dans l'eau, ou bien sur un plan horizontal ou peu incliné.

J'ai donc cru utile de faire connaître par quel mécanisme les rainettes s'attachent aux corps les plus polis. L'analogie d'ailleurs que présente cette sorte d'organe avec celui de plusieurs insectes qui se fixent aussi en formant le vide, comme l'a démontré sir Everard Home (1), conduira sans doute au développement des moyens que la nature a fournis à ces êtres. Il est à desirer qu'à l'exemple des Swammerdam, des Lyonnet, etc., un bon observateur en fasse l'objet de recherches microscopiques.

Sir Everard Home, dans son beau travail sur le jecko (2), a bien annoncé que les détails anatomiques dans lesquels la grosseur de l'animal lui a permis d'entrer, mettront sur la voie de ces sortes de recherches dans les insectes les gens habiles qui un jour s'en occuperont. Mais, à la simple inspection, il est clair que le sujet que nous venons de traiter leur en aplanira encore bien mieux les difficultés : car les pelottes

---

which they cleave to the smoothest leaf by suction. *Catesby nat. hist. of Car. tom. II, p. 71.*

(1) *Phil. trans.* 1816, p. 149 et 322.

(2) *Ibid. loc. cit.*

distinctes des rainettes offrent évidemment de plus grands rapports avec les organes également distincts qui en font les fonctions dans beaucoup d'insectes.

Je dois dire qu'un semblable travail sur la marche curieuse du jecko avait été fait en 1792 par feu M. Riche, l'un des naturalistes du voyage entrepris pour la recherche de la Pérouse, et qu'il m'en avait communiqué verbalement quelques détails. D'après la division que nous avions adoptée des diverses branches de l'histoire naturelle qui devaient nous occuper dans cette expédition commandée par le contre-amiral d'Entrecasteaux, les mœurs intéressantes du jecko le concernaient spécialement. Il est vraisemblable que ses remarques à ce sujet auront été égarées. C'est pendant notre séjour à Amboine que nous eûmes maintes occasions d'observer ce singulier lézard. Il sortait de sa retraite vers la chûte du jour pour chercher dans les appartemens, le long des murs et des poutres, les insectes dont il se nourrit. Souvent il s'annonçait d'une voix forte et comme articulée par le cri plusieurs fois répété du nom sous lequel il est connu, puis, tournant sa tête pour fixer la vue du côté des insectes qui allaient devenir sa proie, il ne tardait pas à s'en approcher. Là les murs sont fort lisses, étant blanchis avec plusieurs couches de chaux. Il était curieux de voir l'animal s'avancer lentement, et toujours avec sûreté, prenant ainsi le temps d'assurer chaque pied, au moyen des nombreux suçoirs dont il est garni. Nulle situation ne l'arrêtait dans sa poursuite. Souvent on le voyait sous les poutres marchant ainsi à la renverse; ses moyens d'adhésion étant d'autant plus développés, qu'il fallait alors s'opposer encore davantage aux efforts de la gravitation.

Je viens, à mon sens, de développer le vrai mécanisme par lequel les rainettes s'élèvent le long des corps même les plus lisses.

D'ailleurs, l'organe dont elles sont pourvues à cet effet, présente beaucoup d'analogie avec celui qui en fait les fonctions dans nombre d'insectes. On doit donc espérer que la connaissance de sa structure mettra sur la voie les observateurs habiles qui voudront s'occuper de pareilles recherches à l'égard de ces petits êtres; sujet bien digne de fixer l'attention des naturalistes.

EXPLICATION DES FIGURES.

1. Membre droit et supérieur de la rainette commune, de grandeur naturelle et vu en dedans.

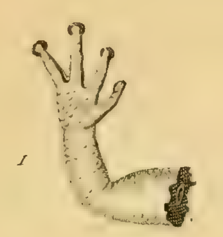
2. L'avant-dernier doigt vu de côté, pour montrer la pelotte saillante. Cette figure est grossie, de même que les suivantes.

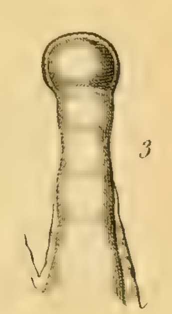
3. La figure précédente, la pelotte vue en face.

4. Extrémité de la même figure, mais la pelotte déprimée, lorsque le vide s'opère.

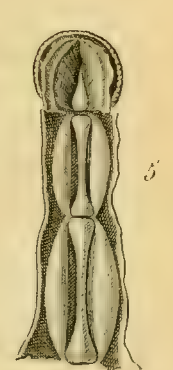
5. La même que la figure 3, les phalanges et les muscles mis à découvert. La dernière phalange est en partie cachée par des fibres musculaires laissées en place appartenantes à la pelotte rétractile fendue longitudinalement. L'autre côté en a été dénudé.

Mémoire de M.r Labillardière.


1


3


4


5


2

MÉMOIRE

Sur le rapport de la mesure appelée pouce de fontainier *avec* l'once d'eau romaine *moderne, et le* quinaire *antique; et sur la détermination d'une nouvelle unité de mesure, pour la distribution des eaux, adaptée au systême métrique français.*

PAR M. DE PRONY.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 23 décembre 1816.

Je fus invité, il y a quelques années, à présenter des vues sur la détermination d'une nouvelle unité de mesure applicable à la distribution des eaux, et propre à remplacer celle qui est connue sous le nom de *pouce de fontainier* ou *pouce d'eau.* Cette nouvelle unité devait être adaptée au systême métrique décimal, et il était important de la rendre exempte des reproches qu'on fait, avec raison, au *pouce de fontainier.* J'imaginai, en conséquence, pour faire les expériences qu'exigeait sa détermination, un appareil différent de ceux qu'on avait appliqués jusqu'alors à l'évaluation des dépenses d'eau par les orifices et les ajutages, et avec lequel je pense qu'on peut entreprendre les observations les plus délicates, relatives à la mécanique et à la physique des fluides.

Je donnerai ci-après la description de cet appareil et les

résultats auxquels mes expériences m'ont conduit; et je vais d'abord entrer dans quelques détails sur des objets intimement liés à la question que j'ai eue à résoudre.

§ I.er

Considérations générales sur l'espèce d'unité qui est applicable à la distribution des eaux.

Lorsqu'on a exécuté les travaux nécessaires pour amener des eaux dans une ville, et qu'on a construit les châteaux-d'eau et les bassins dans lesquels ces eaux doivent être recueillies, il reste à se procurer les moyens les plus sûrs et les plus commodes de répartir ces eaux aux différens quartiers et à leurs habitans, dans des proportions données. Cette répartition se réduit toujours à faire arriver à différens points de la surface du sol de la ville des quantités d'eau déterminées pendant des temps pareillement déterminés, avec la condition que les mêmes fournitures d'eau seront reproduites à chaque renouvellement des mêmes périodes de temps.

On satisfait à ces conditions, soit par des écoulemens d'eau continus, soit par des remplissages de réservoirs, faits à des époques fixes, et l'on voit que la notion de mesure, quand il s'agit de la distribution des eaux, se compose de l'idée d'un certain *volume* de fluide et de celle du *temps* pendant lequel ce fluide peut s'échapper d'un réservoir, par un mode déterminé d'écoulement.

L'usage constant de tous les peuples qui ont été dans la nécessité de donner l'eau par *concessions,* a été d'avoir un type de mesure de cette espèce, résultant de la combinaison

des idées de *temps* et de *volume*, et qui, par-là, diffère notablement des autres unités relatives soit à l'étendue, soit aux monnaies et aux poids.

Le type dont nous parlons manque au nouveau systême métrique français, et c'est une addition à y faire pour rendre ce systême complet.

Un objet très-important, relativement à ce type, est la détermination du mode général d'écoulement qui doit être employé pour assurer la fourniture d'un volume d'eau déterminé dans un temps pareillement déterminé. L'usage constamment suivi à cet égard a été de rendre l'eau stagnante dans un bassin ou réservoir, et le type, ou unité de concession d'eau, est donné par un orifice circulaire d'une certaine grandeur, pratiqué à la paroi plane et verticale de ce bassin ; cet orifice ayant sur son centre une certaine charge d'eau qui s'écoule par un ajutage cylindrique d'une certaine longueur, dont l'axe est perpendiculaire au plan de la paroi, et dont le diamètre intérieur est égal à celui de l'orifice.

Ainsi, lorsqu'on est convenu de la relation entre un certain volume d'eau et la durée de son écoulement, relation qui constitue l'unité de distribution de l'eau, on a, pour l'obtenir, trois choses à déterminer, savoir, le diamètre de l'orifice circulaire à percer dans une paroi plane et verticale ; la charge d'eau constante sur le centre de cet orifice, et la longueur de l'ajutage.

Il est convenable d'employer immédiatement cet écoulement, par orifice et ajutage, quand il s'agit des eaux à distribuer dans les habitations pour la boisson et les autres usages privés; et c'est sur la considération de ces besoins individuels que doit naturellement être établie l'unité de distri-

bution : quant aux eaux à concéder en grandes masses pour les irrigations, le mouvement des machines, le nettoiement des rues et des cloaques, etc., on a d'autres moyens de les distribuer dans des proportions données ; mais les quantités de ces eaux concédées doivent toujours se rapporter à l'unité fondamentale.

§ II.

Du Pouce de fontainier; *défauts de ce type de mesure; évaluation de son produit absolu.*

Le *pouce d'eau* ou *pouce de fontainier,* considéré quant au moyen mécanique de l'obtenir immédiatement, est la quantité d'eau que fournit un orifice circulaire d'un pouce de diamètre, percé dans une paroi verticale, avec une charge d'eau de 7 lignes sur le centre, ou d'une ligne sur le sommet ou point culminant de l'orifice.

Un premier vice très-grave de ce type de mesure est de laisser la longueur de l'ajutage ou l'épaisseur de la paroi absolument indéterminée ; ainsi, en perçant les trous d'un pouce de diamètre dans une planche de métal de 2 ou 3 lignes d'épaisseur, ou dans une planche de bois de 12 ou 15 lignes, on doit avoir et l'on a en effet des produits différens. Un autre vice non moins fâcheux est la petitesse de la charge, soit sur le centre, soit sur le point culminant, qu'il est presque impossible de régler à sa juste valeur, et qui cependant, pour peu qu'elle soit altérée, influe sensiblement sur le produit. J'ai parlé plus en détail, dans un Mémoire sur le jaugeage, de ces défauts auxquels il faut attribuer principalement les variétés qui existent dans les diverses mesures du produit

d'un *pouce d'eau*. Ce produit étant à-peu-près de 14 pintes par minute, et la pinte contenant environ 48 pouces cubes, on est assez généralement convenu de faire du *pouce d'eau* une mesure, purement nominale, de 672 pouces cubes par minute, équivalant à 560 pieds cubes, ou $19^{\text{m. cub.}},2$, en vingt-quatre heures.

§ III.

Rapport du pouce de fontainier *avec* l'once d'eau *romaine; conjectures sur le rapport de cette dernière mesure avec le* quinaire *antique, et sur l'origine de la mesure française.*

Je me suis beaucoup occupé des eaux et des aquéducs de Rome pendant un séjour de plus de deux ans que j'ai fait, à deux époques, dans les États romains, d'abord en 1806 et ensuite en 1810 et 1811. Je ferai part à l'Académie de mes recherches sur cette matière dans un Mémoire particulier, dont je vais extraire quelques détails relatifs à l'objet que je traite aujourd'hui, et sur lesquels je pense qu'on n'a rien publié.

Je commencerai par la détermination du produit de ce qu'on appelle à Rome une *once d'eau*. La presque totalité des concessions qui y sont faites aux établissemens publics, et aux particuliers, est fournie par trois aquéducs, savoir : l'aqueduc antique, dont l'eau s'appelait *aqua virgo*, qui alimente la belle fontaine de Trevi, et arrive à une petite hauteur au-dessus du Tibre; l'aquéduc construit par Trajan l'an 112 de notre ère, et qui alimente la fontaine Pauline, sur le *Janicule*, placée à une hauteur au-dessus des basses eaux du Tibre, que j'ai trouvée, par un nivellement baro-

métrique, de 64 mètres (une partie de son eau fait mouvoir plusieurs usines); et l'aquéduc construit ou restauré par le pape Sixte V, pour conduire l'eau appelée *aqua felice* sur le mont Quirinal, à une hauteur au-dessus de l'étiage du Tibre, que j'ai aussi mesurée barométriquement, et qui est de 54 mètres.

Je n'ai pas appris sans surprise que l'*once d'eau* dérivée du premier aquéduc avait, en volume de fluide, une valeur absolue double de celle de la mesure de meme dénomination des eaux fournies par les deux autres; et voici le motif probable de cette singularité : le prix des eaux des fontaines Pauline et Felice est, à égale quantité, double de celui de l'eau de la fontaine Trevi; et, pour conserver une valeur nominale, au prix de l'unité de distribution d'eau, commune à toutes les fontaines, on s'est avisé d'établir les valeurs absolues de ces unités en raison inverse des valeurs monétaires des eaux.

La grande *once* ou *once de Trevi* est fournie par un orifice dont le diamètre est de $\frac{1}{12}$ de palme romain moderne, sous-division qui s'appelle *once* (le palme équivaut à $0^{m},2234$, et l'once à $0^{m},0186$), orifice auquel doit être adapté un ajutage de $\frac{5}{4}$ de palme, avec une charge d'eau sur le centre, qui est aussi de $\frac{5}{4}$ de palme, ou de $0^{m},2792$.

J'ai répété plusieurs fois les opérations nécessaires pour connaître les produits de l'une ou de l'autre des *onces* dont je viens de parler; M. Mallet, ingénieur en chef du corps royal des ponts-et-chaussées, m'a communiqué les résultats de celles qu'il a exécutées en 1809. Les produits conclus de ces diverses opérations diffèrent peu entre eux; mais celui qui m'inspire le plus de confiance est déduit de six expériences que j'ai faites avec M. Vici, directeur des eaux de

Rome, le 20 février 1811, et desquelles j'ai conclu que l'*once* d'eau de Trevi donnait un produit de 41,16 mètres cubes en vingt-quatre heures. Le produit de l'*once d'eau* des fontaines Pauline et Felice est donc de 20,58 mètres cubes pendant le même temps, et excède de 1,38 mètres cubes ou $\frac{1}{15}$ environ le produit du pouce d'eau français.

Je donnerai, dans le Mémoire que j'ai annoncé précédemment sur les eaux et les aquéducs de Rome, la description des expériences et le détail des calculs.

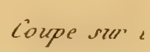
L'Académie n'entendra peut-être pas sans intérêt quelques conjectures sur la comparaison entre l'once d'eau romaine et les mesures antiques de même espèce ; on chercherait vainement ce rapprochement dans les auteurs qui se sont occupés de la concordance des mesures anciennes et modernes, et qui ont omis complétement celles qui se rapportent à la distribution des eaux.

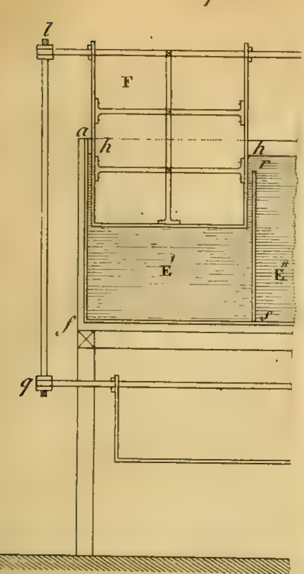
Frontinus, intendant des eaux de Rome, sous Nerva et Trajan, et auteur du seul traité ancien que nous ayons sur les aquéducs romains, parle avec beaucoup de détail des formes et des grandeurs des divers orifices employés de son temps pour fixer les quantités d'eau concédées. Ces orifices étaient, relativement à leurs grandeurs, au nombre de vingt-cinq; mais l'usage habituel en avait particulièrement consacré quinze : celui d'entre eux auquel se rapportait le type ou l'unité de distribution était circulaire, avec un diamètre égal à $\frac{5}{4}$ de doigt; ce qui lui avait fait donner le nom de *quinaire*. Les noms des orifices étaient, en général, dérivés du nombre de quarts de doigt, ou de 64es parties du pied romain antique que contenait leur diamètre : la longueur de ce pied, telle que je l'ai déduite des distances entre les bornes

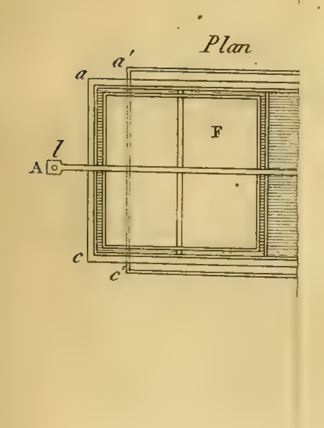
milliaires antiques de la voie Appia, dans la traversée des marais Pontins, est de $0^m,29425$; évaluation qui ne diffère de celle de Romé de Lisle que de $\frac{4}{10}$ de millimètre, et qui donne, pour le doigt ou seizième du pied, $0^m,01839$.

Frontinus dit que la longueur de l'ajutage ou *calice* ne doit pas être moindre de 12 doigts ($0^m,221$); il recommande scrupuleusement différentes précautions qu'on doit prendre pour donner à cet ajutage la position convenable, et on est étonné qu'avec des attentions aussi délicates sur cet élément de l'écoulement, il passe absolument sous silence la charge d'eau sur l'orifice, qui a une influence encore plus grande sur la dépense.

Après avoir parcouru son *Traité* avec soin, et avoir lu les auteurs qui ont écrit sur les eaux et les aquéducs de Rome, tels que Poleni, Fabretti, Cassio, etc., je n'y ai trouvé aucun éclaircissement sur cette particularité du module antique de distribution. Il n'est cependant pas probable que la charge d'eau fût arbitraire, et il devait y avoir à cet égard un usage dont Frontinus n'a pas parlé; mais il paraît hors de doute qu'il n'avait qu'une idée vague des phénomènes qui tiennent à la vîtesse des eaux, tant comme cause que comme effets : on peut en juger par les jauges qu'il a faites, et qu'il décrit au livre II de son *Traité*. Il y suppose les produits d'un même courant, à différentes sections, simplement proportionnels aux aires de ces sections. Une règle aussi fautive devait donner des résultats fort extraordinaires, celui, par exemple, d'accuser une augmentation du produit lorsque les dérivations faites au-dessus du point de jauge mettaient la diminution de ce produit hors de doute : cette cause d'erreur tenait aux variations de déclivité et de vîtesse;

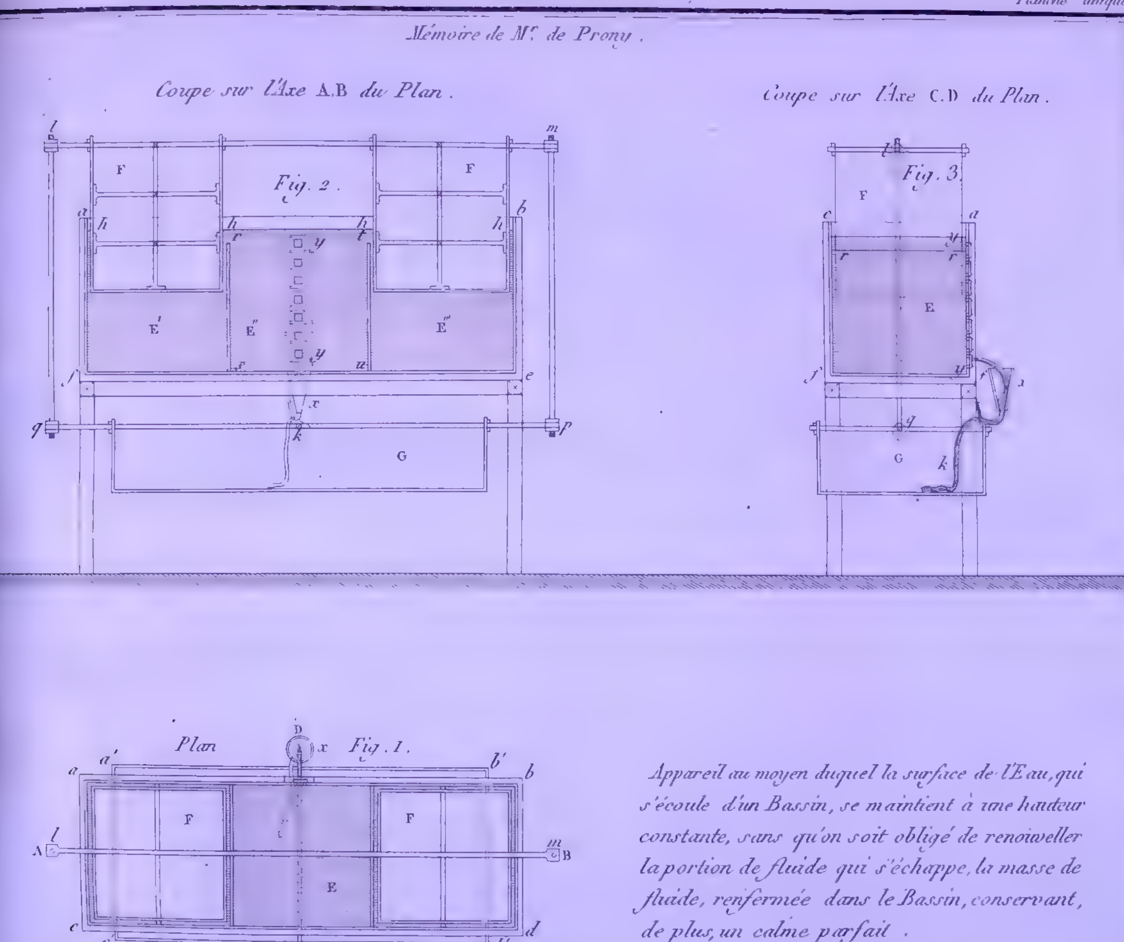

Coupe sur


l
F
a
h
h
E'
E''
f
q


Plan
a
a'
l
A
F
c
c'

AINIER
aversée des
ne differe
cre, et qui
839.
a *calice* ne
ecommande
oit prendre
e, et on est
cet élément
e la charge
plus grande

et avoir lu
quéducs de
, je n'y ai
ité du mo-
as probable
avoir à cet
ais il paraît
des phéno-
omme cause
uges qu'il a
l y suppose
ctions; sim-
. Une règle
nordinaires,
du produit
nt de jauge
loute : cette
t de vitesse;



Appareil au moyen duquel la surface de l'Eau, qui s'écoule d'un Bassin, se maintient à une hauteur constante, sans qu'on soit obligé de renouveller la portion de fluide qui s'échappe, la masse de fluide, renfermée dans le Bassin, conservant, de plus, un calme parfait.

et Frontinus, qui en avait un sentiment confus, évitait de prendre ses mesures dans les endroits où la vîtesse était peu sensible. Quelques jauges que j'ai faites aux mêmes points que lui, m'ont mis à portée de faire sur ses opérations des remarques qui trouveront leur place dans un autre écrit.

Considérant maintenant le rapport de l'once d'eau romaine moderne au quinaire antique, j'observe que le diamètre de l'orifice d'écoulement est $0^{m},0186$ pour l'once, et $0^{m},0230$ pour le quinaire, le rapport de ces deux nombres étant à-peu-près celui de 4 à 5; et les longueurs respectives des ajutages sont $0^{m},28$ et $0^{m},22$. Or, dans le module romain moderne, la charge sur le centre de l'orifice est égale à la longueur de l'ajutage : n'est-il pas naturel de penser que ce rapport d'égalité existait aussi dans le module ou quinaire antique, et qu'on a altéré la longueur absolue pour qu'elle contînt un nombre exact de parties aliquotes de l'unité linéaire moderne.

De plus, comme Frontinus donne les produits des différens *modules* antiques comme proportionnels aux aires des orifices, la charge d'eau, sur tous ces orifices, devait être la même.

On conclut, de ces conjectures, pour le *quinaire* antique, un produit d'environ 56 mètres en vingt-quatre heures : ainsi le rapport entre ce *module* et l'once romaine moderne, qui fournit $41^{m.\,cub.},16$ en vingt-quatre heures, serait, sensiblement, celui de 14:10; mais il existait d'autres *modules* romains, qui, toujours en admettant mes conjectures, seraient beaucoup plus rapprochés de la grande once romaine moderne. Ces modules sont celui qui avait l'aire de son orifice égale

à un doigt quarré, qu'on appelait *digitus quadratus,* et celui qui avait cette aire égale à celle d'un cercle de 1 doigt de diamètre, et qu'on appelait *digitus rotundus.* La grande once romaine étant représentée par 100, le *digitus quadratus* serait 111, et le *digitus rotundus* serait 87. (*Voyez* ci-après le supplément au présent Mémoire.)

L'once d'eau est ainsi une imitation des modules antiques; le pouce de fontainier me paraît être une imitation beaucoup moins heureuse de la petite once romaine. Je suppose que les inventeurs du module français, ayant considéré que le diamètre de l'orifice qui donne l'once était la 12e partie de l'unité linéaire romaine, ont voulu, par analogie, donner au diamètre de leur orifice la 12e partie de l'unité linéaire française, c'est-à-dire un pouce; mais cette analogie, étendue à la charge sur le centre de l'orifice, aurait fait cette charge de 15 pouces; ce qui n'était pas praticable, vu l'excessive grandeur de produit qui en serait résultée. Ils ont donc pris le parti de conserver le produit absolu de la petite once romaine, et ont cherché quelle était la charge sur le centre de l'orifice circulaire d'un pouce, par laquelle on obtenait ce produit; et voilà ce qui explique, si mes conjectures sont fondées, le peu de différence qui existe entre le pouce de fontainier et la petite once romaine; différence qui a pu paraître nulle dans des expériences faites avec des appareils qui ne donnent qu'une exactitude médiocre. Mais les inventeurs du module français ont méconnu les bons principes en n'ayant aucun égard à la longueur de l'ajutage sagement fixée dans le module romain; et de plus, en augmentant considérablement l'orifice par une analogie mal entendue, ils se sont mis dans la nécessité d'avoir une charge beaucoup trop petite; en sorte

que le procédé de jauge français est, à tous égards, très-inférieur au romain, tant ancien que moderne.

§ IV.

De la relation entre la population d'une ville et la quantité d'eau qu'il faut tenir disponible pour les usages privés des habitans de cette ville.

J'ai dit qu'il était convenable d'appliquer immédiatement l'appareil qui donne le module de distribution des eaux à la répartition de la portion de ces eaux qui est spécialement destinée aux usages privés des habitans; ce qui fait dépendre la valeur absolue de ce module de la quantité d'eau, par tête d'habitant, qu'il est nécessaire de tenir disponible.

On a agité cette question sans mettre une attention suffisante à l'indétermination de sa solution. La quantité d'eau à distribuer par tête est relative au degré de salubrité, d'humidité ou de sécheresse d'un pays, et à d'autres circonstances qui tiennent aux mœurs et aux habitudes, aux temps et aux lieux; c'est même d'après quelques-unes de ces dernières circonstances que l'exemple de Rome serait peu applicable à Paris, et en général aux villes modernes. Rome, pendant les quatre premiers siècles qui ont suivi sa fondation, n'avait qu'un petit nombre de fontaines, auxquelles on avait lié des idées religieuses, vraisemblablement pour assurer davantage leur conservation et leur entretien, et des puits d'eau saumâtre : il est vrai que, dans ces premiers temps, une grande partie des habitans occupait les quartiers bas de la ville, et avait les eaux du Tibre à sa disposition; mais, comme ces eaux sont toujours extrêmement troubles, même en temps

d'étiage, elles devaient être peu estimées d'une population ignorante qui jugeait de la bonté des eaux par leur limpidité. Ce fut l'an 441 qu'Appius fit construire le premier aquéduc; la puissance, la richesse, la population et le luxe, qui augmentèrent ensuite avec une progression rapide, donnèrent des besoins d'eau tels que, sous Trajan, il existait neuf aquéducs, qui ont été décrits par Frontinus, et qui fournissaient, d'après le relevé qu'il en fait, 14018 quinaires d'eau, non compris les pertes occasionnées par les infidélités des surveillans et les dilapidations dont l'intendant des eaux se plaint amèrement. Ces 14018 quinaires donneraient, d'après les concordances que j'ai précédemment établies entre les modules antiques et modernes, un produit, en vingt-quatre heures, de 785000 mètres cubes, équivalant à 40900 *pouces de fontainier,* quantité d'eau plus que triple de celle que doit fournir le canal de l'Ourcq, valeur moyenne. A cet immense produit s'est réuni celui de cinq autres aquéducs construits après Frontinus; de manière que, dans le premier siècle de notre ère, quatorze aquéducs amenaient à Rome le tribut de leurs eaux : jamais ville n'en fut aussi abondamment pourvue, et l'augmentation progressive de ces eaux a eu lieu dans une proportion beaucoup plus grande que celle de l'augmentation de la population. Mais il faut considérer qu'indépendamment de l'excès du luxe qui était la suite d'une richesse démesurée, l'usage général des bains suffisait déja pour rendre les besoins d'eau individuels des habitans beaucoup plus grands qu'ils ne sont à présent. On sait d'ailleurs avec quelle immense prodigalité l'eau était dépensée pour les habitations des empereurs, les naumachies, et en général les objets de magnificence publique.

La Rome moderne, avec les trois aquéducs qui lui restent et quelques autres ressources, a encore un produit d'environ 150000 mètres cubes d'eau par jour. Je donnerai sur cet objet, dans le Mémoire que j'ai annoncé précédemment, les résultats des observations et des opérations que j'ai faites sur les lieux, et je chercherai à éclaircir les questions relatives aux eaux et aux aquéducs de Rome ancienne et moderne.

On a reconnu qu'à Paris une famille composée de dix individus consommait, valeur moyenne, chaque jour, 3 voies ou environ 70 litres d'eau; ce qui donne 7 litres par tête, et, dans l'hypothèse d'une population de 700,000 ames, une consommation totale de 4900 mètres cubes par jour : or, en relevant, dans les *Recherches sur les eaux publiques de Paris*, de notre confrère M. Girard, les diverses distributions qui se font dans les établissemens publics, on trouve:

	POUCES de fontainier.	MÈTRES CUBES en 24 heures.
Sources du pré Saint-Gervais.............	9	172,8
Sources de Belleville et Mesnil-Montant.......	6	115,2
Aquéduc d'Arcueil.......................	50	960,0
Pompe Notre-Dame......................	49	940,8
Pompe à feu de Chaillot..................	217	4166,4
Pompe à feu du Gros-Caillou..............	70	1344,0
Porteurs à la bretelle..................	32	614,4
TOTAL........	433	8313,6

Voilà donc une distribution dont le rapport à celle qui serait

strictement nécessaire pour les besoins privés, est, environ, celui de 8 à 5, et qui, si elle était réellement et également répartie aux habitans de la capitale, leur donnerait à-peu-près 12 litres par tête. Deparcieux portait la fourniture exigible à un pouce d'eau par mille habitans; ce qui fait environ 20 litres par tête : cette quantité nous paraît excéder de beaucoup les besoins individuels dans un climat salubre comme celui de Paris, et nous pensons qu'il serait suffisant d'y porter les 7 litres, réellement consommés, à 10; mais il est d'autres villes, telles, par exemple, que celle de Rochefort, où une beaucoup plus grande quantité d'eau potable devient nécessaire; et l'on peut prendre la règle de Deparcieux comme une limite qui fixe le maximum de distribution applicable aux besoins privés.

Il ne faut pas perdre de vue que ces déterminations, se rapportant spécialement aux besoins privés des habitans (besoins sur la considération desquels l'unité fondamentale de distribution doit, ainsi que je l'ai déja dit, être établie), sont indépendantes des quantités d'eau dont il faut faire l'émission en grandes masses pour les objets d'utilité et de décoration publiques, pour les arts, manufactures, etc.

La conséquence de ces faits et de ces observations est que, dans une ville dont la salubrité serait à-peu-près la même que celle de Paris, un produit de 10 mètres cubes, ou 10000 litres d'eau, en vingt-quatre heures, suffirait aux besoins privés de 1000 habitans. Il me paraît convenable de faire, d'un pareil produit, le *module* ou *unite fondamentale* de distribution, sauf à répartir à chaque millier d'habitans, suivant l'exigence des cas, une quantité d'eau qui pourra aller jusqu'au *double module;* et même l'appareil de

jauge, ci-après décrit, sera disposé pour donner immédiatement ce *double module*, disposition nécessaire pour obtenir toute l'exactitude desirable.

Nous nous trouvons ainsi ramenés à la demi-petite once d'eau romaine moderne, once dont le pouce de fontainier n'est qu'une imitation grossière; et nous avons cet avantage, qu'en introduisant dans notre systême métrique décimal la nouvelle unité qui lui manque, les différens nombres composés de cette unité correspondront à-très-peu-près aux mêmes nombres de demi-pouces de fontainier.

La dernière question à résoudre relativement à l'objet de ce Mémoire est donc celle de trouver la grandeur de l'orifice, la charge sur son centre et la longueur de l'ajutage, qui donneront l'appareil le plus commode et le plus exact dans la pratique, pour débiter 20 mètres cubes d'eau en vingt-quatre heures.

§ V.

Description de l'appareil employé dans les expériences relatives à la détermination de la nouvelle unité de distribution des eaux.

J'ai dit qu'ayant été invité à présenter des vues sur la fixation d'une nouvelle unité de distribution des eaux, j'avais imaginé un appareil pour les expériences que ce genre de recherche exigeait : cet appareil a des propriétés qui peuvent intéresser les hydrauliciens et les physiciens, et j'ai pensé qu'il leur serait agréable d'en trouver ici la description. J'ajouterai que je vais le décrire tel qu'il doit être, des raisons d'économie m'ayant forcé de simplifier celui que j'ai fait exécuter.

Un réservoir de plomb, enfermé dans une auge de bois, a 10 à 11 décimètres de profondeur, sur 2 ou 3 mètres de dimension horizontale dans un sens, et un mètre dans l'autre sens. L'espace intérieur de ce réservoir est divisé en trois parties, par deux cloisons perpendiculaires à la face la plus large, et qui s'élèvent jusqu'à un décimètre environ au-dessous de son bord supérieur, de manière que lorsque l'eau n'est qu'à 3 ou 4 centimètres de ce bord, elle se répand dans la partie supérieure du réservoir, comme s'il n'y avait pas de cloisons.

L'espace du milieu, borné de deux côtés par ces cloisons, doit avoir au moins un mètre dans toutes les dimensions. Il n'est pas absolument nécessaire que les deux autres espaces soient aussi grands que celui du milieu; mais ils doivent être égaux entre eux. Sur une des faces de l'espace du milieu, qui fait partie de la grande face du réservoir, la paroi de plomb est remplacée par une planche de cuivre de 8 à 10 centimètres de largeur et d'une hauteur égale à celle du réservoir, percée de plusieurs trous auxquels s'adaptent les pièces servant aux écoulemens, et dont les centres sont dans une même verticale. Ceux de ces trous dont on ne fait pas usage pour les expériences, sont bouchés par des plaques de cuivre serrées avec des vis, et rendues parfaitement étanches par le moyen de cuirs gras placés entre ces plaques et la planche de cuivre. A celui de ces trous qui est employé pour l'expérience, s'adapte une plaque particulière, qui est disposée, ou pour l'écoulement, en mince paroi, ou pour recevoir un ajutage.

Jusqu'ici on ne voit rien de bien particulier dans la pièce décrite, que la division de sa capacité intérieure en trois es-

paces; mais voici ce qui distingue spécialement l'appareil de tous ceux qu'on a employés jusqu'à-présent. Le réservoir étant supposé plein d'eau jusque vers son bord supérieur, deux flotteurs, ou caisses prismatiques, supportés par cette eau, se trouvent enfoncés dans les espaces latéraux, c'est-à-dire situés de part et d'autre de l'espace du milieu auquel correspondent les orifices. Ces flotteurs sont unis entre eux par une barre horizontale fixée à leurs parties supérieures, et se meuvent ainsi comme s'ils ne formaient qu'un seul corps; des verges verticales suspendues aux extrémités de cette barre horizontale, servent à supporter, par leurs extrémités inférieures, un bassin placé au-dessous du grand réservoir, et dont la capacité intérieure doit être un peu plus grande que la somme des parties des volumes des deux flotteurs qui peuvent être immergées par suite de l'écoulement. On voit que les deux flotteurs et le bassin inférieur forment un système général supporté par l'eau du réservoir, et d'un poids précisément égal au poids de l'eau déplacée par les flotteurs. Si donc, lorsqu'on opère l'écoulement dans une expérience, on fait entrer dans le bassin inférieur l'eau écoulée, à mesure qu'elle s'écoule, le système flottant, dont le poids s'augmente à chaque instant de celui de l'eau écoulée dans ce même instant, doit augmenter son déplacement d'un volume précisément égal à celui de cette eau, et, par conséquent, tenir constamment au même niveau la surface du fluide dans le réservoir.

Ainsi voilà un moyen très-sûr de faire des expériences d'écoulement sous une charge constante, sans renouveler l'eau dans le réservoir; et, en faisant les espaces latéraux d'environ un mètre cube, on peut faire écouler plus d'un mètre cube

et demi d'eau, quantité beaucoup plus considérable que celle sur laquelle on opère dans les appareils ordinaires.

Il est extrêmement commode et avantageux de se trouver ainsi dispensé d'avoir un réservoir auxiliaire ou un moyen quelconque de fourniture d'eau, pour remplacer celle que dépense le réservoir d'expérience; mais les principales propriétés de mon appareil sont la rigoureuse conservation du niveau de l'eau, et le calme de la masse en écoulement; c'est pour obtenir complètement ce dernier avantage, que je fais immerger les flotteurs dans des espaces isolés du prisme d'eau qui fournit à l'écoulement; et il n'est pas douteux que cette circonstance, jointe à la lenteur et à la *continuité* de l'enfoncement des flotteurs, ne remplisse très-bien la condition dont il s'agit.

Quant à la conservation du niveau de l'eau, on s'en assure par le moyen du syphon qui communique avec l'intérieur de la masse fluide : j'ai employé, concurremment avec ce syphon, un autre instrument propre à indiquer et à mesurer les plus petites variations de hauteur. Cet instrument est composé d'un petit flotteur suspendu à un fil qui s'enroule sur une poulie; l'axe de cette poulie porte à son extrémité une aiguille qui se meut sur un cadran fixe et divisé, et le rapport du diamètre de la poulie à celui du cadran est tel que le mouvement vertical du flotteur est indiqué et mesuré à la précision de $\frac{1}{10}$ de millimètre.

Un autre instrument me servait à mesurer la hauteur précise de l'eau au-dessus du centre de l'orifice, par l'emploi d'une pointe d'ivoire mise en contact avec son image réfléchie par la surface du fluide, procédé analogue à celui dont on se sert pour faire arriver le mercure au zéro de la division des baromètres portatifs dont l'usage est le plus commun.

Enfin je notais, dans chaque expérience, la température

de l'eau, et j'avais sa densité par l'immersion de l'aréomètre de Deparcieux, qui a, comme on sait, une marche de 6 ou 7 décimètres lorsqu'il passe, sous une température commune, des eaux de puits aux eaux de pluie ou à l'eau distillée.

Je terminerai ce que j'ai à dire sur mon appareil, en faisant observer qu'il fournit un moyen très-sûr, et le seul peut-être que l'art possède, pour obtenir un mouvement rigoureusement uniforme jusque dans les plus petites sous-divisions du temps, et on aura ce mouvement en rendant les flotteurs exactement prismatiques. D'autres formes qu'on pourrait donner à ces flotteurs les feraient descendre avec des mouvemens variés arbitrairement, suivant des conditions déterminées. Notre confrère M. Breguet pense qu'en substituant du mercure à l'eau, on pourrait appliquer mon idée à la construction des clepsydres d'un petit volume, et d'une exactitude très-supérieure aux instrumens de même espèce connus jusqu'à-présent.

§ VI.

Résultats des expériences faites avec l'appareil ci-dessus décrit, et relatives à la nouvelle unité de distribution d'eau. Nom par lequel on pourrait désigner cette nouvelle unité.

J'ai fait, pendant les années 1808 et 1809, beaucoup d'expériences avec l'appareil que je viens de décrire; je me bornerai à donner ici les résultats de celles qui sont relatives à la nouvelle unité de distribution d'eau, qui, ainsi que je l'ai établi précédemment, doit représenter un volume de 10 mètres cubes de fluide écoulé uniformément pendant vingt-quatre heures.

L'orifice qui donne l'once romaine moderne étant à-peu-près de 19 millimètres, et cette dimension étant reconnue bonne par une très-longue expérience, je me suis donné, *à priori,* un diamètre d'orifice qui, à la condition de contenir un nombre exact de centimètres, réunit celle de s'approcher le plus possible du diamètre de l'orifice romain : cette double condition est remplie par une longueur de 2 centimètres ou 20 millimètres; mais pour combiner, avec cette grandeur de l'orifice, une charge sur son centre qui pût, dans la pratique, supporter une légère erreur sans que le produit en fût sensiblement altéré, c'est-à-dire pour éviter un des graves inconvéniens du *pouce de fontainier,* je me suis déterminé, ainsi que je l'ai dit précédemment, à disposer l'appareil fondamental de *jauge* de manière qu'il donnât immédiatement la double unité de distribution, c'est-à-dire 20 mètres cubes en vingt-quatre heures. Il m'a été facile de m'assurer, par un calcul préliminaire, qu'une charge de 5 centimètres, sur le centre de cet orifice de 2 centimètres, donnerait un produit assez peu différent de 20 mètres cubes en vingt-quatre heures, ou $0^{\text{litre}},23148$ en une seconde, pour qu'on pût obtenir ce produit juste en réglant convenablement la longueur de l'ajutage : or, par une circonstance heureuse, cette longueur s'est trouvée, d'après les expériences, comprise dans les limites de 1 et de 2 centimètres : en effet, j'ai reconnu, par un grand nombre d'épreuves faites tant sur l'eau de puits que sur l'eau de la Seine, que les produits par un ajutage d'un centimètre, rapportés à la durée d'une seconde, étaient, valeur moyenne, de $0^{\text{litre}},20790$, et que les produits correspondans par un ajutage de 2 centimètres étaient, valeur moyenne, de $0^{\text{litre}},24076$. J'avais soin, dans mes expériences, de faire en sorte que la paroi intérieure de l'ajutage fût tou-

jours mouillée, et que l'eau remplît exactement la capacité de cet ajutage; sans cette précaution, l'écoulement aurait eu lieu comme par une mince paroi, et n'aurait pas éprouvé l'influence de la variation de longueur qui se fait sentir dans les plus petites dimensions, lorsque l'eau coule à plein tuyau. C'est une vérité dont M. Hachette, avant d'avoir connaissance de mon travail, a donné la preuve dans un Mémoire présenté à l'Académie royale des Sciences, en 1816.

D'après les résultats que je viens de citer, et des expériences subséquentes, faites à Marly par M. Cecile, directeur de la machine, et auxquelles M. Hachette a coopéré, j'ai trouvé que l'ajutage intermédiaire, auquel correspondrait le produit demandé, de $0^{\text{livre}},23148$, pouvait être fixé à 17 millimètres.

Cette petite longueur procure au nouvel appareil de jauge un avantage assez important sur l'appareil romain, en ce qu'elle permet de contenir l'ajutage dans l'épaisseur du bordage qui environne le réservoir de distribution, et qu'ainsi, d'une part, on n'a à craindre aucun des accidens qui peuvent résulter de la saillie de cet ajutage, et que, de l'autre, il est beaucoup plus aisé de tenir l'écoulement parfaitement libre et dégagé des matières qui peuvent obstruer les tuyaux d'une certaine longueur.

Ainsi, en dernier résultat, le double de l'unité de distribution d'eau, que je propose, sera donné, dans l'appareil de jauge, par un orifice circulaire d'un centimètre de rayon, chargé sur son centre de 5 centimètres d'eau, l'écoulement ayant lieu par un ajutage de 17 millimètres de longueur.

Il faut donner très-exactement la mesure prescrite au diamètre de l'orifice, sur la paroi extérieure du bordage, où l'arête du contour doit être bien nette et vive, et émousser

ou arrondir tant soit peu l'arête de la circonférence de l'orifice sur la paroi intérieure. On mettra le plus grand soin à ce que la paroi intérieure de l'ajutage soit parfaitement lisse, sans bavure, ni aspérité.

Il reste à déterminer le nom par lequel on pourrait désigner cette nouvelle unité : les mots grecs qui se rapportent aux mots français *eau* et *mesure* se trouvant déja employés en hydraulique et en physique dans des acceptions qui ne se rapportent pas exactement à l'idée qu'il s'agit d'exprimer, j'ai pensé qu'on pourrait adopter le mot français *module,* qui est le mot latin employé dans le système antique des eaux romaines *(Voyez le Supplément ci-après),* et qui exprime en général le terme de comparaison d'une partie d'un tout avec ses autres parties; ce mot est spécialement usité en architecture : en le joignant au monosyllabe *eau,* on aura l'expression *module d'eau,* qui n'est ni dure ni longue à prononcer, et qui me semble propre à désigner la nouvelle unité à ajouter au système métrique décimal pour compléter ce système. (1)

(1) Le mot *module* est introduit dans la langue de l'architecture, pour énoncer, entre des quantités, des rapports tout-à-fait indépendans des valeurs absolues de ces quantités : ainsi les dimensions des colonnes d'un même *ordre* s'expriment par les mêmes nombres de *modules*, quelles que soient les grandeurs de ces colonnes. Dans le système des eaux romaines, l'acception de ce mot n'est pas aussi générale ; l'expression *module* est seulement commune à un certain nombre donné d'objets mensurables, dont chacun a une valeur *déterminée ;* et comme, dans le système français de la distribution des eaux, on n'admet qu'une seule unité fondamentale, l'analogie conduit à restreindre, à un type unique de distribution, la dénomination qui, chez les Romains, était commune à quinze types, ainsi qu'on le verra dans le Supplément ci-après. Au reste, quelque jugement que l'on porte sur le nouveau nom que je propose, je crois être assuré qu'on le trouvera bien préférable à celui qui appliquerait le nom d'une grandeur *linéaire* à une grandeur dont la notion se compose de celles de *volume* et de *temps ;* c'est à cette vicieuse application, qu'il faut attribuer les idées vagues et fausses que tant de personnes se sont faites du *pouce de fontainier*, et qu'on rencontre même chez des hommes ayant quelque instruction en hydraulique.

EXPLICATION

Des Figures qui se rapportent au Mémoire de M. DE PRONY.

a, b, d, c, fig. 1re, est le plan, ou la projection horizontale du réservoir, sous lequel paraissent les bords *a' b'* et *c' d'* du récipient indiqué dans les fig. 2 et 3 par la lettre *G*.

On voit, dans cette fig. 1re, les dimensions horizontales des flotteurs *F*, unis ensemble par la barre horizontale *l m*, et l'ouverture supérieure d'un entonnoir *x*, destiné à recevoir l'eau qui s'écoule du réservoir, et à la transmettre au récipient inférieur par un tuyau marqué *k* dans les fig. 2 et 3.

La fig. 2 est une coupe verticale de l'appareil, faite par l'axe de la barre *lm*; on y voit le profil *a b e f*, et les trois divisions intérieures *E'*, *E''*, *E'''* du réservoir; ces divisions sont séparées par les cloisons *r s*, *t u*, dont les sommets *r* et *t* se trouvent inférieurs d'un décimètre environ à la surface *h h h h* de l'eau.

y y est la plaque de cuivre percée de trous quarrés, destinés à recevoir les pièces auxquelles sont adaptés les orifices en minces parois et les ajutages.

La même fig. 2 donne les dimensions verticales des flotteurs *F* et du récipient *G*; ce dernier est suspendu à la barre *l m*, qui tient les flotteurs unis, par les tringles verticales *l q*, *m p*, assemblées aux extrémités de la barre horizontale *q p*, de manière que *F F G* est un système mobile tout-à-fait isolé de la caisse fixe *a b e f*, et flottant dans l'eau que renferme cette caisse. Les fig. 2 et 3 représentent ce système flottant dans sa position initiale, c'est-à-dire dans sa position la plus élevée.

La fig. 3 est une coupe transversale et verticale de l'appareil, faite par un plan qui partage en deux parties égales la division du milieu *E''* du réservoir et la plaque de cuivre *y y*; on a reporté sur cette figure les mêmes lettres de renvoi qui désignent les parties correspondantes des deux autres figures, au moyen de quoi elle n'a besoin d'aucune explication. On y voit la coupe de l'entonnoir *x*, et le tuyau *k* qui conduit, dans le récipient *G*, l'eau écoulée du réservoir : le poids du système est ainsi continuellement

augmenté de celui de l'eau écoulée, et il en résulte une immersion des flotteurs *F*, *F*, qui maintient le niveau de l'eau *h h h h*, fig. 2, rigoureusement constant; les cloisons *rs* et *tu* assurent le calme du fluide dans l'espace E'' pendant cette immersion, dont l'effet est de remplacer continuellement la tranche élémentaire supérieure du prisme *hrth*, à mesure que l'écoulement fait abaisser cette tranche.

Je supprime, pour abréger, la description de l'instrument avec lequel je m'assurais de l'invariabilité du niveau, de celui que j'employais pour mesurer la charge du fluide sur le centre de l'orifice ou sur l'axe de l'ajutage, de l'aréomètre, etc. Un tampon d'une construction particulière, qui servait à boucher les orifices, était disposé de manière qu'en l'élevant ou l'abaissant, on faisait partir ou on arrêtait le compteur à demi-secondes qui mesurait le temps. Les physiciens exercés aux expériences suppléeront aisément tous ces détails.

On voit dans les sections verticales, que les flotteurs sont fortifiés intérieurement par des armatures de fer destinées à augmenter leur solidité; mais il est bon de remarquer que les changemens de forme auxquels ces flotteurs pourraient être sujets pendant leur immersion, en vertu de la pression de l'eau, ne produiront jamais aucun changement à la hauteur du fluide dans le réservoir : le maintien du niveau de ce fluide dépend uniquement de l'invariabilité du poids de l'appareil flottant, et des dispositions au moyen desquelles cet appareil se charge continuellement de l'eau écoulée à mesure qu'elle sort du réservoir; son poids restant le même si le volume des flotteurs diminuait, cette diminution serait compensée par une plus profonde immersion, et réciproquement.

Calcul du poids et des dimensions à donner à la partie flottante de l'appareil pour obtenir un déplacement d'environ $\frac{4}{5}$ de mètre cube d'eau.

Je joins à l'explication des figures les résultats de calcul suivans, afin d'épargner l'ennui de ce calcul aux physiciens qui voudront faire construire mon appareil.

Les deux flotteurs *F* et le récipient *G* seront de cuivre laminé, de 2 millimètres d'épaisseur. Je me suis assuré, dans les ateliers de M. Fortin, qu'une planche de cuivre de cette épaisseur, et de $\frac{845}{1000}$ de mètre quarré en surface, pesait 16 kilogrammes; ce qui donne, pour le poids d'un mètre quarré, $18^{\text{kilog.}},93$. (Ce poids excède de $1^{\text{kilog.}}354$ celui du même volume de cuivre non laminé, à raison de 8788 $^{\text{kilog.}}$ le mètre cube.)

Les flotteurs auront chacun $1^{\text{m}},05$ de hauteur sur $0^{\text{m}},96$ de longueur et largeur horizontales; ce qui donne, pour la surface de la base d'un de ces flotteurs........................	m. carr. 0,9216.
Surface de chacune des faces verticales, $1,05 \times 0,96 = 1,008$, et pour les 4 faces....................................	4,0320.
Surface d'un des flotteurs..............................	4,9536.
Surface des deux flotteurs..............................	9,9072.
Le récipient *G* aura de longueur $2^{\text{m}},7$, sur $1^{\text{m}},2$ de largeur; ainsi la surface de sa base sera $2,7 \times 1,2$..................	3,2400.
Il devra contenir $1^{\text{m. cub.}},50$ d'eau; ainsi sa hauteur sera $= \frac{1,50}{3,24} = 0^{\text{m}},463$; ce qui, sur $7^{\text{m}},8$ de tour, donne une surface des parois verticales $= 7^{\text{m}},8 \times \frac{1,50}{3,24} =$..........................	3,6100.
Surface des flotteurs et de la bache....................	m. carr. 16,7572.
Et ces $16^{\text{m. carr.}},7572$, à raison de $18^{\text{kil.}},93$ le mètre quarré, donnent un poids de..	kil. 317,3.
La quantité de fer employée dans la partie flottante de l'appareil, peut être évaluée à 18 mètres de fer en barre, de 3 centimètres de grosseur : on a ainsi un volume de $0^{\text{m. cub.}}$, 0009 de fer par mètre courant, et, pour les 18 mètres, $0^{\text{m. cub.}},0162$; ce qui donne, à raison de 7788 kilog. par mètre cube.........	126,2.
Poids total de l'appareil flottant......................	kil. 443,5.

Ainsi, dans la position initiale, c'est-à-dire au moment où le récipient *G* ne contient encore aucune quantité d'eau, les

deux flotteurs déplacent en somme un volume de $0^{m.\,cub.},4435$ de fluide; et la somme des surfaces de leurs bases étant de $1^{m.\,carr.},8432$, leur immersion sera de $\frac{0,4435}{1,8432}$ = ... mèt. 0,2406.

Leur hauteur totale étant de............................ 1,0500,

on aura, pour la hauteur de la partie hors de l'eau dans l'état initial.. 0,8094.

Supposons qu'on veuille arrêter l'écoulement lorsque le récipient sera chargé d'une quantité d'eau suffisante pour faire descendre l'appareil, à partir de la position initiale, d'une quantité.. 0,7000.

Ce qui laissera encore hors de l'eau une portion de la paroi des flotteurs de.. 0,1094.

Les $0^{m},7$ d'immersion, à partir de l'état initial, donneront, sur une base de $1^{m},8432$, un déplacement de $1,8432 \times 0,7$ = m. cub. 1,2902.

On pourra ainsi disposer, pour chaque expérience, de près de 1300 litres d'eau; ce qui est un avantage particulier de mon appareil sur ceux dont les physiciens se servent ordinairement.

Le récipient *G*, dont la base est de $3^{m},24$, recevant $1^{m.\,cub.},2902$ d'eau, sera rempli sur une hauteur = $\frac{1,2902}{3,24}$ = ... mèt. 0,398.

Et comme sa hauteur est de......................... 0,463,

la surface de l'eau, à la fin de l'expérience, sera inférieure à ses bords de.. 0,065.

Et cette hauteur de $0^{m},065$ est suffisante pour prévenir la chûte de l'eau hors du récipient.

SUPPLÉMENT

Au Mémoire de M. DE PRONY.

J'AI présumé qu'il serait agréable au lecteur de trouver, à la suite de mon mémoire, quelques détails sur le système antique des mesures romaines, pour la distribution des eaux, système qui, s'il n'est pas entièrement à créer chez les modernes, y est du moins, dans un état d'imperfection déplorable. En conséquence je vais donner la traduction du passage du livre de *Frontinus*, où on trouve les dimensions des ajutages, la nomenclature, les dimensions et les rapports des *modules*. Ce passage nous est parvenu extrêmement altéré par les copistes; je suivrai le texte latin, en me conformant aux corrections et aux restitutions de *Poléni,* le commentateur le plus savant et le plus intelligent du traité des *Aquéducs romains*, et, pour être plus clair, je m'attacherai plutôt à rendre la pensée de l'auteur qu'à faire une version littérale. Je joindrai à ma traduction une table synoptique des mesures qui y sont mentionnees et d'autres tableaux pour la concordance tant de mesures anciennes entre elles, que de ces mesures avec les modernes.

Mais, avant de lire le passage dont il s'agit, il faut, préalablement, connaître les valeurs des nombres fractionnaires qui y sont employés. Voici une explication relative à ces nombres, après laquelle j'en donnerai le tableau.

L'*as* est l'*unité*, ou terme général de comparaison dont la valeur *absolue* peut être quelconque.

Cet *as* se divise en douze *onces*, et l'once se divise en 24 *scrupules*.

Ainsi l'*as*, de 12 onces, contient 288 *scrupules*.

Chaque quantité composée de 1 once, de 2 onces, de 3 onces, etc., jusqu'à 11 onces, a un nom particulier, et il en est de même des quantités composées de 1 $\frac{1}{2}$ once, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, et $\frac{1}{6}$ d'once, ce qui, en y comprenant l'*as* et le *scrupule*, forme une nomenclature de 18 mots, au moyen desquels on énonçait, dans l'usage ordinaire, les fractions de l'unité.

Voici le tableau de ces mots, les seuls employés par Frontinus, et les valeurs qui leur correspondent.

*Table des Sous-Divisions romaines de l'*As *ou* Unité.

NOMS DES SOUS-DIVISIONS DE L'*AS* OU *UNITÉ*.	VALEURS DES SOUS-DIVISIONS DE L'*AS*.		
	en onces, ou 12mes d'as.	en scrupules, ou 288mes d'as.	en fractions décimales de l'as.
As ou Unité........	12	288	1,00000
Deunx.............	11	264	0,91667
Dextans...........	10	240	0,83333
Dodrans...........	9	216	0,75000
Bes...............	8	192	0,66667
Septunx...........	7	168	0,58333
Semis.............	6	144	0,50000
Quincunx..........	5	120	0,41667
Triens............	4	96	0,33333
Quadrans..........	3	72	0,25000
Sextans...........	2	48	0,16667
Sescuncia.........	$1\frac{1}{2}$	36	0,12500
Uncia.............	1	24	0,08333
Semuncia..........	$\frac{1}{2}$	12	0,04167
Duella............	$\frac{1}{3}$	8	0,02778
Sicilicus.........	$\frac{1}{4}$	6	0,02083
Sextula...........	$\frac{1}{6}$	4	0,01389
Scripulum (1)......	$\frac{1}{24}$	1	0,00347

(1) Par contraction de *scriptulum*, qui se contracte aussi en *scriptum*. Voy. R. Étienne, *Thesaurus*, etc., tom. 4, pag. 188.

La table précédente offre les valeurs des *onces*, depuis 1 jusqu'à 12, en fractions décimales de l'*as*; il sera bon d'avoir,

avec ces valeurs, celles des *scrupules* ou *vingt-quatrièmes d'once*, en fractions décimales de l'*as*.

Tables des valeurs des Scrupules, *ou* 24es *d'*once, *en fractions décimales de l'*As *ou* Unité.

Scrupules	FRACTIONS décimales de l'As ou Unité.	Scrupules	FRACTIONS décimales de l'As ou Unité.
1	0,00347	13	0,04514
2	0,00694	14	0,04861
3	0,01042	15	0,05208
4	0,01389	16	0,05556
5	0,01736	17	0,05903
6	0,02083	18	0,06250
7	0,02431	19	0,06597
8	0,02778	20	0,06944
9	0,03125	21	0,07292
10	0,03472	22	0,07639
11	0,03819	23	0,07986
12	0,4167	24	0,08333

Voici maintenant la traduction du passage de *Frontinus* qui contient la description du système des mesures romaines antiques, applicables aux distributions des eaux (1). Les

(1) C'est une partie de la traduction complète que j'ai faite, depuis long-temps, du Traité de *Frontinus*, mais que je n'ai pas publiée, ayant su que M. Rondelet, de l'Académie royale des beaux-arts, se disposait à en mettre une au jour.

nombres qu'on y trouvera sont exactement ceux de l'auteur, et je n'ai pas voulu les altérer même en les rendant plus exacts par l'emploi de rapports, entre le diamètre et la circonférence, le quarré du diamètre et l'aire du cercle, plus approchés que ceux de 7 : 21 et 11 : 14. Je me suis contenté de simplifier l'énonciation de ces nombres, en réduisant toutes les fractions en onces et fractions d'onces, ou en onces et scrupules. Ainsi lorsqu'en parlant du tuyau de 25 doigts quarrés d'orifice, Frontinus dit *Diametri digitos V, septuncem, semunciam, sextulam, scripulum*, j'écris, plus simplement *diamètre 5 doigts 7 onces 17 scrupules*, nombres dont l'identité avec ceux de Frontinus, peut être vérifiée par le moyen des tables des sous-divisions de l'unité données ci-dessus.

EXTRAIT

Du Traité des Aquéducs romains, de S. J. Frontinus.

« Après avoir parlé de ceux qui ont amené les eaux, des « époques de l'exécution des travaux, de la disposition, des « longueurs des aquéducs et des différences de niveau des « eaux, il me paraît convenable de traiter chacune de ces « choses en particulier, de dire quelle est la quantité d'eau em- « ployée tant pour les besoins publics et particuliers que pour « l'agrément, d'indiquer le nombre des châteaux-d'eau où on « les distribue, et les lieux de leur destination ; combien hors « de la ville, combien au-dedans ; et les quantités de celles-ci « qui se versent dans les bassins, qui sont réparties aux spec- « tacles, aux travaux publics, à l'empereur et aux usages privés.

« Mais je pense qu'avant d'employer les mots *quinaires, centenaires* et les noms des autres *modules,* dont on se sert « pour les mesures, il faut indiquer leur origine, leurs valeurs « et leur signification; et après avoir donné une règle pour « déterminer leurs rapports et leur *principe*, montrer les « discordances que j'y ai trouvées et les moyens que j'ai employés pour les corriger.

« Les *modules* des eaux ont d'abord été établis et mesurés « ou d'après les *doigts* ou d'après les *onces*; les doigts sont « employés dans la Campanie et dans la plupart des lieux de « l'Italie; les *onces* sont en usage à.....................(1). « Or le doigt est $\frac{1}{16}$ du *pied* et l'once en est $\frac{1}{12}$; et de même « que l'once et le doigt constituent deux mesures, de même « aussi le doigt ne fournit pas une mesure unique, il est ou « quarré ou rond; le *doigt quarré* est plus grand que le *rond* « de $\frac{3}{14}$ de ses parties; le rond est plus petit que le quarré de $\frac{3}{11}$ « des siennes, vu que les angles sont retranchés.

« Vint ensuite un *module* qu'on a appelé *quinaire*, qui ne « tirait son origine ni de l'*once*, ni du doigt soit quarré, soit « rond; quelques-uns pensent qu'il fut introduit par Agrippa; « d'autres l'attribuent à des plombiers employés par l'architecte Vitruve, qui appliquèrent ce module aux usages de « la ville, exclusivement à tous autres.

« Ceux qui regardent Agrippa comme son inventeur, « disent qu'il rassembla en un seul tuyau cinq modules antiques, d'une petitesse qui les rendait comparables à des « *points*, modules usités pour la distribution des eaux, dans « les temps où l'on en avait fort-peu. Ceux qui le donnent

(1) Lacune dans le texte.

« à Vitruve et aux plombiers en dérivent le nom de ce que, « selon eux, une lame de plomb plate, et de cinq doigts de « largeur, était courbée circulairement pour former le tuyau « du module ; mais cela est incertain, puisque en courbant, « ainsi, une lame plate, il y a contraction à la paroi inté- « rieure, et extension à la paroi extérieure.

« Il est très-probable que le nom de *quinaire* vient du « diamètre de $\frac{5}{4}$ de doigts, analogie de dénomination qui est « observée dans les modules suivans, jusqu'au *vicenaire*, le « *senaire* ayant $\frac{6}{4}$ de doigt de diamètre, le *septenaire* $\frac{7}{4}$, et « ainsi de suite jusqu'au vicenaire.

« Tout module s'évalue ou par le diamètre, ou par le « perimètre ou par l'aire de la *section transversale du tuyau*, « d'où on conclut son *produit* ou sa capacité ; et pour éva- « luer plus facilement les différences entre l'once, le doigt » quarré, le doigt rond, et le quinaire lui-même, je rappor- « terai tout au quinaire qui est le module le plus certain et « le plus en usage.

« Le module de *l'once* a $\frac{4}{3}$ de doigt de diamètre; il con- « tient un quinaire et plus de $\frac{1}{8}$ de quinaire, ou plus exac- « tement un quinaire une once et quinze scrupules $\frac{2}{3}$ de qui- « naire.

« Le *doigt quarré* réduit à un cercle d'égale surface, a de « diamètre un doigt, une once et treize scrupules de doigt, « et vaut 9 $\frac{3}{4}$ onces de quinaire.

« Le *doigt rond* a un doigt de diamètre et vaut 7 onces « 16 scrupules de quinaire.

« Au reste, les modules dérivés du quinaire reçoivent leurs « accroissemens de deux manières. La première consiste à « multiplier les quinaires en en comprenant plusieurs dans

« un même tuyau dont l'amplitude est proportionnée à la « quantité des quinaires qu'on y rassemble ; c'est un usage « presque établi aujourd'hui lorsque plusieurs quinaires sont « concédés, de les recevoir dans un réservoir, où l'on en fait « la répartition, et d'éviter ainsi le trop grand nombre d'ou- « vertures à faire à un même tuyau.

« Dans la seconde manière, l'augmentation du tuyau ne « se règle pas sur la nécessité de lui faire fournir un nombre « exact de quinaires, mais sur la loi de l'augmentation de « son diamètre, de laquelle il prend et son nom et sa ca- « pacité. Ainsi, en ajoutant $\frac{1}{4}$ *de doigt* au diamètre du tuyau « qui donne le quinaire, on a le senaire, dont le rapport avec « quinaire n'est pas un nombre entier, car le senaire contient « un quinaire plus 5 $\frac{1}{4}$ onces de quinaire ; en augmentant, « ainsi le diamètre de 2, 3, etc., quarts de doigt, on a (ainsi « qu'il a été dit ci-dessus) le *septenaire*, l'*octonaire* et jusqu'au « *vicenaire*.

« Viennent ensuite les rapports déduits des nombres de « doigts quarrés compris dans les aires des orifices des divers « modules, nombres desquels chaque tuyau tire son nom; « ainsi celui dont l'aire de l'orifice est égale à celle d'un cercle « de vingt-cinq doigts quarrés de surface, s'appelle tuyau de « 25, (*fistula-vicenum-quinum*) ; on a de même le tuyau de « trente (*fistula-tricenaria*) et on va, par des augmentations « successives de doigts quarrés, jusqu'au tuyau de cent vingt « *fistula-centenum-vicenum*.

« Le tuyau vicenaire placé au point de réunion de ceux « qui se classent par leur diamètre, et de ceux qui se classent « par la surface de leur orifice, tient des uns et des autres. « Dans la série des premiers il offre un diamètre de 5 doigts

« ou $\frac{20}{4}$ de doigt; dans celle des suivans il offre une aire d'ori-
« fice d'un peu moins de vingt doigts quarrés.

« Les relations des tuyaux quinaires, dans tous les mo-
« dules, jusqu'au tuyau de cent vingt, sont telles que nous
« venons de les exposer; elles offrent un ensemble dont
« toutes les parties sont d'accord entre elles, et conformes
« aux réglements de notre très-invicible et très-pieux em-
« pereur. Ces modules doivent être adoptés soit qu'on adhère
« à la raison, ou qu'on cède à l'autorité; mais les fontainiers
« qui suivent la raison, pour plusieurs modules, en ont
« cependant quatre auxquels ils ont fait des changemens,
« savoir, le duodenaire, le vicenaire, le centenaire, et celui
« de cent vingt.

« L'erreur est petite sur le duodenaire dont on fait, d'ail-
« leurs, peu d'usage; ils ont ajouté à son diamètre $\frac{3}{4}$ d'une
« once de doigt et augmenté sa capacité d'un quart de qui-
« naire. Le changement est plus considérable pour les trois
« autres modules; ils diminuent le diamètre du vicenaire
« d'un demi-doigt et sa capacité de trois quinaires et d'une
« demi-once de quinaire; ce module réduit est celui dont
« les fontainiers se servent le plus pour l'eau qu'ils distri-
« buent. Quant au centenaire et à celui de cent vingt (qui
« sont les modules avec lesquels les fontainiers reçoivent
« constamment l'eau), ils ne les diminuent pas, mais les
« augmentent; ils ajoutent au diamètre du centenaire
« 8 $\frac{1}{2}$ onces de doigt, ce qui augmente la capacité de dix
« quinaires et 6 $\frac{3}{4}$ onces de quinaire; et au diamètre de celui
« de cent vingt, trois doigts et 7 $\frac{1}{2}$ onces de doigts, ce qui
« augmente la capacité de soixante-cinq quinaires 9 $\frac{1}{4}$ onces
« de quinaires.

« Ainsi en diminuant, d'une part, le vicenaire, module « avec lequel ils font leurs distributions, et en augmentant, « de l'autre, le centenaire et celui de 120, modules avec « lesquels ils reçoivent, les fontainiers gagnent 25 quinaires « et 10 $\frac{1}{6}$ d'onces sur le centenaire, 84 quinaires et $\frac{5}{4}$ d'once « sur celui de 120 (1); c'est ce qui résulte incontestable- « ment des proportions des modules, car ils ne livrent que « 13 quinaires sur le vicenaire que César évalue à 16 qui- « naires; et il est également certain que le centenaire, qu'ils « ont augmenté, est, dans leurs distributions, réduit à sa « plus petite valeur, celle de 81 $\frac{1}{2}$ quinaires, assignée comme « complète par César, dans ses réglemens, où l'on donne « également, comme valeur exacte du module de 120, le « nombre de 97 $\frac{3}{4}$ quinaires.

« En resultat, il y a 25 modules qui sont tous en pro- « portion entre eux et d'accord avec les réglements, à l'ex- « ception des quatre changés par les fontainiers, toutes les « choses, cependant, qui composent un même système de

---

(1) Q et Q' étant, respectivement, le nombre légal et le nombre, augmenté par les fontainiers, des *quinaires* contenus dans un des *modules* avec lesquels on leur livre l'eau; q et q' les nombres respectifs, légaux et diminués par eux, des *quinaires* contenus dans le *module* avec lequel ils débitent; le résultat de la double fraude, ou le nombre n de quinaires qu'ils gagnent en changeant Q et q en Q' et q', a, pour valeur, $n = Q' - \frac{q'}{q} Q$. Si q est le *vicenaire*, on a (*Voy. le tableau pag.* 451) $\frac{q'}{q} = \frac{12,96}{16} = 0,81$; et si, avec cette valeur, on emploie successivement celles qui conviennent aux modules de 100 et 120, savoir, $Q = 81,49$; $Q' = 92,05$; et $Q = 97,78$; $Q' = 163,56$; on aura $n = 26,04$ et $n = 84,36$, nombres sensiblement équivalens à ceux de Frontinus.

« mensuration, devraient convenir entre elles par des rap-
« ports certains et immuables, et c'est ainsi que l'ensemble du
« système serait bien ordonné; de même par exemple, qu'il
« y a une certaine relation du *sextier* au *cyathe,* et une relation
« correspondante du *muid* tant au *sextier* qu'au *cyathe*, ainsi
« la multiplication du quinaire, pour produire les modules
« supérieurs, doit être soumise à une progression régulière;
« autrement si on trouve plus dans les modules par lesquels
« les fontainiers reçoivent et moins dans ceux par lesquels
« ils livrent l'eau, on doit dire que ce n'est pas une erreur
« mais une fraude.

« Il faut cependant observer que l'eau donne plus que son
« module lorsqu'elle arrive d'un lieu élevé et parcourt un petit
« espace, et qu'au contraire, elle donne moins que son mo-
« dule, quand la prise d'eau est éloignée et peu élevée, ou
« que l'eau a moins de charge, le déchet provenant alors du
« défaut de vitesse; on doit dans l'un ou l'autre de ces cas,
« ou diminuer ou agrandir le tuyau de distribution.

« La position du *calice* mérite aussi d'être prise en con-
« sidération; si ce calice est horizontal et à angles droits sur
« le courant, son produit est réglé convenablement; mais
« s'il est incliné à l'horizon et dirigé de manière que l'eau soit
« portée à y affluer par son propre courant, il prendra plus
« d'eau qu'il ne doit en prendre; au contraire, quand le
« tuyau, au lieu d'être incliné, comme on vient de le dire
« est dirigé de manière que celui de ses orifices, par où le
« fluide en sort, se trouve plus élevé que l'orifice par où ce
« fluide y entre et que le sens de la direction du tuyau est
« contraire à celui dans lequel l'eau coule, le produit est
« moindre qu'il ne doit être.

« Le *calice* est un module d'airain qui s'adapte à la paroi « du canal ou à celle du réservoir, et à la suite duquel se « placent les tuyaux de conduite : sa longueur ne doit pas « être moindre que 12 doigts, et la grandeur de son orifice « doit être relative à l'eau qu'il doit fournir. Il paraît qu'on « l'exécute en airain à cause de la dureté de ce métal qui « préserve les modules de toute espèce d'altération.

« Les 25 modules dont je vais parler (il n'y a que 15 de « ces modules qui soient d'un usage fréquent), sont tous « conformes aux proportions précédemment assignées, en « rectifiant les 4 modules altérés par les fontainiers. C'est « suivant ces proportions qu'il faut établir tous les tuyaux « qu'on emploiera, et si on garde les tuyaux où elles sont « altérées, il ne faudra prendre ces tuyaux que pour le « nombre de quinaires qu'ils fournissent effectivement. J'ai « indiqué les modules qui ne sont plus en usage, et.... (1).

« L'*once* a 1 $\frac{1}{3}$ doigt de diamètre, il contient plus de $\frac{9}{8}$ de « quinaire, c'est-à-dire un quinaire plus 1 once et 15 $\frac{2}{3}$ scru- « pules de quinaire.

« Le doigt quarré a sa longueur et sa largeur égales; si on « le réduit en rond, il aura de diamètre un doigt, 1 once et « 13 scrupules de doigt, et fournira 9 $\frac{3}{4}$ onces de quinaire.

« Le doigt rond a un doigt de diamètre; il fournit 7 $\frac{2}{3}$ « onces de quinaire.

« Le tuyau du quinaire a $\frac{5}{4}$ de doigt de diamètre; son péri- « mètre est de 3 doigts 11 onces et 3 scrupules de doigt, « il contient un quinaire.

---

(1) Lacune dans le texte, où l'on ne trouve même pas le nom du premier module, c'est-à-dire le mot *once*, restitué par Poleni.

« Le tuyau senaire a, de diamètre, 1 $\frac{1}{2}$ doigt; son périmètre « est de 4 doigts 8 onces et 13 scrupules de doigt; il contient « 1 quinaire et 5 $\frac{1}{4}$ onces de quinaire.

« Le septenaire a $\frac{7}{4}$ de doigt de diamètre; son périmètre « est de 5 $\frac{1}{2}$ doigts, il contient 1 quinaire et 11 $\frac{1}{2}$ onces de « quinaire, on ne s'en sert pas.

« L'octonaire a 2 doigts de diamètre, son périmètre est « de 6 doigts 3 $\frac{1}{3}$ onces de doigt. Il contient 2 quinaires 6 « $\frac{3}{4}$ onces de quinaire.

« Le denaire a 2 $\frac{1}{2}$ doigts de diamètre; son périmètre est « de 7 doigts 10 $\frac{1}{4}$ onces de doigt, il contient 4 quinaires.

« Le duodenaire a 3 doigts de diamètre; son périmètre est « de 9 doigts 5 onces et 2 scrupules de doigt, il contient 5 $\frac{3}{4}$ « quinaires. Il n'est point en usage. Les fontainiers en em- « ployaient un autre qui avait de diamètre 3 doigts et $\frac{3}{4}$ d'once « de doigt et qui contenait six quinaires.

« Le tuyau quindenaire a 3 doigts $\frac{3}{4}$ de diamètre; sa cir- « conférence est de 11 doigts 9 $\frac{1}{3}$ onces de doigt, il contient « 9 quinaires.

« Le tuyau vicenaire a 5 doigts de diamètre; son périmètre « est de 15 doigts 8 $\frac{1}{2}$ onces de doigt, il tient 16 quinaires. « Les fontainiers lui donnaient 4 $\frac{1}{2}$ doigts de diamètre ce qui « réduisait sa capacité à 12 quinaires 11 $\frac{1}{2}$ onces de quinaire.

« Le tuyau de 25 doigts quarrés (1) a, de diamètre, 5 doigts, « 7 onces et 17 scrupules de doigt; son périmètre est de 17 doigts « 8 $\frac{3}{4}$ onces de doigt, il contient 20 quinaires 4 $\frac{1}{2}$ onces.

« Le tuyau de 30 doigts quarrés a de diamètre 6 doigts

(1) Cette aire, et les suivantes, sont celles des orifices, ou des sections transversales des ajutages.

« 2 $\frac{1}{6}$ d'onces ; son périmètre est de 19 doigts 5 onces ; il con-
« tient 24 quinaires 5 $\frac{1}{3}$ onces.

« Le tuyau de 35 doigts quarrés a de diamètre 6 doigts 8 « onces 3 scrupules; son périmètre est de 20 doigts 11 $\frac{3}{4}$ onces, « il contient 28 quinaires 6 $\frac{1}{4}$ onces. Il n'est pas en usage.

« Le tuyau de 40 doigts quarrés a de diamètre 7 doigts « une once et 16 scrupules; son périmètre est de 22 doigts « 5 onces, il tient 32 quinaires 7 onces 4 scrupules.

« Le tuyau de 45 doigts quarrés a de diamètre 7 doigts « 6 onces, 20 scrupules ; son périmètre est de 23 doigts, 9 onces, « 8 scrupules ; il contient 36 quinaires, 8 onces. Il n'est pas « en usage.

« Le tuyau de 50 doigts quarrés a, de diamètre, 7 doigts « 11 onces et $\frac{3}{4}$ d'once ; son périmètre est de 25 doigts et « $\frac{3}{4}$ d'once ; il tient 40 quinaires et 9 onces.

« Le tuyau de 55 doigts quarrés a de diamètre 8 doigts « 4 onces, 10 scrupules ; son périmètre est de 26 doigts 3 « onces, 12 scrupules ; il prend 44 quinaires, 9 onces, 20 « scrupules. Il n'est pas en usage.

« Le tuyau de 60 doigts quarrés a de diamètre 8 doigts, « 8 onces, 21 scrupules ; son périmètre est de 27 doigts, 5 « onces, 12 scrupules ; il prend 48 quinaires, 10 onces, « 16 scrupules.

« Le tuyau de 65 doigts quarrés a de diamètre 9 doigts, « 1 once, 4 scrupules ; son périmètre est de 28 doigts, 6 onces, « 22 scrupules ; il tient 52 quinaires, 11 onces, 12 scrupules. « Il n'est pas en usage.

« Le tuyau de 70 doigts quarrés a de diamètre 9 doigts, 5 « onces, 8 scrupules; son périmètre est de 29 doigts, 8 onces; « il prend 57 quinaires, 12 scrupules.

« Le tuyau de 75 doigts quarrés a de diamètre 9 doigts, 9
« onces, 6 scrupules; son périmètre est de 30 doigts, 8 onces,
« 8 scrupules; il prend 61 quinaires, 1 once, 8 scrupules.
« Il n'est pas en usage.

« Le tuyau de 80 doigts quarrés a de diamètre 10 doigts,
« 1 once, 2 scrupules; son périmètre est de 31 doigts, 8 onces
« 8 scrupules; il prend 65 quinaires, 2 onces, 6 scrupules.

« Le tuyau de 85 doigts quarrés a 10 doigts, 4 onces, 20
« scrupules de diamètre; son périmètre est de 32 doigts, 8
« onces, 4 scrupules; il prend 69 quinaires, 3 onces, 4 scru-
« pules. Il n'est pas en usage.

« Le tuyau de 90 doigts quarrés a de diamètre 10 doigts,
« 8 onces, 11 scrupules; son périmètre est de 33 doigts, 7
« onces, 14 scrupules; il prend 73 quinaires, 4 onces.

« Le tuyau de 95 doigts quarrés a de diamètre 11 doigts;
« son périmètre est de 34 doigts, 6 onces, 16 scrupules; il
« prend 77 quinaires, 5 onces. Il n'est pas en usage.

« Le tuyau de 100 doigts quarrés a de diamètre 11 doigts,
« 3 onces, 10 scrupules; son périmètre est de 35 doigts, 5
« onces, 10 scrupules; il prend 81 quinaires, 5 onces, 20
« scrupules. Les fontainiers lui donnent 11 doigts, 11 onces,
« 22 scrupules de diamètre, et lui font prendre 92 quinaires,
« 14 scrupules.

« Le tuyau de 120 doigts quarrés a de diamètre 12 doigts,
« 4 onces, 8 scrupules. Son périmètre est de 38 doigts, 10
« onces; il prend 97 quinaires, 9 onces, 10 scrupules. Les
« fontainiers lui donnent 15 doigts, 11 onces, 20 scrupules
« de diamètre, et lui font prendre 163 quinaires, 6 onces,
« 16 scrupules, produit équivalent *(à-très-peu-près)* à celui
« de deux tuyaux de 100 doigts quarrés. »

J'ai composé, d'après le texte de Frontinus, le tableau suivant, où tout le système des modules d'eau romains se verra beaucoup plus aisément et plus nettement que dans son exposé. J'y ai substitué, comme dans ma traduction, pour simplifier l'énonciation des fractions, aux parties de l'unité désignées par *deunx, dextans, dodrans,* etc., les nombres équivalens *d'onces* et de *scrupules.* Ceux qui voudront vérifier, d'après le texte latin, l'exactitude de mes substitutions, pourront se servir des deux tables des sous-divisions de l'as que j'ai données précédemment; on reconnaîtra que les nombres des tableaux sont, ainsi que j'en ai prévenu à l'occasion de ma traduction, parfaitement identiques avec ceux de l'auteur; j'ai calculé, pour ne pas laisser de lacune dans ce tableau, les circonférences d'orifices qu'il n'a pas données.

J'ai pensé de plus, qu'il était bon, pour faciliter les rapprochemens et les comparaisons, d'avoir, en nombres fractionnaires décimaux, les équivalens des nombres fractionnaires duodécimaux de Frontinus, et j'ai calculé ces équivalens qui se trouvent placés dans les trois dernières colonnes à droite du tableau, au moyen de quoi on a, sur chaque ligne horizontale, deux expressions des dimensions et de l'aire de l'orifice, l'une en nombres fractionnaires duodécimaux, et l'autre en nombres fractionnaires décimaux.

TABLEAU DU SYSTÈME DES MESURES ROMAINES

APPLICABLES A LA DISTRIBUTION DES EAUX.

Nota. L'expression *surface en quinaires* désigne le nombre de fois que l'aire d'un orifice contient l'aire d'un cercle dont le diamètre = $\frac{5}{4}$ de doigt. Les lettres initiales *n. u.* indiquent les modules qui n'étaient pas en usage au temps de Frontinus.

	CLASSEMENT ET NOMS DES MODULES.	DIMENSIONS DES ORIFICES EN NOMBRES FRACTIONNAIRES DUODÉCIMAUX, d'après les sous-divisions romaines de l'as. — DIAMÈTRE. Doigts.	DIAMÈTRE. Onces ou 12es de doigt.	DIAMÈTRE. Scrupules ou 24es d'once.	CIRCONFÉRENCE. Doigts.	CIRCONFÉRENCE. Onces ou 12es de doigt.	CIRCONFÉRENCE. Scrupules ou 24es d'once.	SURFACE EN QUINAIRES. Quinaires.	SURFACE EN QUINAIRES. Onces ou 12es de quinre.	SURFACE EN QUINAIRES. Scrupules ou 24es d'once.	DIMENSIONS DES ORIFICES EN NOMBRES FRACTIONNAIRES DÉCIMAUX. — DIAMÈTRE. Doigts et parties décimales.	CIRCONFÉRENCE. Doigts et parties décimales.	SURFACE EN QUINAIRES. Quinaires et parties décimales.
1re DIVISION.	Uncia	1	4	0	4	2	6	1	1	15$\frac{2}{3}$	1,33333	4,18878	1,13773
	Digitus quadratus in rotundum redactus	1	1	13	3	6	13	0	9	18	1,12847	3,54519	0,81250
	Digitus rotundus	1	0	0	3	1	17	0	7	16	1,00000	3,14159	0,64000
2e DIVISION.	Fistula quinaria	1	3	0	3	11	3	1	0	0	1,25000	3,92708	1,00000
	Fistula senaria	1	6	0	4	8	13	1	5	6	1,50000	4,71181	1,43750
	septenaria, n. u.	1	9	0	5	6	0	1	11	12	1,75000	5,50000	1,95833
	octonaria	2	0	0	6	3	8	2	6	18	2,00000	6,27778	2,56250
	denaria	2	6	0	7	10	6	4	0	0	2,50000	7,85417	4,00000
	duodenaria, n. u.	3	0	0	9	5	2	5	9	0	3,00000	9,48611	5,75000
	apud aquarios	3	0	18	9	7	11	6	0	0	3,06250	9,62113	6,00000
	quinumdenum	3	9	0	11	9	8	9	0	0	3,75000	11,77778	9,00000
	vicenaria	5	0	0	15	8	12	16	0	0	5,00000	15,70833	16,00000
	apud aquarios	4	6	0	14	1	15	12	11	12	4,50000	14,13717	12,95883
3e DIVISION.	Aire de l'orifice 25 doigts quarr. fistula vicenum quinum	5	7	17	17	8	18	20	4	12	5,64236	17,72917	20,37500
	30 doigts quarrés, fistula tricenaria	6	2	4	19	5	0	24	5	8	6,18056	19,41667	24,44444
	35, n. u. . . tricenumquinum	6	8	3	20	11	18	28	6	6	6,67708	20,97917	28,52083
	40 . . . . . . quadragenaria	7	1	16	22	5	0	32	7	4	7,13889	22,41667	32,59722
	45, n. u. . . quadragenumquin.	7	6	20	23	9	8	36	8	0	7,56944	23,77778	36,66667
	50 . . . . . . quinquagenaria	7	11	18	25	0	18	40	9	0	7,97917	25,06250	40,75000
	55, n. u. . . quinquagenumquin.	8	4	10	26	3	12	44	9	20	8,36806	26,29167	44,81944
	60, ... sexagenaria	8	8	21	27	5	12	48	10	16	8,73958	27,45833	48,88889
	65, n. u. . . sexagenumquinum.	9	1	4	28	6	22	52	11	12	9,84722	28,57639	52,95833
	70 . . . . . . septuagenaria	9	5	8	29	8	0	57	0	12	9,44444	29,66667	57,04167
	75, n. u. . . septuagenumquinum	9	9	6	30	8	8	61	1	8	9,77083	30,69445	61,11111
	80 . . . . . . octogenaria	10	1	2	31	8	8	65	2	6	10,09028	31,69445	65,18750
	85, n. u. . . octogenumquinum.	10	4	20	32	8	4	69	3	4	10,40278	32,68056	69,26389
	90 . . . . . . nonagenaria	10	8	11	33	7	14	73	4	0	10,70486	33,63194	73,33333
	95, n. u. . . nonagenumquinum.	11	0	0	34	6	16	77	5	0	11,00000	34,55556	77,41667
	100. . . . . centenaria	11	3	10	35	5	10	81	5	20	11,28472	35,45139	81,48611
	113*. . . . apud aquarios	11	11	22	37	8	3	92	0	14	11,99306	37,67744	92,04861
	120. . . . . centenum vicenum.	12	4	8	38	10	0	97	9	10	12,36111	38,83333	97,78472
	200$\frac{7}{10}$*. . . apud aquarios	15	11	20	50	2	2	163	6	16	15,98611	50,22180	163,55556

J'ai suivi dans le classement des modules, l'ordre indiqué par Frontinus, mais cet ordre n'est pas le plus conforme à l'analogie des mesures entre elles. Ces mesures ne forment réellement que deux divisions générales, l'une composée des modules donnés par le diamètre, et l'autre des modules donnés par l'aire de l'orifice. La première division présente deux sous-divisions, l'une desquelles est occupée par l'*uncia* seule, et l'autre par les modules dont les diamètres forment une série régulière et croissante de quart en quart de doigt, à la tête de laquelle se trouve le *digitus rotundus*. La seconde division générale doit se composer de tous les modules compris dans la troisième division du tableau ci-dessus, plus le *digitus quadratus in rotundum redactus* qui en est le plus petit terme.

Si on veut connaître le degré d'exactitude des nombres de Frontinus, on aura en designant par A′ l'aire du cercle dont le diamètre = 1, par A l'aire de l'orifice d'un module quelconque, par D le diamètre de cet orifice, (A exprimant des *doigts* quarrés et D des *doigts* linéaires) et par Q le nombre de quinaires que ce module fournirait si les produits étaient proportionnels aux aires des orifices, ainsi que le suppose Frontinus.

$$Q=0{,}64D^2 \qquad \log.\frac{0{,}64}{A'}=\bar{1}9{,}110901$$

$$Q=\frac{0{,}64\,A}{A'} \qquad \frac{0{,}64}{A'}=0{,}814873.$$

(La caractéristique seule est négative.)

La première formule servira pour les modules qui sont

donnés par le diamètre, et la seconde pour ceux qui sont donnés par l'aire de l'orifice.

La connaissance que nous avons des produits absolus du *module d'eau français*, du *pouce de fontainier*, des grandes et petites *onces d'eau* romaines modernes, donne immédiatement les rapports entre ces divers produits; d'une autre part, si j'ai bien conjecturé en supposant que les anciens Romains avaient, comme les modernes, la charge d'eau, sur le centre de l'orifice, égale à la longueur de l'ajutage, je puis conclure, de cette hypothèse, les valeurs approchées de leurs differens *modules;* je vais, en partant des déterminations consignées dans le Mémoire, donner les produits absolus en vingt-quatre heures, et les rapports du double *module d'eau* français, du *pouce de fontainier,* des grandes et petites *onces* d'eau romaines modernes, et des *modules* antiques désignés par les noms *uncia, digitus quadratus, digitus rotundus, quinaria :*

	PRODUITS EN 24 HEURES.	LOGARITHMES.
	Mètres cubes.	
Double module d'eau français..........	20,00.....	1,3010300.
Pouce de fontainier.................	19,19527..	1,2831943.
Grande once d'eau romaine moderne....	41,16.....	1,6144754.
Petite once d'eau *idem*................	20,58.....	1,3134454.
Uncia (*antique*)......................	63,711....	1,8042158.
Digitus quadratus.....................	45,6329...	1,6592781.
Digitus rotundus......................	35,84.....	1,5543680.
Quinaria.............................	56........	1,7481880.

Facteurs par lesquels il faut multiplier un nombre donné de l'une des sept dernières mesures du tableau précédent, pour avoir le nombre correspondant de doubles modules d'eau *français.*

	FACTEURS.	LOGARITHMES.
Pouce de fontainier....................	0,9597635.	$\bar{1}$,9821643.
Grande once romaine moderne.........	2,058.....	0,3134454.
Petite once romaine moderne...........	1,029.....	0,0124154.
Uncia antiqua..........................	3,18555...	0,5031858.
Digitus quadratus......................	2,28164...	0,3582481.
Digitus rotundus.......................	1,792.....	0,2533380.
Quinaria...............................	2,80......	0,4471580.

Si on prend la grande once romaine pour unité ou terme de comparaison, et qu'on exprime, en parties de cette unité, le *digitus quadratus* et le *digitus rotundus*, on aura

Digitus quadratus....... 1,10867; *log.* 0,04480,

Digitus rotundus....... 0,87055; *log.* $\bar{1}$,93989;

rapports conformes à ceux qui ont été donnés dans le § III du Mémoire.

ERRATUM.

Page 415, ligne 27, *en général,* lisez : *en grande partie.*

DE L'IMPRIMERIE DE FIRMIN DIDOT,
IMPRIMEUR DU ROI ET DE L'INSTITUT, RUE JACOB, N° 24.